

三位諾貝爾數學家

作者 王善平

始於1901年的諾貝爾獎包括有物理獎、化學獎、醫學生理獎、文學獎與和平獎。1968年，瑞典中央銀行增設了諾貝爾經濟學獎。諾貝爾獎因其增進人類福祉的宗旨，巨額的獎金和超越國界的國際性而贏得全世界的尊崇。尤其是它在科學領域的獎項，代表了一段時期內最高的科學成就，因而成為科學家夢寐以求的學術榮譽。

數學在人類文明和科學的發展進程中一直起著非常重要、有時甚至是關鍵的作用。然而，卻沒有諾貝爾數學獎。個中原因眾說紛紜，在此我們討論。我們只是要指出，諾貝爾獎並不排斥數學。事實上，有不少獲獎者本人就是數學家；尤其是諾貝爾經濟學獎，幾乎所有的獲獎者都是數理經濟或計量經濟學家——致力於研究和解決經濟問題的數學家。

這裡將介紹幾位典型的獲得過諾貝爾獎的數學家。

說起數學，人們的第一印象可能是眼花繚亂的符號和極度抽象的概念。然而，我們這裡所提到的數學大多並不高深，以致那些純粹數學家或許會不屑一顧。但我們故事的主人公正是運用這些數學，巧妙地解決了現實世界中的關鍵問題，從而顯著增進了人類福利，最後贏得了諾貝爾獎。確實，就科學服務於人類的目的來說，發現數學（即使是簡單的）在現實世界的重要應用與成功證明一個著名的數學定理同樣值得尊敬和讚賞。

什麼樣的人才夠資格被稱為數學家？在數學高度抽象發展的今天，也許會有很多人認為只有數學專業的博士才（勉強）夠得上這一稱號。按照此標準，這裡所介紹的有些人物算不上是數學家，因為他們可能連數學系本科都沒有讀過。但國際數學聯盟曾經規定，只要有兩篇及以上的論文被《數學評論》評論過，就可以被收入《世界數學家名錄》（參見[1-1]）。根據這個規定，這裡所介紹的人物都完全夠得上數學家的稱號。

作者簡介

上海《華東師範大學學報（自然科學版）》副主編，《數學與人文》編委。

柯馬克：創立電腦斷層掃描的數學理論

一

德國物理學家倫琴（Wilhelm Röntgen）在1895年宣佈發現了X射線，他因此獲得1901年首屆諾貝爾物理學獎。倫琴也許不曾想到，他的發現很快在醫學診斷領域得到了廣泛的應用。因為X射線具有強大的穿透能力，能夠輕易地通過人體。這使得醫生無需施用外科手術，就能窺探病人體內，從而做出準確診斷。

當X射線通過人體時，對於體內的不同組織，如肌肉、血管、骨骼、臟腑等，有不同的穿透率；體內病變的組織，如發炎或腫瘤，其X射線穿透率也與正常組織不同。所以如果讓人體置於X射線源與感應膠片之間，就能在膠片上留下體內組織的X射線投影像，醫生則可以根據影像來診斷病情。這就是傳統的X射線成像儀的工作原理。

然而，由傳統X射線成像儀所形成的人體內部縱向面的投影像，只包含了體內組織的二維結構資訊，它無法提供體內橫截面（斷層）上組織的情況。所以，雖然它對於診斷骨折或肺部感染之類的病情有很大幫助，但對於診斷腦部疾病或內臟腫瘤之類的疑難雜症卻無能為力。在很多診療場合，醫生非常需要獲得病人體內組織的斷層結構資訊。但只有切開身體，才能觀察到體內斷層，而這將不可避免地傷害病人，甚至危及生命。

20世紀70年代中期，在英國出現了一種神奇裝置，叫做「電腦斷層掃描」（Computer Assisted Tomography，簡稱CAT或CT）；它能夠在不損傷病人的情況下，提供人體從頭到腳各部位的斷層X射線圖像。利用CT，醫生可以輕而易舉地觀察到人體內部哪怕是微小的病變和病灶分布，能夠及早採取正確的治療措施，從而拯救了無數患者的生命。

