

訪談 翁秉仁、馮肅媛

成爲數學界的鍾理和林長壽院士訪談



受訪者簡介

臺灣大學數學系畢業，紐約大學數學博士。短期留美後，於1987年返臺，曾於臺灣大學、中正大學任教，歷任國家理論科學研究中心主任、臺大數學科學中心主任、現為臺大理論科學研究中心主任。1998年當選中央研究院院士，同年獲得第一屆農興數學金獎。

翁 請先跟我們談一下你在大學前的經歷，尤其是和數學有關的部分。

林 我不太記得小學的事，當時數學程度可能不錯，至少數學本身沒有什麼困難。我初中唯一比較好的科目就是數學。我讀數學不看參考書，同學反而會問我參考書的問題。但我上課時很喜歡解難題，而且方法一定要比老師好，我想我給數學老師很大的壓力。

在初中我根本不懂聯考的意義，結果考完後，只有數學考得稍好，上了排名比較差的學校，不過我也不在乎。事實上，我高中不管哪個科目都是自己讀，高一時已經讀完高二的數學，那時幾乎沒什麼書可以讀，只有課本。

高二時，我迷上量子力學，花了很多時間去理解，知識來源大部分還是課本。不過我也讀了一本知名物理學家加莫（George Gamow）寫的課外書《湯先生奇遊記》，其中講到如果將微觀世界的量子現象放大到日常生活來會是什麼樣子，他的描述刺激了我很多想像空間。另外，那時《科學月刊》剛創刊，我買了第一期，結果在從北投回家的火車上，一邊看一邊流淚，可能是終於找到同一類人的激動。因此高三時我就想讀物理系，開始讀大一物理課本，但讀沒多久就知道必須先學微積分。

考大學時，我的第一志願是物理，做爲第二志願的數學則遲疑了很久。不過機緣巧合，我物理沒上，而數學系那年卻從40個學生擴張到60個名額，我是第50名進數學系。現在想起來，我的個性可能還是比較適合做數學。

翁 請說明在臺灣大學讀書的經驗

林 我真正開始懂數學，也許是考上大學的那個暑假。我那時去聽臺大暑期班，上了一次課後微積分就全懂了，再也沒去上課。那天老師只講了階梯函數的積分，下課後我自問如何用公式做，發現沒有公式後，我開始思考函數積分到底是什麼意思？爲了這個問題，我在臺大校園繞了三、四個小時，突然之間，豁然開朗。於是整個微積分我就抓到訣竅了，這是我人生第二次閃現數學靈光的體驗。



另一次經驗，是在高中讀矩陣和向量時。高中課本沒講這是線性代數，結果進臺大後，我才發現線性代數的內容，我在高中已經發展過了，就只差不知道專有名詞而已。所以大一時，我覺得非常高興，覺得自己跟數學融合在一起。

因為臺大老師上課比較慢，我不太能適應上課，幸好系上學風很自由，只要考試能過，就可以不用上課。所以從大一開始，我幾乎都在圖書館讀書。當時自己讀高微，其中最難的定理是隱函數和反函數定理。我花了很多時間，把當時館裡有關的書，幾乎都讀過了。結果我都不滿意，所以又花很多時間去理解，一直到大二才豁然貫通，整個感覺好像重生，眼界提升到另一個層次。讀數學不只要理解紙面上的邏輯，更要思考背後的含意，這是成為數學家的重要特質。我在大二時不自覺走上這條路，這是我數學人生裡最重要的時期。

就這樣，我在臺大基本上是自學，也沒有什麼老師可以談。如果當時臺大已經是世界級的大學，我應該可以發展得非常快。結果我從大二到碩士班，足足在臺大浪費了四年時間。當然我大三還很用功，學習不同領域的數學，像是代數裡的群論、有限群表現論、迦羅瓦理論。我讀數學沒有偏好，愛在圖書館找書看，當時臺大數學研究中心來訪學者有時會留下講義，我常以講義主題為中心去找東西讀。

可是在大四，我突然想到一個問題：「我畢業以後要做什麼？」我完全不知道自己要什麼、能什麼？我並不喜歡當中學老師。而由於家境很窮，完全沒想過出國，根本不知道什麼是出國。即使有老師當面說我是他碰過最好的學生。但是竟然沒有老師跟我提過出國的可能。當時根本沒有老師覺得幫助學生是重要的事。就這樣在大四，我對數學的整個熱誠就冷卻了。

