



1882年 費爾茲獎花落誰家

作者 格雷 Jeremy Gray
譯者 杜昇華、劉雲龍

四年一頒的費爾茲獎，是1936年才開始頒發的數學最高榮譽。如果回到1882年，誰能獲得這個至高榮譽呢？

重點摘要

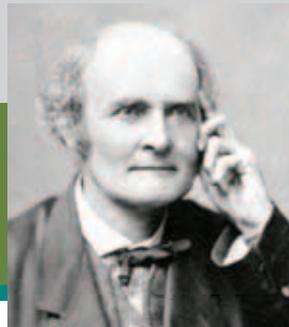
- / 作者帶領讀者回到當代，從評審委員會的組成開始，候選人的分析，一直到得獎人的猜測，讓人體會頒獎過程中的學術政治與歷史因素。
- / 現代知名的數學家如康托，在當時不能得獎。當時的得獎人，在今天重要性不再。從中可以領會數學研究和數學史研究的重要區別。

每隔四年，數學界就會選出最卓越的幾位年輕數學家，向其頒發費爾茲獎（Fields Medals）的榮耀。在最近的一次（1982），身為一個歷史學家，我開始揣想，一百年前誰會贏得費爾茲獎。由於獎章首次頒發是在1936年，這個問題純屬猜測，但是在我看來，我們仍可得到一些可能的答案。對此思考愈深，我就愈覺得可以明確指出，誰是當時最傑出的年輕數學家，而且同等重要的，是誰認為他們最傑出。我追隨著一個想像中的「費爾茲」——他也許是美國人，或者像真的費爾茲那樣，是個加拿大人——跟著他遊歷歐洲，觀察他如何與顯赫的老數學家交談，如何組成評審委員會，然後觀察他們如何做出艱難的決定。

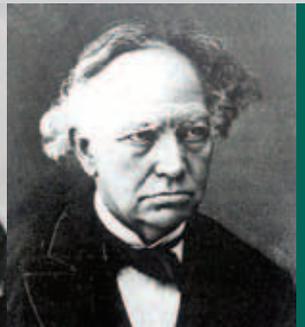
從中浮現的結果或許會令許多人訝異，而且我認為，當我們思考數學的推進動力，並且試圖解釋數學在當時的發展情形，思索這些結果也會大有裨益。在文章結尾，我還會再提出一兩個重要的論點。

不過，先讓我們回到1878年左右。當時，即使是熱情洋溢的約翰霍普金斯大學數學教授席維斯特（James J. Sylvester）也留不住費爾茲，他正準備從紐約前往英國。在當時的美國學界，數學的地位是極低的，費爾茲渴望能改變現狀，希望藉由設立一個數學的國際獎項，將年輕美國人的熱情引到這個學科上來。同樣也懷抱這一理想而來到美國的席維斯特，建議費爾茲到歐洲後，先去拜訪他的老朋友——劍橋大學的凱里（Arthur Cayley）。

THE 評審委員會
PRIZE
COMMITTEE



Cayley



Hermite

遴選委員會的組成

凱里（生於1821年）當時是劍橋的薩德勒講座（Sadleirian Professor）數學教授，同時也是包括柏林、波士頓、哥廷根和羅馬在內的12個外國科學院的院士。在1883年他當選英國科學促進會主席時，他的同事薩蒙（George Salmon）在賀詞中稱讚他「博覽群籍」、為人公正，並且精通多種語言，他寫道：「人們說普魯士將軍毛奇（Helmuth von Moltke），幾乎沒有不會說的歐洲語言，凱里也不遑多讓。」在一個大學不收女生的時代，他是婦女高等教育促進協會的主席。而且凱里當時仍然是一位非常活躍的數學家，單在1878年他就發表了40篇論文，其中許多是綜述性文章，目的在於向英國讀者引介歐洲大陸上最新的數學進展。他會是費爾茲獎委員會成員的理想人選。

費爾茲或許也會考慮H.J.S. 史密斯（Henry John Stephen Smith，生於1826年），牛津的薩維爾講座（Savilian Professor）幾何學教授。他是數論學家，撰寫了關於數論的優秀綜述著作，他的行政能力也倍受尊敬，還擔任皇家科學教育委員會的委員。然而，單單考慮到當時史密斯的健康狀況很差，我就認為費爾茲不會選他。他在1881年病篤，最後的公開活動是在牛津大學講演，支持把選舉權擴大到農民。1883年史密斯去世。史密斯在歐洲大陸並不出名，以致於法蘭西科學院鬧過這樣的笑話：他們在1881年宣佈大獎賽的論文題目是把整數分解為五個平方數之和的理論，但卻發現史密斯已經在1859年成功地解決了這個問題。更糟糕的是，等到他們宣佈得獎者是史密斯和年輕的閔可夫斯基（Hermann Minkowski）時，史密斯已經去世了。

