數學在自然科學中不合理的有效性

作者：威格納 Eugene P. Wigner
譯者：島洋

作者簡介：威格納為匈牙利裔物理學家，普林斯頓大學教授，1963 年獲諾貝爾物理獎。威格納 1925 年畢業於柏林科技大學，從伯蘭尼學化工，闡明分子之締合與解離機制。1926 年成功應用李群於量子力學，分析多電子原子光譜。1930 年代離歐赴美。他在群表現方面有許多傑出工作。

重點摘要

▶作者檢視數學和自然律的特質，並說明自然律的存在、人類心靈可以發現自然律、數學語言適用於自然律都是難以理解的奇蹟。

▶作者以行星運動、量子力學為例，說明在物理研究中，數學經常現身於出人意料的脈絡，並且以驚人的精確度描述複雜多樣的現象，他稱之為知識論的經驗律。

▶由於數學有效性的不可理解，不同理論之選擇與統一都可能潛存衝突。作者以數學為奇妙天賜作結，期待數學在未來自然科學繼續扮演重要的角色，雖然或許仍令人困惑。

右圖：威格納。（美國亞貢國家實驗室提供）

也許這裡還有一些尚待發掘的奧秘。

——普爾斯（Charles S. Peirce）

有一個故事是關於兩位昔日高中同窗聊起彼此的工作。其中一人成了統計學家，正專研人口趨勢。他把一篇論文拿給老同學看，這篇論文按慣例從高斯分布開始說起，統計學家向老同學解釋用於實際人口數、平均人口數等等的符號意涵。老同學顯得有些遲疑，不太確定這位統計學家是否在唬弄他。他問說：「你怎麼知道是那樣？那這邊這個符號是什麼？」。統計學家說：「噢，這是 π。」「π 是什麼？」「圓的周長對直徑的比率。」老同學說：「哇，你玩笑開得太過頭了，人口怎麼會跟圓周長有關係！」

我們很自然的會莞爾於這位老同學思路的單純。然而我必須承認，當聽到這個故事時，我心中油然生起異樣之感，因為故事中這位同學的反應，流露的不過是直白的常理。但更讓我納悶的是，後來沒過多久有人找我討論一個疑惑[1]，亦即當我們測試理論時，只選用了很小範圍的數據。他說：「如果

[1] 此人是當時就讀於普林斯頓的維納（F. Werner）。

我們建構理論時，根據的是現在忽略的現象，並且忽略一些現在關注的現象，我們怎麼知道會不會建構出與現在理論大相逕庭、但對現象卻有同等解釋效力的另一理論？」的確要承認，我們沒有明確的證據判定不會有這樣的理論。

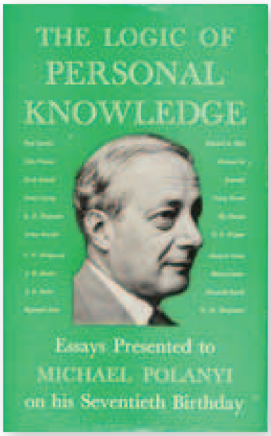
以上兩個故事呈顯了兩個重點，亦即這篇論文的主題。首先，數學概念在全然意料外的脈絡中出現，而且通常很出乎意料的，能夠縝密且精確的描述這方面的現象。其次，正因為這種狀況，也因為我們不理解數學如此有用的箇中緣由，我們無法知道一個用數學概念表述的理論是否唯一合適的理論。我們的狀況就像是手裡握著一串鑰匙、需要連續打開數道門的人，當他總是試一、兩次就找對鑰匙，不免開始懷疑鑰匙與門鎖之間是否有唯一的對應關係。

以下要說的大部分並無新意，大多數科學家可能都曾以某種方式想到過。我的主要目的是從幾個面向去闡明。第一，數學在自然科學中巨大的有用性幾近神秘，找不出合理解釋；第二，正是數學概念如此不可思議的有用性，促使我們注意物理理論唯一性的問題。為了建立第一個論點，亦即數學在物理學中扮演了異常重要的角色，我們有必要先談談「什麼是數學？」接著再談談「什麼是物理學？」然後再談談數學如何跨入物理理論，最後則是，數學在物理學中角色的成功為何如此令人費解。關於第二點，物理理論的唯一性，在此將不多著墨。要想對這問題給出適切的答案，還需要進行周密的實驗性與理論性研究，而這類研究目前還未展開。