1979年10月11日，諾貝爾的誕辰，位於瑞典首都斯德哥爾摩的卡洛琳醫學院宣佈，今年的諾貝爾醫學獎授予美國人柯馬克（Allan Cormack）和英國

人豪斯菲爾德（Godfrey Hounsfield），以表彰他們「發明了電腦斷層掃描技術」。卡洛琳醫學院的葛瑞茲（Torgny Greitz）教授在授獎發言中說[1-2]：「今年諾貝爾醫學及生理獎的兩位獲獎者都不是醫學專家，然而他們在醫學領域掀起了一場革命……他們所發明的電腦斷層掃描技術，使醫學如同進入了太空時代。」「沒有什麼醫學成就能夠像CT技術那樣，立即被廣泛接受並得到毫無保留的熱烈歡迎。」「柯馬克和豪斯菲爾德開創了醫學診斷的新時代……（他們的工作）正符合諾貝爾在其遺囑中有關『為人類作出最有益貢獻』的規定，沒有幾位諾貝爾醫學生理獎得主能在獲獎之時，就達到像他們那樣的符合程度。」[1-2]

二

柯馬克出生於南非的約翰尼斯堡市，父親是電信工程師，母親是教師。父母親都是第一次世界大戰前不久，從蘇格蘭來到南非的移民。柯馬克是家中三個孩子中最小的。這一家人總是隨著父親工作的變化而不停地搬遷；直到父親於1936年去世，他們才在開普敦市安頓下來。柯馬克的高中時代是在開普敦市的一所公立男子中學度過的，那時，他除了課餘積極參加辯論賽、打網球以及偶爾出演話劇外，還對天文學產生了濃厚的興趣。他如饑似渴地閱讀了大量的天文學科普著作，從中學習到許多數學和物理學知識。

不過，在當時天文學並不是一個養家糊口的好職業，所以柯馬克在考取開普敦大學以後，一開始還是追隨父親和哥哥的足跡，選擇了電氣工程專業；兩年後又改學物理學專業。1944年獲物理學學士學位，一年後獲晶體學碩士學位。他在大學時代的課餘愛好是登山和聽音樂。

從開普敦大學畢業後，1947年，柯馬克來到英國劍橋大學的卡文迪西實驗室做研究助理。在一次聽著名物理學家狄拉克關於量子力學的講座時，他邂逅美國姑娘西維（Barbara Seavey），遂墜入愛河。一年半以後，兩人準備結婚。於是，柯馬克中斷了在

卡文迪西實驗室的研究工作，帶著未婚妻回到了南非開普敦大學物理系任講師。

1956年，柯馬克獲得第一個學術休假期，他選擇跟隨妻子來到美國，在哈佛大學做迴旋加速器實驗。1957年秋，他接受了美國塔夫茲大學（Tufts University）的邀請，任該校的物理系教授。他在這所大學一直幹到1995年退休。其間，他於1966年加入美國籍，1968-1976年任物理系主任。在塔夫茲大學的數十年中，他的主要學術興趣是核子物理和粒子物理。而令他贏得諾貝爾獎的那些工作，只是他的業餘愛好。

三

1955年，還是開普敦大學物理學講師的柯馬克接受到一項任務，要為南非一家醫院的放射科監測腫瘤患者接受放射性同位素治療的劑量。接受治療的患者體內的同位素劑量及其分布應該受到嚴格的控制：如果同位素劑量太小，將達不到理想的療效；劑量太大，則會危害患者的健康。同時，同位素的濃度應在腫瘤組織內較高，在健康組織內盡可能低。柯馬克於是想，是否可以通過體外測量同位素發出的射線，來確定其在體內的濃度分布，以幫助醫師確定最佳治療方法？他很快發現這其實是一個數學問題，而且解決了這一問題可以有其他種種應用。他終於在1963年發表了題名為〈函數的線積分表示及其放射學應用〉的開創性論文[1-4]。在該文的開頭提到了所研究問題的解答有三個應用：（1）確定二維區域內X射線吸收率的變化；（2）確定物質中正子湮滅的非均勻分布；以及（3）確定恆定成分物質中的密度變化。但隻字未提到關於人體斷層掃描的應用——當時他根本沒有想到。

柯馬克的文章發表後，在好幾年內無人理會。直到1970年代初期，由於電腦的迅速發展使得大規模數值運算成為可能；英國電腦工程師豪斯菲爾德製造出了CT第一台原型機，更多的學者開始研究CT的工作原理；這時人們才注意到，柯馬克早在10年前就

已經建立好了CT的完整理論。順便提一下，後來與柯馬克分享諾貝爾獎的豪斯菲爾德，是在二次大戰中的軍隊裡學習了電子技術。他甚至未曾獲得過正規大學的畢業文憑。

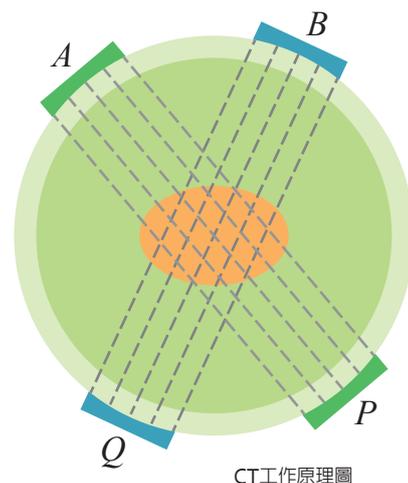
四

CT是如何做到在不損傷病人的情況下獲得病人體內橫斷層的圖像的？如前所述，人體內部不同的組織具有不同的X射線吸收率（ $=1 - \text{穿透率}$ ）。所以，如果能夠知道人體內X射線吸收率的分布，就可以重建體內組織的圖像了。這正是CT所要做的。