凱里必定會建議費爾茲去巴黎，為他的委員會遴選法籍成員。人選將是厄爾密特（Charles Hermite，生於1822年）和貝特朗（Joseph Bertrand，生於1822年）二者之一。儘管貝特朗自從1874年以來一直是法蘭西科學院的終身祕書，同時也是綜合工科學校和法蘭西學院的教授，但是數學研究範圍更廣泛的厄爾密特會對凱里和費爾茲更有吸引

作者簡介

格雷畢業於牛津大學數學系，在華威克大學取得博士學位，是知名的數學史家，任教於英國公開大學數學學院多年。他是英國廣播公司（BBC）電視節目「數學的故事」的顧問。



Weierstrass



Kronecker



Brioschi



Schläfli



力。1856年，厄爾密特在一場天花重病後接受柯西（Augustin-Louis Cauchy）的勸說，皈依了天主教，從此成爲一位虔誠的教徒，但他在整個1870年代都未中斷與日爾曼數學家富克斯（Lazarus Fuchs）通信，所以他並未被普法戰爭所產生的民族主義思想所毒害。克萊恩（Felix Klein）在其《數學在十九世紀的發展》（*Entwicklung der Mathematik*）[1922,292]中稱厄爾密特「不具備領袖氣質」，但這得要和克萊恩對他自己的評價對照來看。在1870年代晚期，厄爾密特藉由拉梅方程（Lamé's equation）理論，率先探討如何將橢圓函數用於應用數學上。

離開巴黎之後，費爾茲無疑會去柏林，公認的數學世界中心。那裡有費爾茲不能不拜訪的三位教授：庫默爾（Ernst Eduard Kummer，生於1810年）、克羅涅可（Leopold Kronecker，生於1823年）和懷爾斯查司（Karl Weierstrass，生於1815年）。庫默爾對數學的首要貢獻，當然是他的代數數論，但他在1830年代還在微分方程和橢圓函數上有所成就，再後來是在幾何上：在1864年他發現了現在以他的名字命名的帶有16個叉點的四次曲面，這個曲面持續引發大量的研究興趣。他甚至在1866年描述了如何製作這個曲面的石膏模型。在柏林大學他負責教授數學的基礎課程，並爲其奠定嚴謹的理論基礎。他的課吸引了許多人，最多可達150名學生。他很照顧學生，有人談諧地形容，學生爲了回報他，「對他的敬愛有時近乎狂熱」。1878年，他辭去了已擔任15年的柏林科學院終身祕書職位。

克羅涅可是庫默爾的得意門生。他家世富有，沒有生活壓力，也不會取得教師資格。他是藉由柏林科學院院士的身分，才得以在柏林大學開課。他在1863至1886年間提名了15個人作科學院院士，包括黎曼（Bernhard Riemann）、席維斯特、史密斯、戴德金（Richard Dedekind）、貝堤（Enrico Betti）、布里歐司齊（Francesco Brioschi）、厄爾

密特、富克斯，以及卡索拉蒂（Felice Casorati），由此也能看出他在數學領域涉獵之廣。弗羅畢紐斯（Georg Frobenius）在1891年給克羅涅可的悼詞中，也認爲克羅涅可涉獵太廣泛，以至於他在每個研究領域都未達到舉世無雙的水準。當然，他的主要興趣還是橢圓函數和數論，但他在1860至1880年間幾乎沒發表什麼東西，而把心力放在柏林大學的研究討論班。

與克羅涅可合開討論班的懷爾斯查司，同樣在1878年之前也沒發表多少篇論文。他講授分析學各個分支，最主要是關於橢圓函數和阿貝爾函數。他和庫默爾一樣，是一個謙虛、溫和、友善的人。不幸的是，費爾茲到柏林時，將會陷入一個逐漸惡化的環境中。懷爾斯查司驚訝於克羅涅可關於算術化的強硬立場，例如他對康托（Georg Cantor）的研究所表達的極度憎惡是眾所周知的，因此他擔心克羅涅可作爲三巨頭中最年輕的一員，最終將主導整個數學系。他也無法向庫默爾求得奧援，後者傾向於跟他的昔日學生站在一邊。儘管嚴格說來，下面這則軼聞發生於1878-1882年的範圍之外，人們仍然可以認爲跡象正在顯露出來。在1884-85年間，史瓦茲（Hermann Schwarz）在邀請克羅涅可參加新年宴會的信函中寫道：「不尊敬小個子（the Smaller）的人，也配不上大個子（the Greater）。」——他指的是克羅涅可與懷爾斯查司兩人的體型。儘管「小個子」就是克羅涅可在柏林大學的綽號，他仍荒謬地認爲史瓦茲指的是智力的高下之分，因此斷然與史瓦茲絕交！