數學是什麼？ 曾有人說哲學是為了要濫用而發明的術語[1]。沿此脈絡，我會說數學是為了有技巧的運用概念與規則而發明的科學；主要強調的是概念的發明。如果數學定理都必須出自公理中已出現的概念，那麼有趣的數學定理很快就會告罄。再者，雖說初等數學，尤其是初等幾何的建構，無疑是為了要描述真實世界的對象，但是更高等的數學概念則未必如此，尤其是那些在物理學中扮演重要角色的數學概念。準此，整數對的運算規則，顯然是被設計成與分數運算的結果相同，即使我們初學分數時並未提到「數對」。用於數列的運算規則則對應到無理數，這個運算仍然隸屬於重現已知的數量運算規則的範疇。然而大部分更高深的數學概念，諸如複數、代數、線性算子、伯瑞爾集合（Borel sets）──類似例子是無窮無盡的──則是數學家設想出來，以做為展現其巧思與形式美感的主題。事實上，數學家定義這些概念時，即已知道可對其運用有趣且精妙的構思，這正是數學家深具巧思的首要明證。創造數學概念所需的思考深度，則可展現在日後運用這些概念之技巧需求。偉大的數學家堪堪走在容許的界限上，在可行的範圍內充分且近乎果決的盡情馳騁。然而這樣奔放的思路並未讓他們陷入矛盾的困境，光這件事本身就是奇蹟。我們很難相信單憑達爾文的天擇過程，人類的推理能力即可演化到如此完美的程度。然而，這並不是我們目前要談的主題。在此強調，而且後面還要重溫的重點是，數學家若未定義公理之外的概念，則他僅能建立起寥寥可數的有趣定理；而數學家之所以定義這些公理之外的概念，則是著眼於能對它們運用巧妙的邏輯運算，使得運算本身以及由此可得的普遍性與簡潔性，都可滿足我們的美感[2]。

複數便是一個顯例。當然，我們的經驗不需要導入這些數學量。事實上，若要數學家提出研究複數的正當理由，他必會義正詞嚴地指出在方程式論、級數論、乃至一般解析函數論中的許多優美定理，這些都根源於複數的引入。數學家絕不願放棄研究這些由他們巧思所創造出的優美成就[3]。

物理是什麼？ 物理學家志在發現物理世界的定律。為了理解這一陳述，有必要先分析「自然律」的概念。



博蘭尼的名著《個人知識》。

圍繞著我們的世界複雜難解，最明顯的例證便是我們無法預測未來。雖然世人總笑說只有樂觀主義者才會認為未來不可確定，但樂觀主義者在此是對的：未來的確不可預料。正如薛丁格（Erwin Schrödinger）曾評論的，在如此複雜難解之世界中的一項奇蹟是，我們居然能從事件中找出某些規律 [1]。伽利略所發現的一項規律是，如果兩個石頭同時自等高處落下，將會同時著地。自然律即是關於這些規律性。伽利略發現的規律是一大類規律的原型。這樣的規律因為下列三個理由而令人驚訝。

第一個理由是，它不僅在伽利略的時代、在比薩成立，而且在地球上的任一處都成立，不僅過去成立、現在成立，而且未來也將永遠成立。規律的這項特質被稱為不變性，正如我先前曾指出的 [2]，若沒有類似於從上述伽利略的觀察所推廣出的不變性原理，物理學將無法存在。第二個驚人的特質是，我們所討論的規律性不受許多情境因素影響，不管是否下雨、無論實驗地點是室內或是比薩斜塔、無論放開石頭的人是男是女，這項規律都成立。甚至是不同的兩個人從相同高度同時各放開一顆石頭，這項規律也仍舊成立。很明顯，無數的其他條件都不會影響伽利略規律的有效性。有如此多可能影響觀測現象的情境，結果卻無關緊要，這也是一種不變性 [2]。 然而這種不變性的性質迥異於前一種，因為它無法被表達成一條通則。探討能影響或不能影響現象的各項條件，是每個領域早期實驗探索的一部分，這需要實驗者的技巧與創見，讓他得以證明現象只被相對少數的一些相對容易實施與複製的條件所決定[4]。 在本例中，伽利略將他的觀察限制在相對較重的物體，便是在這方面最重要的一步。再強調一次，若不是有些現象只會被我們可應付的少數條件所影響，物理學將不可能存在。