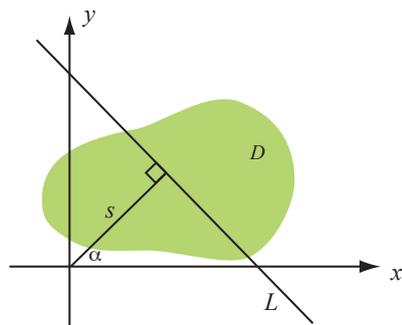
如圖所示，一束X射線從一定點A穿過人體，到達P點。由於在途中經受不同物質的吸收，所以在P點接收到的X射線的強度較在A點出發時有了一定的衰減，其衰減程度與AP間物質的平均X射線吸收率有關。從而，通過比較和計算，可以求出從A點到P點的平均X射線吸收率。令X射線源沿著圓周從A點移動到B點，發射的X射線將從B點穿過人體達到Q點。同樣道理，可以計算求出從B點到Q點的平均X射線吸收率。於是，令X射線源沿圓周移動一圈，以不同的角度分別發射X射線穿透人體，就得到了無數的不同角度直線上的平均X射線吸收率。

從數學的角度來看，一根直線上的X射線平均吸收率就相當於在該直線上對於吸收率函數的積分值。因此，如果能根據函數在直線上的積分值來求出函數在各點的值，那麼就可以實現CT的功能了。而這正是柯馬克在1963年的那篇論文中所完成的工作。

其實，早在1917年時，奧地利數學家拉東（Johann Radon, 1887-1956）就發表過一篇論



CT工作原理圖



文，其中提出，對於一個定義在一定區域上的分布函數 f ，如何從該函數在以不同角度穿過該區域的直線上的積分值，來求得該函數的變換方法。這個方法後來被稱為拉東變換（Radon transform）[1-5]。

設定義在平面區域 D 上的函數 $f(x, y)$ ，穿過 D 和原點距離為 s 的一根直線 L 的參數方程為 $(x, y) = t(\sin \alpha, -\cos \alpha) + s(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ，其中 α 是 L 的法向量與 x 軸的夾角。則 f 的拉東變換為

$$R[f](\alpha, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(t), y(t)) dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \sin \alpha + s \cos \alpha, -t \cos \alpha + s \sin \alpha) dt$$

則 f 可通過對 $R[f]$ 進行逆變換得到。

柯馬克的工作其實就是重新發現拉東變換，並把它用於放射醫學問題。

CT技術的數學理論有著廣泛的應用。例如，當用 γ 射線、質子或正子帶替X射線時，就相應得到了 γ 射線、質子或正子的CT。這些CT圖像有著不同於X射線圖像的意義。比如說，正子CT（PET）能夠提供病人體內新陳代謝水平的分布圖像。此外，該理論還可以用於其他領域，如測量海水溫度分布、觀察天體運動，等等。近幾年有報導，CT技術被用於木材的無破壞內部檢測，它將大大提高木材的利用率並降低生產成本。

豪普曼：直接測定晶體結構的數學方法

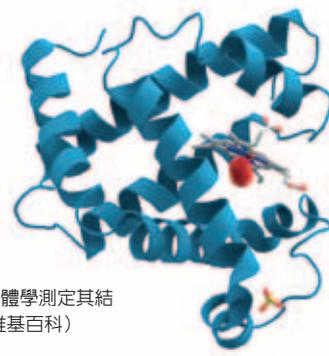
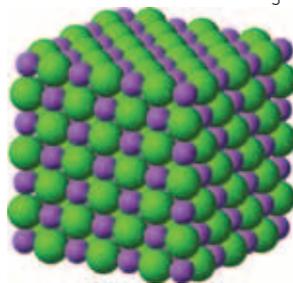
1912年，德國科學家勞厄（Max von Laue, 1879-1960）發現X射線在穿過晶體結構物質時會發生繞射。這一發現在科學界引起轟動，因為它一下子解決了兩個懸而未決的大問題：第一，證實了X射線是電磁波，即也是一種光線，只是波長極