因為兵役問題我先讀碩士班。當時我讀了阿提雅/辛格指標定理（Atiyah-Singer Index Theorem），在當時這算是比較前沿的課

題。我自己把需要的數學讀一遍，像偏微分方程、代數幾何、K-理論，就連賀茨布魯赫（Friedrich Hirzebruch）的《代數幾何的拓樸方法》（Topological methods in algebraic geometry）等我都自己讀。不過我讀碩士時，已經沒將所有心神放在數學，我當時有一個大疑問：「到底什麼是數學研究？」我完全不能從周遭的學習環境得到答案。所以碩士畢業時，我對數學已經死心。回想起來，這主要是不知道這些數學有什麼用。例如剛唸代數拓樸覺得很新鮮很有意思，但較深入後，往往不知道這些知識的重要性。

所以出國前，我最主要的問題不是讀書，而是身旁沒有人物典範可以學習。

翁 請你談一下在美國留學時的研究或生活體驗。

林 剛剛到美國時，我對數學已經沒有十分的熱誠。但在紐約大學，我看到許多人努力做研究，尤其是我的老師尼倫柏格（Louis Nirenberg），他年紀很大還很努力。所以自然對什麼是數學研究的問題有了答案，根本不需要特別交談，就能領會。

不過對我來說，到美國留學的意義不在數學。我的博士論文不到三個月就做完了，雖然很多人包括我的老師，都讚揚這個結果，但我自己並不覺得那是很了不起的事情。我當時想的是我人生中更重要的事。

我到美國不久，就慢慢接觸到在臺灣課本上沒看過的臺灣歷史。特別是國民黨被迫遷臺的這段歷史，國民黨尤其是蔣介石在中國統治期間的所做所為，對我衝擊很大，留下很大的疑問。各種蔣介石很不一樣的評價，告訴我在國民黨統治下的臺灣是一個非常偽善的社會。我要如何在這麼偽善的社會中繼續生活，同時當一個真誠的人？當然，我可以選擇不回臺灣，但在紐約追尋臺灣歷史的同時，我也同時慢慢了解過去臺灣的文化以及民主發展，其中有各種令人感動的義行，尤其是鍾理和的小說與人對我影響最大。我發現原來我竟然這麼不熟悉臺灣這塊土地。因此希望回

臺灣，藉由接觸這塊土地的事物，重新塑造我的意識。這樣的念頭隨著留在美國的時間越久日益增強。我知道我必須回臺灣。

我在美國受到的第二個重要影響是音樂，紐約有很多播放古典音樂的電台，那是我第一次聽到古典音樂。尤其是貝多芬，他的音樂非常震撼我，讓我的音樂本能慢慢覺醒。我雖然沒有很好的音感，但音樂的內涵一聽就能感受，看著山水風景，腦海會自動浮現旋律與變奏。我一直認為自己可以成為音樂家，可惜小時候沒有發展的環境。我在音樂裡，體認到如何從音樂來理解並發展自己的情感，平衡自己的理性及感性，這對我的一生中極為重要，包括數學研究在內。如果說能讓我在臺灣這樣的社會，保持真我，毫不妥協，卻又能平靜生活下去，應該就只有音樂了。

翁 讓我們談談你回國後的變化，我記得你曾經說過中正大學是你人生的重要時期。

林 我在1987年回到臺大時，心靈並不安定，不知道要不要繼續做數學。雖然我在美國的數學研究評價很高，但是內心並沒有做數學的動機。那時關心的是臺灣，當時因為蔣經國過世後，整個臺灣社會風起雲湧，變化很大。不管高不高興，可以聽到各種聲音，讓我內心很激動。我當時只想到臺灣各地走走，思考做什麼對臺灣最好，這是我當時唯一關注的問題。

慢慢我認識到，臺灣並不會因為經濟成長，就受到其他國家的尊重。但是如果在學術上有真正的成就，反而能提高臺灣的能見度，我想這是我真正能做而且可以做得到的事。

所以1990年鄭國順找到新成立的中正大學時，我很快就答應了。當然要去中正大學，我內心很掙扎，因為去紀念蔣介石的學校，感覺很荒謬。後來說服自己不要太在乎表面，我當時只想離開紛雜的臺北，找個安靜的地方，做幾年數學。現在回顧，這應