薛丁格（維基百科）。

上述兩點，雖然從哲學家觀點來看意義深遠，卻並非最讓伽利略吃驚之處，而且這兩者也未包含特

[1] 引自杜比斯列夫（W. Dubislav）之《當代數學哲學》（*Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart*）（1932）。

[2] 博蘭尼在其《個人知識》（*Personal Knowledge*）（1958）中曾說：「所有的這些困難不過是由於我們拒絕去明白，若不承認數學最明顯的特徵即它很有趣，則數學便無法定義。」（頁 188）

[3] 在此脈絡下，讀者也許會想知道希爾伯特對直覺主義相當不耐的評語，他說直覺主義「旨在破壞與醜化數學。」 參見〈數學的新基礎〉（Neubegründung der Mathematik, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* I (1922) 頁 157）；或其《個人全集》（*Gesammelte Werke* (1932) Springer 頁 188）。

[4] 關於這一點，可參考多伊區（M. Deutsch）生動的文章，見 *Daedalus* 87 （1958） 頁 86。 承西蒙尼（A. Shimony）告知普爾斯有一段相似的話，參見〈科學哲學文集〉（*Essays in the Philosophy of Science* (1957) The Liberal Arts Press 頁 237）。

定的自然律。自然律存在於這樣的陳述：一個重物從給定的高度落下所需的時間，與該落體之大小、材質及形狀無關。在牛頓第二運動「定律」的框架下，此陳述等於是說，作用於自由落體上的地心引力與該落體之質量成正比，而與該落體之大小、材質及形狀無關。

以上的討論旨在提醒諸位，首先，「自然律」的存在一點也不自然，更別提能夠被人類發現 ❶。 筆者便曾呼籲要重視「自然律」相繼的各個層次，每一層都包含比上一層更普遍、包羅更廣的規律，發現下一層會使我們較諸先前更能深刻地洞察宇宙的結構 [3]。然而，目前脈絡下最重要的一點是，所有這些自然律，即使慮及它們最廣泛的成果，也只構成我們對於物理世界知識的一小部分。所有的自然律皆是條件式述句，容許我們根據現在的知識，預測某些未來的事件。而且從預測的觀點而言，現在狀態的某些面向（其實是決定世界現狀的絕大多數因素）都是不相關的。這裡所說的無關性，指的是前面討論伽利略定理時的第二點 ❷。

關於世界的現狀，諸如我們生活所在的與伽利略進行實驗的地球、太陽與所有週遭環境的存在，自然律完全不置一詞。與此相呼應的是，首先，自然律只在特殊條件下——當世界現狀的所有相關決定因素已知時——才能用來預測未來事件。另一與此相呼應的是，物理學家能夠建造出可預見其功能的機器，這構成他們最卓越的成就。物理學家在這些機器中，創造出一種所有相關要素均為已知的環境，因此可以預測機器的行為。雷達與核子反應爐即是這類機器的範例。

前述討論的主要目的在指出，一切自然律皆係條件式述句，且其僅與人類對於世界所知的極小一部分相關。因此，古典力學做為最廣為人知的物理理論原型，是在物體的位置等資料已知時，給出物體位置坐標的二階導數。而對於物體的存在與否、目前所在或其速度等，則毫無著墨。為求精確，我還得提醒各位，約在 30 年前我們已得知即使是條件式的陳述，也無法完全精確：條件式的陳述其實是機率規則，讓我們能根據對現狀的所知，智性的猜測物理世界的未來性質。自然律無法讓我們建構絕對性的陳述，甚至對世界現狀的絕對性條件陳述都做不到。「自然律」的機率本質也可在機器上顯現，至少在核反應爐的例子是這樣，如果用極低的能量去運轉反應爐的話，即可得到驗證。然而，基於機率本質對於自然律所額外增加之侷限 ❸，下文將不再著墨。