短，因而人眼看不見；第二，揭示了晶體的微觀結構，因為光線只有在繞過間隙與波長相近的物體時，才會產生繞射，所以這表明X射線的波長與晶體點陣中相鄰質點的間隔（即鍵長）具有相同的數量級：大約在 10^{-11} ~ 10^{-9} 米之間。勞厄還給出了計算晶體點陣繞射的數學公式。1914年，勞厄因此獲得了諾貝爾物理學獎。

在獲悉勞厄的工作之後，英國科學家布拉格父子（William H. Bragg; William L. Bragg）立即認識到，X射線是窺探晶體結構的理想工具。於是開始把X射線對準了不同的晶體，很快就獲得了氯化鈉（食鹽）、氯化鉀、氟化鋰、二硫化鐵、二氟化鈣、鑽石等一大類鹼金屬鹵化物和單質晶體的結構資訊。他們改進勞厄公式，推出了準確描述X射線波長、晶體點陣間距與繞射角度關係的簡明公式。布拉格父子因此同獲1915年諾貝爾物理學獎，傳為科學史上一段佳話。

勞厄和布拉格父子的的工作開創了X射線晶體學。

氯化鈉（食鹽）是結構最簡單的一種離子晶體，由氯負離子（ Cl^- ）和鈉正離子（ Na^+ ）構成，如圖所示。綠色為氯離子，紫色為鈉離子，形成立方晶體。（維基百科）



肌紅蛋白分子結構圖。比魯茲與肯祖魯因為用X射線晶體學測定其結構，而獲得諾貝爾化學獎。（維基百科）

然而，用X射線測定結構較複雜的晶體，特別是在生物學和生理學上有重要意義的有機分子晶體，這在當時絕非易事，需要科學家付出艱巨的勞動。

在小布拉格的支持和幫助下，英國劍橋大學的科學家比魯茲（Max Perutz）與肯祖魯（John Kendrew）於1959年分別測定出馬血紅素和肌紅素的結構。這些都是球蛋白，是分子結構最簡

單的一種蛋白晶體（見圖）。他們因此獲得了1962年諾貝爾化學獎。

英國牛津大學的女科學家霍奇金（Dorothy Hodgkin）花了四年時間，於1946年測定了青黴素的結構，使得這種曾經比黃金還貴的抗生素能夠以較低成本大規模生產，還令科學家能夠發現和培養結構相近的其他抗生素，從而拯救了無數病人的生命。霍奇金又從1948年開始測定維生素B12的結構，經過八年不懈的努力，於1956年獲得成功。由於霍奇金卓越的工作，她獲得了1964年的諾貝爾化學獎。

霍奇金、比魯茲和肯祖魯所測量那些晶體的結構其實不十分複雜，但她/他們為什麼要花費那麼多的年月才完成測量，並能獲得最高的科學獎賞？原來，按照當時科學家的認識水平，在X射線晶體繞射圖中，包含晶體結構的資訊不完全。因此，為了測定晶體的結構，不得不大量採用其他的物理化學方法，如根據原子的物理性質推斷它們的連接方式，將待測物質分解或與其他物質組成新的化合物以獲得關於結構的補充資訊，等等。每測量一種晶體，就好像攀爬一座高聳的山峰，需要科學家集中全部的才智、勇氣和毅力，經過多少次嘗試和失敗，才有可能獲得成功。所以霍奇金和比魯茲等人獲得諾貝爾獎屬實至名歸。

然後，美國數學家豪普曼（Herbert Hauptman）與物理化學家卡爾（Jerome Karle）連袂登場了，他們使事情一下子變得簡單起來。

二

豪普曼1917年2月14日出生於美國的紐約市。父親是印刷工人，母親是紐約一家著名百貨商店的女帽部售貨員。他們有三個兒子，豪普曼排行老大。豪普曼從小就喜歡數學和自然科學。他於1937年從紐約城市學院數學專業畢業，獲學士學位；1939年獲哥倫比亞大學數學專業碩士學位。1940年，在美國人口普查局任職；同年11月

10日，與希翠奈爾（Edith Citrynell）結婚。第二次世界大戰的戰火燃燒到美國後，豪普曼應徵入伍；曾任海軍少尉，負責天氣預報；又去菲律賓，做消防官；最後加入美國空軍，擔任雷達教官。戰爭結束後，豪普曼於1947年進入美國海軍研究實驗室，在那裡遇到了卡爾，兩人於是開始了長期的、卓有成效的X射線晶體繞射研究的合作。