在這樣一個敏感時刻，講求實際的費爾茲肯定想選擇庫默爾，既因爲他是一個折衷的人選，也因爲他對數學的廣泛掌握。但是他將失望而歸。庫默爾正逐漸退出學術生活，並將在1883年時出乎眾人意料地完全辭去大學中的職務。當庫默爾最終謝絕這項邀請時，費爾茲若要想避免史瓦茲的錯誤，只有一種選擇：同時聘請克羅涅可和懷爾斯查司兩人，並且讓懷爾斯查司擔任主席。兩位柏林數學家在委員會中

只不過是恰當地反映了他們的數學學派的規模和重要性——每個年輕的德國數學家和許多外國數學家都會來到此地。

接下來是義大利。布里歐司齊（生於1824年）將是明顯的人選。他仍是活躍的數學家，對不變量理論、三次曲面和線性微分方程理論感興趣，是期刊《純粹與應用數學年刊》（*Annali di Matematica Pura ed Applicata*，以下簡記為*Annali*）的編輯、教育部執行委員會的成員。他自1863年創辦米蘭高等技術學院以來，一直擔任該校校長，還將於1884年被選為義大利科學院（*Accademia dei Lincei*）的院長。他唯一的競爭者，貝堤（生於1823年），相比之下則是既靦腆又低調的人。

至於第六個委員會成員，眾人會強力推薦瑞士的施萊夫利（Ludwig Schläfli，生於1814年）。凱里為施萊夫利在不變量理論上最早的工作大表激賞，說它包含了「一個關於結式的非常漂亮的定理」，並與他就此通信交流；布里歐司齊也稱讚這項研究。他對三次曲面上的27條直線的研究——其中他描述了它們所形成的36個「雙六」構形，則為他贏得了1870年的施泰納獎（Steiner Prize）。因為凱里是三次曲面這類直線的原始發現者，這必定會使得凱里對他的好感倍增。他關於模方程理論的研究則會引起厄爾密特的興趣；因為厄爾密特於1854年發表了一個神祕的變換表，卻並未解釋，施萊夫利的工作使之得以澄清。施萊夫利將於1883年被選入義大利科學院。聘請施萊夫利的另一好處是：因為施萊夫利也是哥廷根科學院的院士，費爾茲可以多一個熟悉德國數學哥廷根學派的管道，畢竟當時哥廷根學派已經逐漸與柏林學派分道揚鑣。

這樣我們可以假定費爾茲的委員會有布里歐司齊、凱里、厄爾密特、克羅涅可、施萊夫利等人，並由懷爾斯查司擔任主席。所有這些人都是在數學研究上極為活躍的，儘管施萊夫利關於 n 維幾何的長篇論著還一直找不到賞識者。他們開始從容地商議，考

慮誰可以獲得1882年的費爾茲獎。

遴選工作正式展開

列出候選人的完整清單並不是難事。我們今天要做這事，只消去查每年一期的摘要期刊《數學研究進展年鑒》（*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*，簡記為*JFM*）。但當時的數學界比現在小，學者逐個記起每一個人不會有什麼困難。我想，若要滿足在1882年時不超過40歲的要求，他們會在1879年列出如下名單：康托（1882年時37歲）、克利弗（William Clifford, 37）、達布（Gaston Darboux, 40）、迪尼（Ulisse Dini, 37）、弗羅畢紐斯（33）、阿爾方（George Halphen, 38）、克萊恩（Felix Klein, 33）、李（Sophus Lie, 40）、諾特（Max Noether, 38）、史瓦茲（39）、韋伯（Heinrich Martin Weber, 40）。

如果他們決定再把40歲的限制放寬一些，則還可以加進卡索拉蒂（1882年時47歲）、克雷莫納（Luigi Cremona, 52）、戴德金（52）、富克斯（49）、戈當（Paul Gordan, 45）、約當（Camille Jordan, 44）、馬丘（Émile Mathieu, 47）、西羅（Ludwig Sylow, 50）。

到1880年康托已經發表了20多篇論文。他首先研究三角級數的收斂性，證明了至多存在一個對所有 x 逐點收斂於給定函數的三角級數。這項研究引導他著手於導來集（derived sets）理論，提出一項實數理論（作為有理數柯西數列的等價類），並證明實數是不可數的，而代數數是可數的。1878年他已確立了維數的不變性，給出了一個直到1898年才被廣泛認為正確的證明。然而在《數學期刊》