數學在物理理論中的角色　在複習過數學與物理的本質之後，我們就能更適切地重新審視數學在物理理論中的角色。

我們在日常的物理學中，會運用數學計算自然律的結果，將條件式陳述應用到最有可能或是我們感興趣的特定條件上。為了這麼做，自然律必須以數學語言表示。然而計算既有理論的結果並非數學在物理學中最重要的角色。數學或說是應用數學，在此功用下並不是此情境的要角，不過是工具罷了。

然而，數學的確也在物理學中扮演了更具主導性的角色。我們在討論應用數學時曾提到，自然律必須先以數學語言來表述，才能成為應用數學的對象，這句話其實已暗示了數學更重要的地位。自然律是用數學語言寫成的說法，早在 300 年前即已出現 ❹；這句話在現在比以往更正確。為顯示數學概念在建構物理定律時的重要性，試回想量子力學的公理，它是由大數學家馮諾曼（John von Neumann）明確地建立，或由大物理學家狄拉克（Paul Dirac）隱含地提出的 [4][5]。量子力學有兩個基本概念：態（states）與可觀測量（observables）。態是希爾伯特空間（Hilbert space）的向量，可觀測量則是作用於這些向量的自伴算子（self-adjoint operators），而可能的觀測值則是這些算子的特徵值。但我們最好就此打住，

免得變成條列線性算子理論的種種數學概念。

當然，物理學的確只選擇某些數學概念來建構自然律，且僅用到其中一小部分。數學概念的選擇當然也不是從數學名詞表單上隨便選的，即使不是大部分，也有許多情形是物理學家獨立發展出這些概念，然後才認知到此前數學家就已醞釀出來了。然而並非像常說的那樣，以為數學使用最簡潔的概念，因此不管使用何種形式系統，都會用到數學概念。我們已經看到，數學概念的選擇並非出自簡潔性（即使是數對構成的數列也遠非最簡單的概念），而是因為它們適於進行巧妙的運算，以及獨特、卓越的論證。別忘了量子力學的希爾伯特空間是具備厄米特純量積（Hermitean scalar product）的複希爾伯特空間。對於非專業者，複數既不自然也不簡潔，且也無法從物理觀察中找到暗示。此外，複數在此的運用並不是應用數學的計算技巧，基本上反而是表述量子力學形式系統的必須要件。最後，從目前的趨勢看來，不僅僅是數，而且所謂的解析函數也會在量子論的表述中扮演決定性的角色。在此我指的是快速發展的色散關係理論（theory of dispersion relations）。

我們很難不覺得，我們所面對的是一項奇蹟，它的神奇並不亞於人類心靈能將數以千計的論證聯綴起來而不自相矛盾。它也可與另兩項奇蹟相比擬：一個是自然律的存在，另一個是人類心靈居然有能力去發現自然律。就我所知，最能貼切解釋數學概念出現在物理學的，是愛因斯坦的說法：唯有優美的理論，才是我們能夠欣然接受的物理學理論。需要運用大量智力的數學概念，是否具有美感，這一點還有待討論。然而，愛因斯坦的觀察頂多能解釋我們樂於接受那些理論，但未觸及理論內在的精確性。因此，我們將轉而討論後面這個問題。

物理理論的成功真的值得驚奇嗎？ 物理學家把自然律寫成數學形式的一個可能原因是，是因為他不太負責任。當物理學家發現兩個量之間的連結與數學中眾所周知的某種連結關係相像時，他便遽下結論，認為這個連結**即是**數學所討論的連結，而這不過是因為他不知道是否有其他類似連結罷了。現在討論的目的，不是要駁斥物理學家不太負責任的說法。也許他真是如此。然而，在此得強調，有數不清的例子是當物理學家把粗糙的經驗用數學表述後，便能夠對一大類的現象做出極度精確的描述。這顯示數學語言之所以值得讚賞，並不在於我們只會說這種語言；而是在很真實的意義上，顯示了數學就是正確的語言。讓我們看看幾個例子。