豪普曼和卡爾認為，可以從X射線晶體繞射圖中直接獲取晶體結構的完全資訊，從而不必藉助於其他的物理和化學方法。他們的想法與當時的流行看法不符，因此引起不少爭議，不斷地受到懷疑和反對，許多人認為他們在浪費時間。但他們不為所動，堅持研究。1953年，他們聯名發表了題為《相位問題的解》（Solution of the Phase Problem）的專著（參見[2-1]），其中描述了後來被稱為「直接法」的主要思想，讓他們在30年後贏得諾貝爾獎。

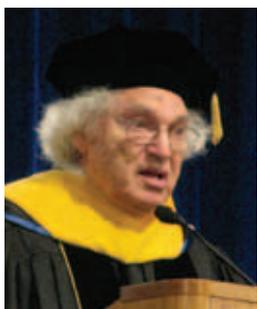
豪普曼於1955年獲馬里蘭大學數學專業的博士學位。當時他一邊做研究，一邊讀博士，還要照看3歲大的女兒。他把這三件事都做得很出色。1970年，豪普曼離開工作了20多年的海軍研究實驗室，來到水牛城醫學基金會，任晶體組研究主任。

豪普曼並非畢業於名牌大學，但由於他那種永不放棄的精神和勤奮工作的態度，終於做出了卓越的科學貢獻。

三

為了更好地理解霍普曼和卡爾的工作，我們來考察一下晶體的量子力學模型。

量子力學是一種能夠精確描述微觀物質狀態和行為的現代物理學理論，由丹麥人波耳（Niels Bohr）和德國人海森堡（Werner Heisenberg）等一批物理學家在20世紀1920年代創立。根據量子力學，電子按一定的機率分布出現在原子核周圍，形成電子雲。而晶體內連接相鄰原子的化學鍵則由有關的電子機率分布函數決定。由於晶體是由完全相同的平行六面體晶胞排列而成的，所以那些電子機率分布函

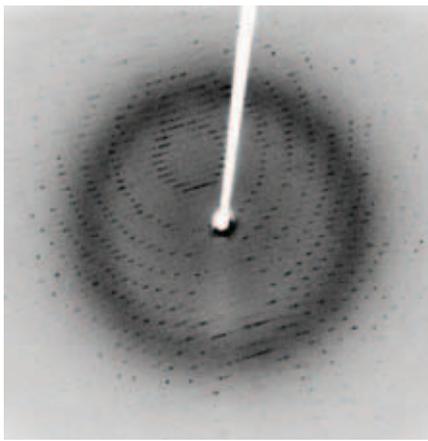


豪普曼（維基百科）

數都是三維的週期函數，因而可以用三維傅立葉級數來表示。

傅立葉級數理論由19世紀法國數學家傅立葉（Joseph Fourier）為研究熱傳導問題而創立。其核心思想是用正弦和餘弦的三角函數的級數來表示所有的週期函數。

晶體內電子機率分布函數的每項傅立葉級數的係數被稱為結構因子，它們是複數。顯然，晶體的結構由這些結構因子唯一確定。當X射線通過晶體時，產生繞射，並在前方的感光膠片上形成繞射圖像（見圖）。



產生的繞射圖像照片（維基百科）

在一般情況下，一個晶體的X射線繞射圖像中可以出現數千條甚至

上萬條繞射條紋。可以證明，這些繞射條紋完全確定了晶體結構因子的「大小」（即這些複數的絕對值），但不能確定它們的「相位」（即複數的幅角）。因此，當時的科學家相信，由於X射線繞射圖中缺失了晶體結構因子的相位資訊，所以必須使用其他的輔助方法，才能完全測定晶體的結構。

然而，豪普曼和卡爾經過多年的探索，發現情況並非如此。利用傅立葉級數的變換性質，並根據電子密度函數總是非負的、在原子的位置上取最大值等條件，可以把晶體的結構因子表示成晶體內原子的位置向量函數。由於一個待測晶體的晶胞內通常有數十個或上百個原子，一個三維位置向量有三個分量，所以這些函數一般含有兩三百個未知數。而X射線每一條繞射條紋就可以決定一個關於這些位置向量的方程，並且至少有數千條這樣的繞射條紋，所以得到了關於數百個變數的數千個方程。由於方程個數遠遠多於未

知量的個數，這說明在X射線的繞射圖中包含了晶體內原子位置的完全資訊，因而也包含了晶體結構的完整資訊，從而推翻了當時流行的論斷。

當然，由於這些方程都是非線性的，所以求解它們十分困難。豪普曼和卡爾運用機率統計、群論和代數學的知識，並藉助於電腦，終於建立起求解這些方程的一整套方法。人們稱這套方法為「直接法」（Direct Method），因為它無需藉助於其他物理或化學的輔助方法，可以通過X射線的繞射直接測定晶體的結構。有了這套方法，如今一個普通的大學生就能輕鬆算出霍奇金和比魯茲等人當年花費九牛二虎之力才能得到的結果。