（*Journal für Mathematik*，康托



名詞解釋 **集合的冪**：power of a set，即現在所謂的集合基數（元素的「數目」）。這是康托的自創用語。勿與冪集合 power set 混淆。

以下簡記為 *Crelle**) 上的發表卻被克羅涅可擱置，經過懷爾斯查司力爭才得以刊出。從此之後康托就把他的論文轉投給 *Crelle* 的競爭對手《數學年刊》(Mathematische Annalen，以下簡記為 *Annalen*)，以及支持懷爾斯查司立場的米塔-列夫勒 (Gösta Mittag-Leffler) 剛創辦的《數學學報》(Acta Mathematica，以下簡記為 *Acta*)，不過他跟後者只短暫合作了幾年而已。到1882年，他已發表系列論文〈談線性點集的無限〉(Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten) 的前三篇，而他的理論已進展到集合的冪的定義和無窮符號的引入 (用以表示極限的極限的極限……)。

克羅涅可對康托的敵意是廣為人知的。事實上，康托認為整個柏林學派除了懷爾斯查司以外全都反對他，道本周 (Joseph Dauben) 最近出版的康托傳記[1979]中引用的他的幾封信便足資為證，康托並且特別指出克羅涅可和史瓦茲對他最不友善。所以在委員會裡，克羅涅可會反對他，而另一方面懷爾斯查司會支持他。其他幾位評審委員則會難以抉擇，因為當時康托的研究在德國之外還鮮為人知，而費爾茲肯定會發現討論朝著「更穩妥的選擇、其他年輕數學家……」之類的妥協意見發展，於是康托被悄悄淘汰掉了。

克利弗因結核病而早逝，使得英國失去了唯一有望入圍的人選，但是如此一來，凱里也得以避免將英

國學術界一場奇特的爭端，攤開在外人面前的尷尬。克利弗是赫胥黎 (Thomas Huxley) 的朋友，他以嚴格經驗論的方式來詮釋黎曼關於幾何基礎的理念，從而挑戰了科學上和道德上的先驗論者。凱里屬於先驗論的陣營，雙方對這個論題爭執很激烈。克利弗之死使得委員會很遺憾地無法考慮他數學專業的成就。

如果當時人漠視康托的態度，在我們今天看來很不公道；那麼反過來，對待達布不公的則是歷史。他在1870年代非常多產——平均每年發表九篇論文，其中許多篇幅很長。他研究了二階和更高階的偏微分方程，例如在研究各種曲面上特定類型的曲線時所出現的方程。他也研究四次圓紋曲面 (cyclides)；以及許多微分幾何特性的問題。1874年他證明了微積分基本定理的如下版本：

若函數 f 的導函數 f' 在 $[0, 1]$ 上有界且黎曼可積，則 $\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$ 對所有 x 屬於 $[0, 1]$ 均成立。

1878年迪尼觀察到達布的定理表明可能存在這樣的函數 f ，在每個區間內都存在某點其導函數值 f' 等於零，這樣的話若 f' 有界，則 f 或者是常數，或者不是黎曼可積，而這種令人驚訝的函數的存在性被沃爾泰拉 (Vito Volterra) 於1881年證實。如果這個委員會多用真正的費爾茲獎委員會的用語，那麼他們會說：頒發這面獎章，「不僅由於其成就的獨特性質，並且也為了鼓勵沿著這些方向進一步發展。」**——這些語句若用於達布的定理可謂恰如其分。由於他還研究了爆震波、庫默爾曲面，並且證明了實射影幾何中的保直線且保交比的映射必然是連續的，所以至少會有凱里和施萊夫利，向費爾茲力薦達布。達布將會出線，事實上我也注意到皮瑟 (Victor Puiseux) 去世後，他就在1884年被選入巴黎科學院，遞補其空缺。



達布

* 全名 *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (純粹與應用數學期刊)，由數學家 August Crelle 於1826年創辦並長期擔任主編，至今仍在發行。通常稱為 *Crelle's Journal*。

**這是真實的費爾茲在籌辦這個國際獎項時，設想評論得獎者成就的原句。其用意在於避免予人費爾茲獎只是為了比出數學家的高下，所以也強調它還有鼓勵某些研究方向的目的。

迪尼情況很特殊。他於1865年跟隨厄爾密特學習，最初研究微分幾何，發表了關於保角表示和曲面間保測地線映射的重要定理。但他在1880年放棄數學而在義大利從政，十年之後才回歸數學。費爾茲可能認為這並不是他想要的榜樣，所以我想迪尼不會被選中。