第一個例子是常被引用的行星運動。透過主要在義大利進行的諸多實驗，自由落體定律當時已是相當確立的定律。以今日的精確標準來衡量，這些實驗不可能非常精確。部分原因來自空氣阻力的影響，部分原因是當時還無法測量極短的時間間隔。無論如何，藉由這些研究，義大利的自然科學家熟悉了物體在大氣中的運動。而後牛頓將自由落體定律與月球的運行聯繫起來，他注意到在地球上投擲石塊的拋物線軌跡，以及月球在天空中的圓形軌道，都是數學上橢圓的特例。於是他根據單一的、在當時看來非常近似的數值巧合，從而提出萬有引力定律的想法。從哲學觀點來看，牛頓所提出的萬有引力定律，對他的時代以及他本人都是難以接受的。從經驗觀點來看，它所依據的觀測寥寥可數。他用來表述的數學語言包含了二階導數的概念。曾畫過曲線密切圓（osculating circle）的人都知道，二階導數並不是一個直截了當的概念。牛頓勉強建

❶ 薛丁格在其《什麼是生命》（*What is Life*）提及這第二個奇蹟可能超出人類的理解。

❷ 筆者確信無需再指出，文中所提及之伽利略的定理，並未涵蓋伽利略對自由落體定律的所有觀察。

❸ 可見如薛丁格，參考文獻 [1]。

❹ 出自伽利略。

波恩。（維基百科）

海森堡（左）與威格納（右）。（維基百科）

可以證明，在更實際的條件下他們的矩陣力學也是正確的。的確，連他們也是說「這裡建議的力學在基本特質上應該算是正確的」。事實上，他們的力學首次應用

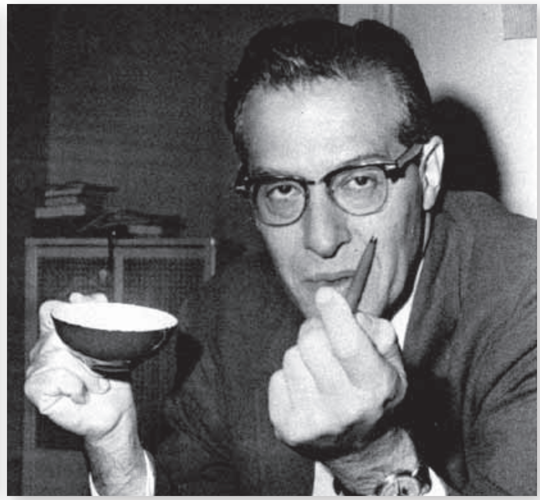
立的萬有引力定律，他自己僅能驗證到 4% 的精確度，但現在已被證明其誤差小於百萬分之一。這幾乎可被視為絕對精確了，直到最近物理學家才又大膽地研究起其精確度的限度❶。當要談起用數學家看來很簡單的形式所表達、但其精確度超出所有合理預期的自然律，屢屢被引述的牛頓定律當然是第一個被提起的典範。讓我們再就此例扼要重述一次我們的論點：首先，這一定律，特別是其中出現的二階導數，只對數學家是簡單明瞭的，從大眾常識的角度或對不具數學傾向的新手而言，它並不簡單。第二，它是在非常有限範圍內的條件式定律。它對吸引伽利略石塊的地球沒給出任何解釋，也沒說明月球的軌道為何是圓形，同樣也沒闡明太陽系的其他行星情況。這些初始條件留待地質學家和天文學家去解釋，這些都是非常困難的問題。

第二個例子是普通、初等的量子力學。它源於波恩（Max Born）注意到海森堡（Werner Heisenberg）提出的一些運算規則，形式上與數學家早已確立的矩陣運算規則完全一致。從而波恩、約當（Pascual Jordan）和海森堡提議用矩陣代替古典力學方程中的位置變數和動量變數 [6]。他們把矩陣力學的法則運用到幾個高度理想化的問題，結果相當令人滿意。然而，當時並沒有理性的證據

