鳥與蛙

作者：戴森 Freeman Dyson　譯者：趙學信

作者簡介：戴森是英國物理學家與數學家，任普林斯頓高等研究院教授凡 41 年，是未取得博士學位卻享有隆崇學術地位的特例。戴森興趣極廣，思想廣闊，超前時代，是典型的文藝復興人。科普著作極豐，文章散見於各雜誌媒體。

重點摘要

▶作者以笛卡兒和培根的思想為基型，認為數學家可粗分為鳥與蛙兩種類型。如鳥的學者以想像力為經，宏觀結構為緯，呈現數學之廣度。如蛙的學者從個別問題入手，陶冶細節，呈現數學之深度。兩者不可偏廢。

▶文中以多位與作者親近的師友學者為例，描述各人迴異之學術研究風格，並旁及其成就之特點與重要性。

▶作者從大自然的四個玩笑開始，探討數學與自然科學之間的巧妙關係，並探討未來數學應用之前景。最後以馬寧的數學隱喻做結，強調以清明的理性克服人類自毀的集體潛意識。

有些數學家是飛鳥，其他的是蛙。鳥兒高翔天際，遍覽直至天際的廣闊數學遠景，他們所喜愛的，是能統攝我們的思想、將散布於地上各處的種種問題整合起來的概念。青蛙住在泥地裡，只能看到長在附近的花朵。他們喜愛特定事物的細節，一次只解決一個問題。我剛好是一隻蛙，但是我的許多好友都是飛鳥。我今晚演講的主題是這樣的：數學需要鳥，也需要蛙。數學既豐富而且優美；因為有飛鳥賦予它寬闊的遠景，有蛙兒賦予它精緻的細節。數學既是偉大的藝術，也是重要的科學；因為它結合了概念的普遍性和結構的深刻性。倘若有人宣稱鳥兒因為看得更遼遠而勝過蛙，或是青蛙因為觀察更深刻而勝過鳥，兩種說法都是愚蠢的。數學的世界既廣闊又深刻，我們需要鳥與蛙齊心協力才能探索。

這場演講稱為愛因斯坦講座（Einstein Lecture）。我很高興美國數學學會邀我來向愛因斯坦致敬。愛因斯坦不是數學家，而是一位對數學有著愛憎情結的物理學家。他一方面對數學描述大自然運作的能力，有著無比的敬意。他對數學之美有著敏銳的直覺，所以才能循著正確的途徑找到自然定律。另一方面，他對純數學沒興趣，也沒有成為數學家的技術能力。他晚年時，以研究助理的名義聘用年輕同事來幫他做數學計算。他的思考方式是物理的，而非數學的。他在物理學家之中，是無比犀利、看得

最遠的飛鳥。因為我沒有什麼新意可闡發，關於愛因斯坦我就說到這裡。

培根與笛卡兒

十七世紀初有兩位偉大的哲學家，英國的培根（Francis Bacon）和法國的笛卡兒，宣告了現代科學的誕生。笛卡兒是鳥，而培根則是蛙。兩人分別描述各自所看到的未來，而他們所看到的非常不同。培根說：「一切取決於目光緊盯住大自然的事實。」笛卡兒則說：「我思，故我在。」根據培根的觀點，科學家應該遊歷各地，蒐集事實，直到所積累的事實足以彰顯大自然如何運作，然後科學家再從事實中歸納出大自然所遵循的定律。根據笛卡兒的觀點，科學家應該待在家裡，純由思考推導出自然律。要正確地推導定律，科學家只需要邏輯法則，並且確知上帝存在即可。自培根、笛卡兒以來四百年，科學同時循著這兩條道路奮進。單憑培根的經驗主義或笛卡兒的教條主義（dogmatism），都無法闡明大自然的奧祕，然而一旦兩者合併，

培根

笛卡兒

則有驚人的成效。四百年來，英國科學家傾向於培根，法國科學家則傾向於笛卡兒。法拉第、達爾文和拉塞福（Ernest Rutherford）是培根主義者，帕斯卡（Blaise Pascal）、拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace）和龐卡赫是笛卡兒主義者。這兩種對比明顯的文化彼此相互澆灌，大大豐盈了科學本身。兩種文化也始終並存於兩國。牛頓本質上是笛卡兒主義者，他按笛卡兒的想法使用純粹思考，卻摧毀了笛卡兒的渦流說教條。居里夫人（Marie Curie）本質上是培根主義者，她燒融了數以噸計的原鈾礦，結果摧毀了原子不滅的教條。

二十世紀數學史上有兩樁決定性的事件，其中之一屬於培根主義傳統，另一樁屬於笛卡兒主義傳統。第一個事件是 1900 年在巴黎舉辦的世界數學家大會（ICM），希爾伯特（David Hilbert）在該次大會的全會演講中，提出了他著名的 23 個未解問題，指引出數學在新世紀的發展途徑。希爾伯特本人像是鳥兒，高高飛翔在整個數學領域的上空，但他提出問題的對象是青蛙型的數學家，讓他們一次解決一個問題。第二個決定性事件是 1930 年代在法國由一群飛鳥型數學家組成的布巴基社群（Bourbaki group）。他們致力於出版一系列的教科書，以期建立起統合所有數學的架構。希爾伯特問題非常成功地指引數學研究走向豐碩的發展方向。其中有些問題已解決，有些仍然未解，但幾乎每一個問題都激發出數學的新理念和新領域。布巴基計畫同樣也是影響深遠。它改變了其後五十年的數學風格，賦予數學先前不曾存在的邏輯一貫性，把強調的重點從具體實例轉移到抽象一般性。在布巴基擘畫的架構下，數學就是寫在布巴基教科書裡的抽象結構，不在書裡的就不是數學。具體實例既然沒出現在書裡，所以不是數學。布巴基綱領是笛卡兒風格的極致表現。它摒棄了培根主義旅人沿途採集的花朵，從而窄化了數學的視域。