迪尼



弗羅畢紐斯



阿爾方



克萊恩

當時在蘇黎士的弗羅畢紐斯尚未開始他最傑出的研究，還在重做和改進別人的工作。我想，他關於普法夫方程（Pfaff's equation）和關於準橢圓函數的論文不會值得費爾茲獎勵，而他關於群表現的優秀成果還要再等十多年才會出現。

至於阿爾方，他在1882年時其實已贏得兩個獎項：巴黎科學院大獎和柏林科學院的施泰納獎。巴黎科學院大獎的評選小組是由厄爾密特主持，得獎論文是關於具有代數解的微分方程的研究。厄爾密特稱讚他合併運用曲線虧格和不變量理論兩種想法的巧思。他的一篇分類了所有次數小於或等於20的代數空間曲線的長篇論文為他贏得施泰納獎。我們可以想像，厄爾密特會滿意地看著，評審委員會迅速同意頒獎給阿爾方。

克萊恩是爭議的主要來源

克萊恩則會造成委員會內部最強烈的意見分歧。到1882年為止，克萊恩已發表了近80篇論文，研究題材包括非歐幾何、直線幾何和代數曲線，最近還開始以群論、不變量理論和黎曼面理論的工具來處理模函數的問題。1882年，他和龐卡赫

（Henri Poincaré）對由 $SL(2, \mathbb{R})$ 的離散子群作用在上半平面所定義的黎曼曲面的合作成果，發表在 *Annalen* 上——他擔任該刊的編輯已有十年。他很年輕的時候曾跟普呂克（Julius Plücker）和克勒布希（Alfred Clebsch）學習，然後途經柏林，到巴黎跟約當學習群論。但在柏林，儘管他贏得了年度最佳學生獎，卻也樹了敵。懷爾斯查司並不同意克萊恩把非歐幾何看作一種射影幾何的觀點，因為它是一種度量幾何。克萊恩直到晚年都還記得他在柏林所遇到的敵意。自1869年創刊以來，*Annalen* 一直被視為

Crelle 的一個不受歡迎的競爭對手，而克萊恩努力網羅像康托這樣在柏林不受歡迎的人的論文。1891年時，為了尋找懷爾斯查司的繼任者而組成的遴選委員會，對於克萊恩的評價令人吃驚——他們認為克萊恩僅僅是一個組織者，無法勝任原創研究，這或許反映出克萊恩在1882年9月健康狀況惡化之後，數學地位的變化，但它無疑也透露出柏林數學界一向是如何看待他的。我料想克羅涅可和懷爾斯查司會認為他不夠深刻，有時甚至過於不確切（借用利普希茲（Rudolf Lipschitz）對克萊恩博士論文的看法）。另一方面，凱里可能會替他說話，因為他們的研究興趣相似，而施萊夫利則會提起他們關於實射影平面不可賦向性的共同研究。布里歐司齊的觀點我不確定，但我感覺厄爾密特不會喜歡克萊恩。克萊恩一直不留情面地批評厄爾密特的朋友富克斯，而且厄爾密特很可能覺得克萊恩野心太大、態度咄咄逼人。另外，儘管厄爾密特欽佩黎曼的函數論，但他個人寧可迴避它，因而可能不那麼欣賞克萊恩試圖繼承黎曼衣鉢的努力。

即使我們設想費爾茲在克萊恩身上看到了一個致力於推動數學發展的人，於是敦促委員會捐棄私人

恩怨，公允地評斷克萊恩的成就，我想形勢仍會按照柏林學派的意願來發展。非歐幾何的射影解釋，幾何、群論和不變量理論的聯結，都是不錯的研究，但或許還算不上傑出。克萊恩更後來所做的擴展模函數定義並闡明其變換的研究固然更好些，但再一次我又聽見低語聲——「還太年輕……以後會有機會……結果尚未完全確立……」。

除此之外，克萊恩還有一個比他更受青睞的競爭者。我指的不是他的朋友李——其應用於曲

面的曲率線和一階偏微分方程的切觸變換理論已出現於1870年代。李正開始發展他極具野心的微分不變量和變換群的理論，但幾乎沒有人關注。例如，這段期間的*JFM*上關於李研究的報導是由李本人寫的，這非常不尋常。在稍晚的1886年，克萊恩對於李能得到萊比錫的聘書出力甚多，到萊比錫任教才使得李的研究廣為人知。不僅如此，克萊恩（後來還有龐卡赫）更把學生送去萊比錫學習他的新數學理論。但在1882年，李的名字還極少被人提到。所以，和克萊恩一起競爭德國最傑出幾何學家頭銜的是他從前在克勒布希射影幾何學派的同事，諾特。