至實際問題，是數月後由包立（Wolfgang Pauli）對氫原子所做之研究，結果與經驗一致。這雖令人滿意，但也還可以理解。因為海森堡的計算規則就是從包括氫原子舊理論在內的問題抽象出來的。只有到了將矩陣力學或與之數學等價的理論用到海森堡的計算規則並無意義的問題時，才出現了奇蹟。海森堡的規則預設古典運動方程的解具有某種週期性，但氦原子中兩個電子的運動方程，或者更重的原子裡為數更多的電子運動方程，根本不存在這種性質，因此海森堡的規則不適用於這些情況。然而就在數個月前，康乃爾大學的木下東一郎和美國標準局的貝茲利（Norman Bazley）完成了有關氦原子最低能階的計算，在可觀測的精確度，即千萬分之一以內，與實驗值相符。很顯然在這個案例中，物理學家從這些方程中「得到」我們並沒有放進方程式的東西。

同樣的事也真確發生在「複雜光譜」，亦即較重原子光譜的定性特徵上。在此我要追憶我和約當的一次談話。當時他告訴我，在光譜的定性特徵推導出來後，如果由量子力學理論導出的規則跟由實證研究建立起來的規則不一致，這就提供了在矩陣力學框架內進行最後一次修正的機會。換句話說，約當覺得，要是在氦原子理論中出現意料之外的不一

貝特。（維基百科）



史溫格。（維基百科）

致，那我們至少在短期內將無能為力。這個理論當時是凱爾納（Georg W. Kellner）和希勒羅斯（Egil Hilleraas）發展出來的。它的數學形式非常清晰且不可變更，如果上面提到的氦原子的奇蹟未發生，那就真的會出現危機。毫無疑問，即使真的發生這種情形，物理學終究能以某種方式克服危機。另一方面，如果不是總有類似氦原子這樣的奇蹟一再重現，就不會有今天的物理學了。氦原子的情況也許是初等量子力學發展進程中最引人注目的奇蹟，但它絕不是唯一的一個。其實在我來看，只要我們願意去發掘，類似的奇蹟要多少有多少。無論如何，量子力學具有許多幾乎同樣驚人的成功事例，這讓我們確信它是──我們所謂的──正確的。

最後一個例子是量子電動力學，或者說蘭姆位移（Lamb shift）理論。話說牛頓的重力理論與經驗有著明顯的牽連，然而經驗卻只有透過海森堡的處理方式化成精煉或改善的形式後，才能進入矩陣力學的表述體系。相較下，蘭姆位移量子理論則根本是純粹的數學理論，它由貝特（Hans Bethe）發想並經史溫格（Julian Schwinger）所建立。實驗唯一的直接貢獻在於顯示可測量效應的存在。實驗與理論計算相符的程度優於千分之一。

與上述三者相類似的例子是無窮無盡的，但這三個例子應足以說明自然律中數學表述的適切性與精確性；在因為可操作而被選擇的概念範圍內，「自然律」有著幾近神奇的準確性，但這僅在嚴格限制的範圍之內。我提議把由上述實例所闡明的現象稱為知識論的經驗律（empirical law of epistemology）。它與物理學理論的不變性原理一起，構成這些理論不可或缺的基礎。如果沒有不變性原理，物理學理論就沒有事實基礎；如果知識論的經驗律不正確，做研究時我們將缺乏情感上所需的鼓勵和自信，而「自然律」也就不可能被成功探索出來。我與薩克斯（R. G. Sachs）博士討論過知識論的經驗律，他將這條定律稱為理論物理學家的信條，這種說法顯然正確。然而，他所謂的我們的信條都有充分的實例為證──例證遠遠不止上述三個。

物理學理論的唯一性　上述觀察的經驗本質在我看來是不證自明的。它當然不是「思想的要件」，我們應該毋需指出，它僅僅適用於我們對物理世界知識的極小一部分。如果位置本身或速度不存在簡單的數學算式，卻認定位置的二階導數這種類似算式的存在是不證自明的，這種想法當然很荒謬。因此，人們竟然可以視為理所當然的收下這份包含在知識論經驗律中的神奇禮物，這一點確實令人驚奇。先前提到人類心靈能將上千個論證連結起來而仍然保持「正確」的能力，也是類似的天賜之禮。