四

1985年10月15日，瑞典皇家科學院宣佈，這一年的諾貝爾化學獎授予豪普曼和卡爾，「以表彰他們因創立測定晶體結構的直接法而取得的傑出成就」（參見[2-2]）。

瑞典皇家科學院的林奎斯特（Ingvar Lindqvist）教授在授獎發言中說道：「此次諾貝爾化學獎授予了數學家豪普曼和物理化學家卡爾……由於他們的想像力和創造性，使得人們測定通常晶體結構時不再需要想像力和創造性。」「X射線測定晶體結構的直接法為化學家更快更深入地研究分子結構以及化學反應提供了有效的工具。」

如今，X射線晶體學已經是確定生物大分子，尤其是蛋白質和核酸結構的主要方法。被認為包含了生命全部遺傳信息的DNA分子的雙螺旋結構就是通過晶體學實驗資料發現的。目前，全世界的生物學家正在合作建設網上蛋白質資料庫（Protein Data Bank, PDB；網址<http://www.rcsb.org>），將已測明結構的蛋白質和其他生物大分子的資料供人們免費查詢。截至2009年9月，該資料庫已包含了6萬多種蛋白質和核酸等分子的結構資訊，其中85%以上是通過X射線繞射方法測定的。



納許、澤爾滕與哈薩尼：發展多人對局理論

一

「世事如棋」，這句古語恰當地形容了人類在社會活動中彼此爭鬥的一面，這種爭鬥在軍事、政治、外交、經濟、體育競技等領域尤為突出。爭鬥的參與者可以是個人、團體和國家，爭鬥對手可以是雙方或者多方。雖然爭鬥的內容和形式千變萬化，但都與賭博和下棋有相通之處，那就是要遵守一定的規則並講究策略制勝，故常以「對局」或「博弈」來代指人類之間的各種爭鬥。所謂策略就是對局者根據自己和對手的情況以及當前的局面，為獲取自身利益而採取的行動步驟。以策略制勝的一個典型例子就是發生在戰國時代的「田忌賽馬」故事。

1944年，美籍匈牙利裔數學家馮諾曼（John von Neumann）與奧地利經濟學家摩根斯坦（Oskar Morgenstern）合作發表了長篇巨著《對局論與經濟行為》（Theory of Games and Economic Behavior），標誌著現代對局論的誕生*。該書的主要成就包括：

（1）明確了對局論是一門運用數學方法研究對局者策略之間相互作用的學科。

（2）提出了「混合策略」的概念，它是通常策略（「純策略」）的機率組合；此概念揭示了對局者為迷惑對手以不確定方式出牌的行為；另一方面，所有的混合策略構成了歐氏空間中的「凸集」，從而能夠運用分析和拓樸等數學工具進行有效處理。

（3）提出了「零和」（zero-sum）對局的概念，即對局者任何一方所「得」必然會引起對手之「失」，得失總相等；包括體育競技在內的大部分對局都可歸結為「零和對局」。

（4）運用「最小最大準則」（minimax principle）證明了，在兩人零和對局中，存在一個最優的策略組合，它使對局者雙方均獲得最低利益保障：任何一方若要偏離此策略，都將減少自己收益並增加對手收益。這一結果被稱為「最小最大定理」，

是該書的核心內容。

（5）研究了不同情況下的「多人對局」，特別是有若干參加者結成聯盟的多人對局，得出一些結論，但並沒有得到如「兩人零和對局」中那樣深刻的定理。

憑藉馮諾曼本人作為20世紀傑出數學家的聲望，《對局論與經濟行為》的出版曾在當時引起強烈的反響。人們期望它將把經濟學變成像物理學那樣的科學，能夠用馮諾曼提供的數學工具解決其中大部分問題。然而事實是，面對錯綜複雜的各種經濟局面，以「最小最大定理」為核心的對局論並無多大作為。

蘭德公司（RAND Corporation）是美國最著名的民間智庫機構，它對對局論極為推崇。1952-1954年間，蘭德公司曾經進行了一系列實驗研究，以檢驗馮諾曼的多人對局理論，結果並沒有發現該理論有什麼實際作用。