在諾特的身上，我們能看到代數幾何的興起，甚至在柏林也得到尊重，而其成就的最高峰，則在於1882年以代數空間曲線的研究而獲得施泰納獎（該年的另一得獎者為阿爾方）。藉助他的除子理論，他於1874年跟布利爾（Alexander von Brill）合寫的論文，標誌了奇異曲線的嚴格與純代數的理論開端，文中並且概述了如何將「壞」奇點約化成正常的奇點（所有切方向均不同的奇點）的想法。他還開始研究當時尚知之甚少的代數曲



李



史瓦茲



韋伯



戴德金

面，並展示了怎樣把懷爾斯查司點（Weierstrass points）的理論與他自己的方法相結合。全盛時期的諾特，光芒明顯蓋過了克萊恩。

史瓦茲（生於1843年）和韋伯（生於1842年）

的獲獎資格不太會有人爭取。從1877到1882年史瓦茲僅發表了五篇論文，而從1871年起的整整十年間他只做出兩項傑出成果。一項是他對所有解皆為代數解的超幾何方程的枚舉，由此給出一個富克斯問題的部分解答。另一項是他的交錯法，解決了一大類圓盤狀邊界的狄利克雷問題（Dirichlet's problem）。他對變分法的重要研究也還未展開，當時的評價是，他不能區分重要和不重要的問題，因而浪擲了自己的能力。

韋伯的資格也比較弱。他第一個真正重要的成果是跟戴德金合寫的關於代數函數的論文。雖然於1880年投稿給 *Crelle*，但克羅涅可由於不明的原因，直到1882年才刊出，所以當時的人還沒有足夠的時間來體認其算術想法的深刻性。

進一步的考量：更資深和更年輕的數學家

我揣想，1881年的耶誕節，費爾茲或許是在巴黎跟厄爾密特度過的，他應該會跟厄爾密特討論事情的進展，此時已有三位很確定的領先者：達布、阿爾方和諾特。而在柏林的耶誕宴會上，知道他們的年輕一輩數學家無人具備那種水準，想必會破壞掉他們的節日氣氛。能讓事情這樣發展嗎？此時，突然有個想法自然而然浮現了出來。顯然數學家們最好的研究是

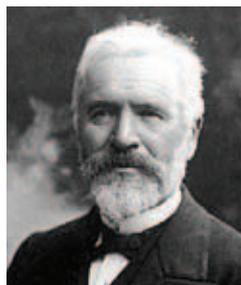


諾特

在40歲左右時做的，比方說，懷爾斯查司的名聲就是他在那個年紀時解決了超橢圓積分的雅可比逆問題（Jacobi inversion problem）而取得的。他會向委員會提議也考慮一下稍微逾齡的人，畢竟這是他們絕無僅有的獲獎機會。他的委員會

成員還不知道20世紀會如何頌揚年輕人，當然會同意他的提議。

一旦如此，那麼就有四個人需納入考量。卡索拉蒂（生於1835年），義大利的函數論專家，曾於1864年訪問柏林並跟許多德國數學家有往來；富



約當

克斯（生於1833年），庫默爾和懷爾斯查司從前的學生；戈當（生於1837年），號稱「不變量之王」；還有約當（生於1838年）。當然，四人當中以約當最傑出。他和克羅涅可兩人是最早帶頭開始研究伽羅瓦（Evariste Galois）思想的，他不僅寫了抽象代數的第一本重要著作——《置換與代數方程理論》（*Traité des substitutions et des équations algébriques*, 1872），還在整個1870年代論證如何用群論來闡明其他數學分支中的問題。舉例來說，他處理富克斯的 n 階線性常微分方程的代數解問題，論證怎樣把它化歸為枚舉 $SL(n, \mathbb{C})$ 有限子群的問題，其中這些子群是方程式的單值群。然後他解決了 $n = 2$ 和 3 的特定情形，並對一般的 n ，證明了有限性定理。他的結果發表在 *Crelle*，後來的修改版則發表在布里歐司齊的 *Annali* 上。凱里會贊成選他；懷爾斯查司想必也會，他的學生漢博格（Meyer Hamburger）已展示了如何運用矩陣的約當標準型來化簡線性微分方程的一般解。

1870年代對於不變量理論並不是順遂的十年。戈當經常淪為解決別人已用特殊方式解決了的問題，而且有時只是重做像約當和克萊恩等人的結果。委員會會淘汰他，而把注意力放在富克斯身上。