❶ 諸如狄克（R. H. Dicke）*American Scientist* 47 （1959） 頁 25。

任何經驗律都會令人不安的一點是，我們不知道它的應用限制有多大。我們已經見到，有些周遭世界中的事件具備的規律性，可以用極為精確的數學概念來表述。另一方面，世界有些面向所關注的事物，我們並不相信有任何精確的規律存在。我們把這一切稱為初始的條件。這裡自然浮現一個問題：不同的規律（亦即被發現的各種自然律）是否能融合成一致的單一整體，或至少趨近於這樣的融合。又或者，也有可能總會有些自然律彼此之間根本找不到共通之處。目前來看的確如此，例如遺傳學與與物理學的定律之間就沒有共同點。甚至還有可能，有些自然律與另外一些自然律所蘊涵的意義互相衝突，但在各自的領域內都足夠令人信服，以致我們不願放棄其中任何一個。我們也許會坦然接受這種事態，或是對於調和各理論之間的衝突逐漸失去興趣。我們也許會放棄追尋「最終真理」——亦即，將自然界各方面所形成的小幅圖象，融匯成一個具一致性的整體圖景。

我們不妨用一個實例來說明這幾種可能性。物理學中，我們現在有兩個強大且重要的理論：量子現象的理論和相對論。這兩種理論源自於互無交集的兩組現象。相對論適用於宏觀的物體如恒星。重合性事件（event of coincidence，也就是碰撞的終極分析）是相對論中的基本事件，它定義了時空中的一個點，或至少在相互碰撞的粒子無限小時會確定一個點。量子理論則來自微觀世界，從它的觀點，重合性事件或碰撞事件，即使發生在沒有空間大小的粒子間，也不是基本的，更談不上在時空中截然孤立。這兩種理論運用了不同的數學概念：分別是四維的黎曼空間（Riemann space）和無窮維的希爾伯特空間。迄今為止兩種理論尚未統一，即不存在一種數學表述，使得這兩種理論是它的逼近。所有的物理學家都認為這兩種理論的統合本質上是可能的，而且我們可以找到這個理論。儘管如此，也不難想像，我們可能始終找不到這兩種理論的統合。這個例子說明了前面提到的兩種可能性：統一或衝突，都是可以想見的。

為獲得最終是哪種可能性脫穎而出的暗示，我們可以假裝自己比現在更無知一些，假想我們的知識尚不及目前實際的水準。如果我們在這個較低的智力水準上能使這兩種理論融為一體，我們就有自信在實際的智力水準上能找到這種融合。另一方面，如果我們在較低的知識水準上得到了相互矛盾的理論，那麼我們就不能排除，這兩種理論可能會永遠相互衝突。知識和獨創性的層級是一個連續的變數，這種連續變數相對較小的變動，不太可能把不一致的世界圖像變為一致的[1]。

若由此觀點考量，我們明知有誤的某些理論卻給出了極為準確的結果，這會是一個負面的因素。假如我們略微無知些，則這些「錯的」理論所解釋的現象群組，在我們看來已多到足夠「證明」它們是正確的了。不過，這些理論之所以被我們認為是「錯的」，正因為是分析到最後，它們與範圍更全面的圖像相牴牾。如果足夠多的這種錯誤理論被發現出來，則必定會證實它們彼此矛盾。同理，某些被我們認為已經有夠多的數據吻合足以「證明」為真的理論，也可能因為會和一個更完整、但我們還無力去發現的理論相牴牾，因而是錯的。如果真是如此，那麼一旦理論的數目超過某一程度，理論涵蓋了足夠多組的現象，我們就將看到理論之間彼此衝突。對照上述理論物理學家的信條，這不啻是理論家的噩夢。