該是我這輩子最正確的決定之一。那是我36歲後的事情。

在中正大學，我最初做的是純量曲率方程（scalar curvature equation），特別是其奇點的冒泡現象（bubbling phenomenon）。當時，卡法累利（Luis Caffarelli）以及孫理察（Richard Schoen）對這個方程已經做了一些重要工作，但是並不清楚這類冒泡現象。對我而言，這是一個很自然的選擇。因為我的博士論文做的是局部等距嵌入（local isometric embedding）的問題，雖然需要費心打造適用的工具，但基本牽涉到的是局部納許/牟瑟型（Nash-Moser type）的隱函數定理，相對比較簡單，而我期待的正是比較全域性的問題。

偏微分方程的基本理論在1980年代已經大致完備，重點是如何掌握這些工具，發展深刻的技巧來解決重要的問題。做偏微分方程最重要的是先驗估計（a priori estimate），我的偏微分方程研究，比較偏重研究解的性質，因此估計與唯一性問題是我的工作核心。過去20年，我證明了許多唯一性定理，我是在偏微分方程的唯一性問題做出最多成果的數學家。但我很少以唯一性為論文的中心主題，我的論文多半都是唯一性的重要應用。

關於冒泡現象，我主要研究的是在冒泡區域裡的解性質。大多數數學家使用弱收斂的觀點來描述解，缺點是非常不精確，而我做的則是逐點估計。結果在最一般的情況下，我證明這類冒泡解都有一種球型哈納克不等式（spherical Harnack inequality），使得解愈來愈像一個徑向（radial）函數。我稱這種一般現象為「集縮導致對稱」（concentration induced symmetry）。另外，我應該是第一個理解豐泡（bubbling tower）可能性的人，其中每一層的泡高和下一層的泡高有特定的關係。

這個問題真的夠難，有很多現象需要釐清。做了這個問題，我對數學有了更深的認識。我的博士論文



做得太快，因此之前並不能體會做困難問題的心路歷程。做這個問題時，我沒有採用別人的角度，所有思路都必須回到最基本的情況，直接發展工具來處理。在過程中，有很多想法剛開始根本沒有辦法嚴格證明。但我在慢慢思考的歷程中，已經建立很好的直覺，可以建立很多進一步的猜想。形成猜想是做數學的自然過程，如果想得夠深，對比較困難複雜的現象，就會提出猜想。很幸運的是，做這個問題時很多未驗證的猜想，後來證明都是對的。這個問題是我真正做數學的第一個經驗，花了六、七年時間。由此，我體會到怎樣判斷好的數學問題。

翁 我感覺到你回臺大這段時間做的數學，好像和以前不同。以前很難想像你會讀這麼多志村五郎（Goro Shimura）的書。

林 中正大學是我數學生涯的一個轉折點，2001年是另一個轉折點，這次讓我體認到數學對我的人生意義，知道我所追求的人生智慧，並不只是解決困難的數學問題而已。也許可以這樣說，數學研究是我追求人生智慧的重要工具。至於要選擇或提出怎樣的數學問題，則是人生智慧的體現。

2001年我接受教育部委託，修改被「建構數學」影響的九年一貫暫綱，兩年後開始撰寫國中、小的數學部編本。這事攸關臺灣數學教育的未來，我無法拒絕。但我也知道接下這個責任，勢必嚴重影響我的數學研究。這從我2003-2008的文章發表紀錄就可以看出。

讓我稍微評論一下臺灣的（數學）教育隱憂。以建構數學為例，任何數學家不可能反對數學的建構觀點，因為這就是數學的本質，但是數學家不會期待其他人以這種方式思考，尤其是國小階段這麼簡單的「數學」。從哲學角度來看，建構的想法或許沒有什麼不對；但從教育角度看，貿然施行是絕對錯誤的。因為好的想法，在實踐中不一定有好的結果。一旦牽涉的是全國教育政策，尤其要審慎。

在過去20年中，教育部將所有師範型學校改為綜合性大學，使得一些教育重要而基本的常識，盪然無存。這是目前所有教育改革的隱憂，沒有實質的常識，如何會有好的改革成效。最近PISA試題的爭議，也反映了類似的問題。臺灣的數學教育走入研究這條路，而錯置了研究和現實教育中的分際。這種教育界的現狀對臺灣來說是非常不幸的。