現在，柏林大學的教授們將強力推薦他們的候選

人。富克斯是複線性常微分方程的嚴格現代理論的奠基者，他代表了懷爾斯查司的分析學派。前述工作是他

在1860年代所做的，此後他又提出並解決了微分方程何時有代數解的問題。雖然史瓦茲也做過這個問題，但富克斯的結果更廣泛（附帶一提，布里歐司齊也研究過這個課題）。他的成果比克萊恩的更確切，雖然不像約當的結果那樣廣泛，但它必定是激發後者研究的來源之一。現在他正在討論雅可比逆問題對微分方程的有趣推廣，而且為方程求解提供了很可行的方法。由於以上這些成就，不久之後，當庫默爾從柏林大學退休時，富克斯立即被選為他的繼任者，並且入選柏林科學院。厄爾密特也會表示同意，盛讚他的朋友的模函數研究，正如他先前寫信給富克斯曾說到的，他的結果可以闡明克羅涅可關於曲線複數乘法的艱深理論。凱里無疑很欣賞史瓦茲所做的微分方程研究工作，他跟厄爾密特和富克斯一樣，並不喜歡克萊恩所發展的新思想，更偏好橢圓函數理論中的傳統思想。他也會對富克斯投贊成票。所以富克斯將順利過關，柏林學派的榮譽也得以挽救，懷爾斯查司可以向費爾茲報告說委員會將要達成一致意見。只不過，五個名字會不會太多了……？

費爾茲這邊也有別的顧慮。從立意設獎到現在，已經快四年了，可能有些年輕數學家才剛嶄露頭角，但也具有足夠獲獎的實力。美國人是決不會像歐洲人那樣強調資歷。比方說，他就聽說年輕的法國數學家畢卡（Émile Picard，生於1856年）非常優秀。

事實上，到1881年底為止畢卡已發表了34篇論文，把厄爾密特關於拉梅方程的想法發展成爲準橢圓函數的理論。他當然是值得關注的人。甚至還有另一個人選，一個年紀略大但突然發表大量論文的人：龐卡赫（生於1854年）。他關於微分方程和黎曼面的研究無疑比克萊恩的更深刻，至少厄爾密特會這麼主張；但他的研究也有空想的成分，非常不確切，儘管



富克斯



畢卡



龐卡赫



林德曼

暗示了許多重要的可行之路，仍留下不少需要細加探究的東西。為此巴黎科學院頒發大獎給阿爾方時，把他關於同一主題的一組初步研究論文列為特別獎，排在阿爾方之後。克羅涅可的觀點更刻薄：他在1882年告訴米塔-列夫勒，發表龐卡赫關於自守函數的長文會毀了他的新期刊*Acta*。嗯，這些優秀的法國年輕人可以再等等，到他們更加成熟時再說。

然後，懷爾斯查司也許會想提名他的朋友柯瓦列夫斯卡婭（Sofia Kovalevskiaia，1850年生）。她的解析偏微分方程解的存在性定理蘊含令他喜出望外的奇思妙想。不過，她最好的研究工作還沒出現。她關於土星光環的論文發表於1883年，她關於超橢圓積分的論文則得等到1884年才出現，雖然其中的數

學方法缺乏美感，但在當時還是獲得了高度評價。她關於剛體轉動的理論於1888年贏得波當獎（Bordin Prize）——那一年的競賽題目看起來像厄爾密特刻意為她設計的。1889年她成為自文藝復興以來第一個當上教授的女性。雖然她的得



柯瓦列夫斯卡婭

獎資格將會與日俱增，但1882年還嫌太早了。

最後再快速回顧一下，以免有所遺漏。林德曼（Ferdinand von Lindemann，生於1852年）在1882年六月把 π 是超越數的證明這項令數學界興奮不已的結果投稿到*Annalen*。他的證明在當月即刊出，並由懷爾斯查司公開確認。這項研究是以厄爾密特早先對 e 的超越性的證明為基礎發展出來的。對費

爾茲和他的委員會來說，已經趕不上這次的評獎，但肯定會是1886年的得獎者。還會有其他人嗎？一時之間，除了柯瓦列夫斯卡婭以外沒有強勢的俄國候選人，而且，其他地方都沒有。沒有年輕的美國人嗎？就是因為沒有，我才要設獎啊，費爾茲會這樣回應——有趣的

是吉布斯（Josiah Willard Gibbs）的名字沒被提起，我想是因為不知情。所以，他們會選擇誰呢？要確切指出他們的選擇，未免把這遊戲玩得過頭。在那五個人中，我猜想達布、富克斯、阿爾方和約當是穩操勝券的，或許諾特會被淘汰。但我已講得有點太多了。且讓我把這個歷史競賽的遊戲交給諸位吧，畢竟還有很多年份可拿來討論。最後請容我申述幾個實質性的論點。