讓我們看看幾個「錯誤」理論的例子，我們著眼於它們雖然有錯，但卻能準確描述幾類現象。由於某種善良的動機，人們可以忽略這些例子提到的某些證據。波爾早年關於原子的開拓性想法所獲得的成功，與托勒密的周轉圓（epicycle）概念一樣，是相當狹隘的。我們目前所處的制高點，讓我們能精確描述這些比較原始的理論所描述的所有現象。而對於所謂的自由電子理論（free-electron theory），情況則大不相同。它極為精確地描述了金屬、半導體和絕緣體的許多性質，甚至可說是大多數性質。尤其是，它解釋了絕緣體電阻可以特別大，達到金屬電阻的 10^{26} 倍這一現象，這是根據「真實理論」無法恰當理解的。事實上，在自由電子理論預測絕緣體電阻值可以高達無窮大的實驗環境裡，沒有實驗證據表明絕緣體的電阻並不是無窮大。儘管如此，我們相信自由電子理論只是一種粗糙的逼近，應該被一種能更精確描述所有固體的理論來取代。

如果站在我們真正的制高點來看，自由電子理論所造成的局面很令人困擾，但它不像是在預告將出現無法克服的矛盾處境。自由電子理論反倒指出一些疑問，提醒我們應在多大程度上因為理論和實驗的數值一致就相信理論的正確性。我們早已熟習這樣的疑問。

假如有一天，我們能建立一種關於意識或生物學現象的理論，並且這理論能像我們現在關於物理世界的理論一樣一致和令人信服，則將出現更困難且更令人困惑的局面。孟德爾的遺傳定律以及關於基因的後續研究，也許會成為生物學中這種理論的起點。並且我們很可能可找到一種抽象的論證，指出這樣一種理論與公認的物理學原理有衝突。這種論證可能深具抽象的性質，使得我們不可能用實驗來化解這個衝突，以確定該接受哪一個理論。這樣的狀況對於我們繼續相信我們的理論，以及信賴我們所建立的概念的真實性，都會是莫大的考驗。它將給追求我所謂「終極真理」的努力，罩上深深的挫折感。這種局面之所以有可能，是因為我們根本不知道我們的理論為什麼會那麼管用。因此，它們的精確性並不能證明它們的正確與一致性。坦白說，如果能讓目前的遺傳學定律和物理學定律相較量，筆者相信將會出現類似上述場景的局面。

最後，讓我們用較愉快的語調來結束本文吧。數學語言在表述自然律時的適當性是一項奇蹟，它是我們既不理解也不配擁有的奇妙天賜。我們應當感激，也希望它在未來的研究中仍然有效。而且不論是好是壞，當我們盡情拓展知識領域時，即使會令我們困惑，也依舊成立。

筆者希望在此向以下各位致謝：博蘭尼（Michael Polanyi）博士，筆者多年前於知識論方面深受其思想澤被；巴格曼（Valentine Bargmann），他的善意批評對本文的明晰度俾益極大。此外也非常感謝西蒙尼（Abner Shimony）檢閱本文，並告知普爾斯的論文。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

本文出處

紐約大學庫朗數學科學講座講稿（1959 年 5 月 11 日），刊登於 *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13 （1960） p.1-14。

譯者簡介

島洋為臺大數學系系友。

延伸閱讀

▶ Wigner, E "Events, laws of nature, and invariance principles"，1963 年諾貝爾獎獲獎演講稿。見諾貝爾網站網頁 http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1963/wigner-lecture.pdf

▶ Hamming, R. W.，"The Unreasonable Effectiveness of Mathematics" *The American Mathematical Monthly* 87 (1980) no.2, MAA. 電腦學者對數學有效性的論述。JSTOR 線上免費閱讀網頁 http://www.jstor.org/discover/10.2307/2321982?uid=3739216&uid=2134&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21104179254853

若不想註冊，可見 https://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Hamming.html

▶ Lesk, A.M.，"The unreasonable effectiveness of mathematics in molecular biology" *The Mathematical Intelligencer* 22 （2000） issue 2。分子生物學家對數學有效性的論述。

❶ 本段是在極大的猶豫之下寫出。筆者相信在知識論的討論上，我們最好放棄人類智力水準在絕對標尺上具有獨一無二地位的想法。在某些情況下，去考量處於其他物種智力水準時可獲得的知識，甚至也會是有用的。然而，筆者也明白，我在本文行文理路下的思考仍過於簡略，所做的批判性評估還不足夠，因而還不太可靠。