直到由另一位傳奇數學家——納許，在不經意之間完成了新的理論突破，才為對局論真正開闢了一片廣闊的應用新天地。

二

納許（John Nash）出生於美國西維吉尼亞州的布魯菲爾德；父親是參加過第一次世界大戰的老兵，後來退伍在一家電力公司當工程師；母親在結婚前是一所學校的英語和拉丁語教師。納許是長子，下面還有一個小兩歲半的妹妹，名叫瑪莎（Martha）。瑪莎後來回憶他哥哥小時候的情形道：「喬尼總是與眾不同，做事總要按自己的一套方法。父母親知道這一點，也知道他很聰明。母親堅持要我把他拉進我的朋友圈裡，而我並不太願意把這位有點怪怪的哥哥介紹給大家。」（參見[3-1]）

納許在寬鬆的家庭環境中受到良好的教育。還在上幼稚園的時候，父母親就給他買了一套康普頓圖像百科全書，他從中學習了許多知識。他還閱讀了自己家以及外祖母家裡的許多藏書。13歲時，開始在自己的房間裡做科學實驗。

* 對局論亦可譯為博弈論。

名詞解釋 **最小最大準則**：對局者每步行動都是試圖從最壞的局面中找出最好的結果來，這個最壞局面是由於其對手在上一步行動中採用同樣的準則而造成的。

上中學時，納許看了貝爾的名著《大數學家》（Men of Mathematics），首次激發起他對數學的興趣。當讀到其中關於費馬的故事，他就自己嘗試證明其中提到的費馬小定理並獲得成功（[3-3]）。

納許曾經想成爲像父親那樣的電氣工程師，但他後來贏得全額獎學金，來到匹茲堡的卡內基理工學院學習化學。因爲不喜歡做機械製圖和化學定量分析，他又聽從了數學老師的建議，改學數學專業。與此同時，他還選修了「國際經濟」的課程，這也是他後來對經濟領域中的對局論產生興趣的原因之一。1948年，納許以優異的學習成績，破格同時獲得學士和碩士學位；並申請到獎學金，去普林斯頓大學攻讀博士學位。

被譽爲當代「世界數學中心」的普林斯頓高等研究院，就座落在普林斯頓大學旁，那時裡面雲集了愛因斯坦、哥德爾（Kurt Gödel）、懷爾（Hermann Weyl）、馮諾曼（John von Neumann）等頂級科學大師；更有陳省身、威伊（André Weil）、薛瓦雷（Claude Chevalley）等已嶄露頭角的數學新傑經常去那裡訪問和工作。納許在這如同天堂般的學術環境中，自由自在地大量汲取數學知識。短短數年中，納許就在代數幾何、微分幾何和微分方程這三大數學分支領域中分別取得重要研究成果，早早奠定了他作爲一流數學家的地位。特別是他證明了任意的黎曼流形都能嵌入歐幾里得空間中，解決了微分幾何中一個長期未解決的難題，在數學界引起一片驚奇。

在研究純數學之餘，納許喜歡思考各種稀奇古怪的問題。例如，他曾發現歐洲有四座城市的位置正好構成一個正方形。納許對於對局論更有一種特殊的喜愛，他曾經發明了一些棋類博弈，其中有一種在六邊形格子的菱形棋盤上進行，其下法類似於圍棋，普林斯頓大學的學生們稱它爲「納許棋」。

1949-1953年間，納許發表了四篇關於對局論的簡短論文（參見[3-2]），改變了對局論的發展方向。其中一篇論文只有一頁長，共28行，卻證明了一個極其重要的定理：

在任何一個多人有限對局中，至少存在這樣一個策略組合，使得對於每位對局者來說，只要其他對局者都不改變自己的策略，那麼他在該組合中的那個策略就是最優策略。

此定理是馮諾曼關於兩人對局「最小最大準則」的推廣，後來被稱爲「納許均衡定理」，而定理中所指的那個策略組合被稱爲「納許均衡點」（Nash equilibrium）。

另一篇論文研究「多人非合作對局」，即參加者只考慮各自的利益、彼此之間沒有任何同盟關係的對局，這是馮諾曼和摩根斯坦的著作所忽略的。納許運用他的均衡定理，證明了這種對局至少存在一個均衡點，並研究了這些均衡點集所具有的種種性質。

納許另兩篇論文研究「兩人合作非零和對局」，同樣獲得了馮諾曼和摩根斯坦沒有涉及的重要結果。

由於澤爾滕和哈薩尼在1960年代的工作，使人們認識到納許均衡理論的重要性（見以下介紹）。對局論實驗也表明：雖然一兩次嘗試不一定正好得到納許均衡點，但經過策略調整的多次嘗試一定會收斂於該點。現在，納許均衡理論已成爲廣泛研究經濟學和社會學問題的有效工具。人們甚至發現，該理論同樣可用於研究生物學競爭。