結語：數學史的關注

我的第一個要點是方法論的。如果我們真要理解數學的發展，像這樣的分析是很有必要的。為了解釋數學怎樣從與之競爭的神學、語言學、物理學和工程學等學科那裡招攬學生，或者被這些學科把學生拉走，我們就必須考慮一個特定的時代是怎樣看待數學的。想要理解為什麼某個數學系要比其他數學系更受偏愛，我們也必須要問同樣的問題。偉大的思想可能終究會勝出，艱深的問題可能使最有希望的進展一時止步。但真正的歷史必須去探索：那些偉大的想法和艱深的問題在當時是怎樣被看待的。

當我們在本文做這件事時，我們發現了一些有趣的新東西。我認為讓康托或克萊恩在1882年落選，並不太需要扭曲歷史紀錄；同時，李也確實得再等至少十年，才會被認為是重要數學家。所以，如果數學史只把視線聚焦在這些人身上，從而輕忽了達布或阿爾方等人，則會有扭曲了歷史發展原貌的危險。另一方面，我必須承認，選中富克斯，是故意為之的。我們今天記得他的名字，主要是因為富克斯函數和富克

斯群，這兩者都不是他創造出來的；但在當時，他代表了柏林大學的未來。他所關注的也正是當時最關注的問題，而這些東西也許在我們探索20世紀結構性的數學如何發源自19世紀時被低估了（當然，這種探索本身即是有意義的課題）。與富克斯相反，戴德金在現代的名氣大部分要歸功於希爾伯特和他的學派，在此忽略他是故意的。

其他更特定的要點可以說得較簡短。首先，很明顯柏林大學沒能規劃好自己的未來。懷爾斯查司、庫默爾和克羅涅可三巨頭的地位，由弗羅畢紐斯、富克斯和史瓦茲繼承，然而其中只有弗羅畢紐斯堪與前輩比肩。它的數學重鎮的地位很快就被哥廷根所取代，這個教訓是值得任何管理階層或雄心勃勃的系主任深思的。分析學的基礎並沒有像人們從數學史中推測的那樣，成為數學的中心課題。真正的中心課題應是微分方程理論以及幾何上的各種論題，包括代數曲線理論。另一方面，數學即是純數學的現代觀點，似乎在1882年時即已奠立；我相信甚至再往前推五十年，也可初見其端倪。我們能看到的只是一時興起去做數學物理（例如拉梅方程），模模糊糊帶著實際應用也會有益於數學的感覺。重建當時辯論數學與物理之間分際的現場，來看看這兩個學科過去如何看待彼此以及評價其思想，會是很有趣的事情。

最後我想說，我已經試圖讓費爾茲和他的委員會做出了真實反映他們想法的決定。我相信他們選擇了那個世代最出色數學家中的五位。然而，就像現在一樣，其他那些**未被**選上的，並非更好也不是更差，僅僅只是他們之間難以比較而已。數學的豐富多樣正是它的魅力之一，數學家的價值判斷不可避免只能是片面的，這同樣也是它的魅力所在。

資料來源說明

我沒有以一般論文的體例來寫這篇隨筆，所以現在為本文的資料來源略加說明。幾乎一切有關柏林學派數學的資料都是來自畢爾曼（K.-R.

Biermann）引人入勝的《柏林大學的數學及其教師，1810-1920年》（*Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berlin Universität, 1810-1920*, Akademie Verlag, Berlin, 1973）。其他個人資訊可在道本周所著的康托傳記中找到。富克斯、厄爾密特和克萊恩的各種論文集充滿有趣的評記，而*JFM*中的評論提供了進一步窺見同時代人觀點的機會。杜嘉克（P.Dugac）對戴德金的研究，《戴德金和數學基礎》（*Richard Dedekind et fondements des mathématiques*, Vrin, Paris, 1976），包含了許多能進一步還原現場的當時書信。最重要的十九世紀數學史是克萊恩的《數學在十九世紀的發展》（*Entwicklung der Mathematik im 19th Jahrhundert*, Chelsea重刊，1976），歷史學家現在開始知道此書不可盡信。《科學傳記辭典》（*Dictionary of Scientific Biography*, Scribners, 15卷，1970-1977）中的數學家小傳幾乎每一篇都非常有用；它所提供的資料來源，數學家研究歷史問題時可以從中裨益甚多。∞

本文出處 *Mathematical Intelligencer* 7 (1985) no.3
譯文來源 《數學譯林》

延伸閱讀

- + 康明昌〈數學界的諾貝爾獎〉《數學傳播》15(1991) no.1，亦可見http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_15_1_08/
- + 〈費爾茲獎網頁〉國際數學家聯盟（IMU）<http://www.mathunion.org/general/prizes/fields/details/>
- + Riehm, Carl, The Early History of the Fields Medal, *Notices* 49 (2002) no.7, AMS。