回到你提到的轉變，對我來講是很自然的。2003年，在我和陳俊全的CPAM論文裡，計算了平均場方程（mean field equation）的拓樸度數，之後二、三年也解決了有奇點的情況（但論文直到今年才寫完），於是這類方程在非臨界參數的情況已全部做完。接下來要處理的是臨界參數的情況。

由於想理解幾何如何牽涉其中，我選擇研究比較簡單但有重要應用的情況，幸運的是這同時也是可積系統（但不能應用KdV可積系統的已知方法）。不久我發現這和環面上的格林函數有關，證明了任何環面的格林函數的臨界點不是3個就是5個。我很高興，一方面因為這是環面幾何裡很基本卻未知的性質；另一方面，這是運用非線性偏微分方程來解線性的問題（這樣的模式不斷出現在我最近的研究中）。這大概是2005年，是我和王金龍的合作成果，一直到2010年才在 *Annals of Mathematics* 發表。

2010年，我結束數學教育的工作後，才有時間思考後續的問題，然後就發現這類問題和代數幾何的超橢圓曲線（hyperelliptic curve）、其他代數方程、以及模形式（modular form）有關。目前，我們可以用代數幾何或模形式來解一些平均場方程的問題，反過來，也能證明一些模形式的結果（或一些橢圓函數的不等式）。由於只是開始，還不知如何應用，相信到方程組如戶田系統（Toda system）時，將看出更多的關聯。

思考這些問題還牽涉到其他的數學領域。處理這類問題的一種常用方式，是將它化歸成

複變數的常微分方程，其中的奇點牽涉到所謂單值資料（monodromy data），如果考慮等單值（isomonodromy）的問題，就會對應到特定的偏微分方程。我2008開始和蓋斯特（Martin Guest）等人合作，研究某些偏微分方程，在處理等單值問題時，出現了如何計算斯托克斯矩陣（Stokes matrix）的相關問題，在歷史上這不是簡單的問題。結果我們問題對應的斯托克斯矩陣分量都是整數，這個特別現象，可能跟量子上同調（quantum cohomology）或奇點理論有關。

這就是目前我想做的問題，預計要花很多時間，因為這些問題都非常不簡單，牽涉到偏微方程、黎曼/希爾伯特問題（Riemann-Hilbert problem）、模形式理論，我想看看能不能做出一個好的結合。

翁 要不要談談你的數學或者研究的一些反思，順便給年輕朋友一些建議。

林 對我來說，有兩個代表人物影響了我的人生：鍾理和是臺灣文化的精神領袖，而貝多芬是另一個精神領袖。他們都是不妥協、一生奮鬥的人。我也認為人生沒有奮鬥就沒有意義。

我做數學，一方面想解決數學問題，另一方面也希望透過對數學問題的體會、處理數學的方法，發展看待世情的角度，希望最後可以達到看盡天下的豁然智慧。數學是我人生非常執著的一部份，放眼世界可能也很稀有。數學不只是聰明才情的遊

林長壽重要著作

- The local isometric embedding in \mathbf{R}^3 of 2-dimensional Riemannian manifolds with nonnegative curvature. *JDG* 21 (1985) no.2.
- Estimates of the scalar curvature equation via the method of moving planes. III. *Comm. Pure Appl. Math.* 53 (2000) no.5.
- Topological degree for a mean field equation on Riemann surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.* 56 (2003) no. 12. (與陳俊全合作)
- Elliptic functions, Green functions and the mean field equations on tori. *Ann. of Math.* 172 (2010) no.2. (與王金龍合作)

戲，我相信數學還有更深的意義。理性是我終生的信仰，全來自我對數學的領會。我在六十幾歲回顧自己對世界甚至宗教的認識，最根本的就是理性。

對於想要從事數學研究的年輕人，我的忠告是：首先，讀數學比讀大部分科學都辛苦，如果你有天分和抱負，非常歡迎你讀數學，不然就算了。抱負是一件很重要的事。

其次，如果你有決心，就一定要好好用功，不要只想成為數學家而已，而要成為好的數學家。而且也要做有用的人，隨時要讓自己準備好，萬一有需要，你就可以去做並且做好該做的事。成為好數學家的另外一面，就是成為有用的人。

最後，好的數學家是沒辦法教出來的，只有自己的決心，才能把自己變成一個好的數學家，沒有其他的方法。☞

2013/3/19 臺大數學科學中心

訪問人 翁秉仁（臺灣大學數學系）
馮肅媛（本刊助理）