納許在1950年獲博士學位後，於次年受聘到麻省理工學院教數學。1957年，與出生於薩爾瓦多，畢業於麻省理工學院物理系的拉迪（Alicia Lardé）結婚。1959年，正當妻子懷孕時，納許因患偏執型精神分裂症而辭職。在以後的二十多年裡，疾病不時發作。他曾經想建立世界政府，又宣佈自己是南極的國王，還要爲抵禦外星人入侵而募集資金。

幸運的是，在家人無限的關愛和照顧下，他的身心後來竟奇跡般地逐漸康復，到了1980年代末，他甚至已能夠重新開始研究數學。

三

澤爾滕 (Reinhard Selten) 出生於德國的布列斯勞 (又名弗羅茨瓦夫, 二次大戰後歸屬波蘭)。因猶太人血統, 在二次世界大戰中被迫四處逃難而失學, 戰爭結束後才得以繼續念高中。1951-1957年, 在法蘭克福大學數學系學習, 獲得碩士和博士學位。後輾轉受聘多所德國大學, 任經濟學教授。

澤爾滕的主要貢獻在於完善了納許均衡理論, 並率先研究多階段動態策略作用。在1965年, 他首先明確指出, 納許均衡可能由於非理性行為而產生於策略樹的不可達處, 因而不可解。為消除非理性納許均衡點, 他引進了「子對局完善」(subgame perfection) 的概念, 其要點是排除那些僅僅是口頭威脅或訛詐, 實際上因代價太大而不可能實施的策略。隨後在1975年, 提出了「手顫」(trembling-hand) 的概念, 即允許對局者有發生錯誤的機率。在以上工作的基礎上, 他成功建立了寡頭壟斷市場的模式。

四

哈薩尼 (John Harsanyi) 出生於匈牙利的布達佩斯, 中學時代曾獲全國數學競賽第一名。他所就讀的路德教會中學是匈牙利最好的學校, 從這裡畢業的學生包括馮諾曼和數位諾貝爾獎得主。1950年底, 哈薩尼和女友設法逃往澳大利亞, 又輾轉到美國, 在史丹福大學師從著名數理經濟學者艾羅 (Kenneth Arrow) 攻讀經濟學博士學位。後長期擔任加利福尼亞大學伯克萊分校商學院經濟學教授, 直至1990年退休。

哈薩尼的學術成就在於, 找到了處理非完全資訊對局的方法, 從而確保納許均衡理論能夠用於解決大量的實際問題。

在一場對局中, 如果能夠瞭解到所有參加者的全部資訊, 就稱為「完全資訊對局」, 否則就稱為「不完全資訊對局」。納許均衡理論是建立在完全資訊對局的假設基礎上的, 在現實中, 棋類比賽等體育競技

屬於完全資訊對局。但在經濟和軍事等領域, 由於公司和軍事部門採取保密措施, 因此幾乎都是非完全資訊對局, 這就限制了納許均衡理論的應用。

1965-1969年, 哈薩尼受雇於美國軍備控制與裁軍署, 成為十人對局論專家小組中的成員。對局論專家們發現, 他們無法給美國與前蘇聯的裁軍談判提供有益的建議和幫助, 因為這是一場非完全資訊對局: 他們不瞭解蘇聯真正的軍事實力和政治意圖。於是, 哈薩尼試圖解決這一難題。他通過假設資訊不完全的對局者有不確定的幾種類型, 成功地把非完全資訊對局轉換成完全資訊對局, 這樣, 專家們就能夠將納許均衡理論運用於裁軍談判了。

哈薩尼的工作使納許均衡理論有了更廣泛的實用性, 特別是在經濟領域。

五

1994年, 正值馮諾曼和摩根斯坦的著作發表50周年之際, 納許、澤爾滕和哈薩尼因「在非合作對局均衡理論中開拓性貢獻」而分享了諾貝爾經濟學獎。瑞典皇家科學院的麥樂 (Karl-Göran Mäler) 教授在授獎發言中對納許說道: 「您的關於非合作對局均衡的分析以及其他的對局論研究工作, 對於近二十年經濟學理論的發展產生了深遠的影響」。對澤爾滕說道: 「您的關於完善對局的分析大大擴展了非合作對局理論的應用」。對哈薩尼說: 「您的關於非完全資訊對局的分析, 對於資訊經濟學極為重要」 [3-3]。



本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉

<http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php>

延伸閱讀

- + Devlin, Keith, A Nobel Formula。本文提供令一種諾貝爾數學家的看法。見《美國數學協會 (MAA) 網站》http://www.maa.org/devlin/devlin_11_97.html。
- + 《諾貝爾獎官方網站》<http://nobelprize.org>。