大自然的玩笑

以我這樣的培根主義者來看，布巴基綱領遺漏的東西最主要的是驚奇的要素。布巴基綱領試圖讓數學的一切合乎邏輯，但當我觀察數學史之時，我看到的是一連串不合邏輯的跳躍、不可能的巧合，還有大自然的玩笑。大自然所開的最深刻的玩笑裡，一個例子是薛丁格在 1926 年發明波動力學時，在他的波方程裡加入的-1 的平方根。薛丁格是飛鳥型的學者，他的出發點在於把力學與光學統一起來。在他之前一百年，漢米爾頓（William Hamilton）藉由使用相同的數學來描述光線和古典粒子的路徑，已經將古典力學和幾何光學統一起來了。薛丁格的想法是把這個統一架構推廣到波動光學和波動力學。當時已經有波動光學了，但是波動力學還不存在，薛丁格必須發明波動力學，才能完成這項統一事業。一開始，他以波動光學為藍本，寫下力學粒子的微分方程，但是這方程完全不合理——他的式子像是在連續介質中的熱傳導方程。從熱傳導看不出和粒子的力學有任何關聯。薛丁格的想法似乎掉進了死胡同。然後，驚喜就來了。薛丁格把-1 的平方根放進式子裡，突然之間一切都合理了。突然之間，式子變成了波方程，而不是熱傳導方程。而且薛丁格很高興地發現，方程的解對應到波耳原子模型的量子化軌道。

結果，薛丁格方程正確描述了我們已知的原子的一切行為，它是所有化學和大部分物理學的基礎。式子中的-1的平方根意味著大自然是以複數、而非實數來運作。此一發現完全出乎薛丁格的意料，也出乎眾人的意料。據薛丁格說，他十四歲的女性朋友容格爾（Itha Junger）當時對他說：「嘿，一開始時連你也沒想到，它會得出那麼多合理的東西吧！」整個十九世紀，從阿貝爾（Niels Abel）到黎曼（Georg Riemann）、懷爾斯查司（Karl Weierstrass）等數學家已經發展出非常精采的複變函數論。他們發現當把函數論從實數擴展到複數時，理論變得遠遠更深刻，威力也更大。但他們始終把複數看成是人為建構的，是由數學家發明出來，作為現實世界的一種有用且優雅的抽象。他們絕不會想到，這個人為發明的數系其實正是原子運動的基礎。他們絕對料想不到，大自然早在他們之前就運用虛數了。

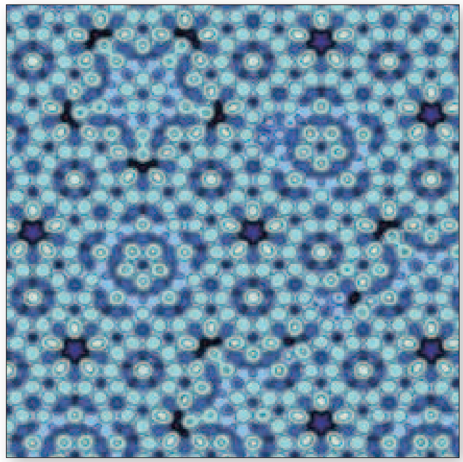
大自然的另一個玩笑是量子力學精確的線性性質，意思是：任何物理對象的可能狀態，構成了一個線性空間。在量子力學發明之前，古典力學總是非線性的，線性模型只是逼近的成立。但在量子力學之後，大自然突然變成線性的。這對數學有著深遠影響。十九世紀時，李（Sophus Lie）發展出精微的連續群理論，用以釐清古典動力系統（dynamical system）的行為。當時的數學家和物理學家對李群毫不感興趣。李群的非線性理論對數學家而言太過複雜，對物理學家而言太過晦澀。李只能抱憾而終。然而五十年之後，人們發現大自然居然是線性的，而李代數的線性表現論（theory of linear representations）正是粒子物理的自然語言。李群和李代數重獲新生，成為二十世紀數學的核心主題。

大自然的第三個玩笑是準晶體（quasi-crystals）的存在。十九世紀的晶體研究，已經能完全枚舉歐氏空間中所有可能的離散對稱群。已證明的定理指出，三維空間中的離散對稱群只能包含三階、四階和六階的旋轉。然後在 1984 年，準晶體被發現了，從液態金屬合金中產生的真實固體，呈現出二十面體群（icosahedral group）的對稱，其中包含五階旋轉對稱。同時，數學家潘洛斯（Roger Penrose）發現了平面的潘洛斯鋪磚。這是用菱形非週期地鋪滿整個平面，並形成五邊形長程序態（pentagonal long-range order）。合金準晶體是二維潘洛斯鋪磚的三維類比。在這些發現之後，數學家必須擴大晶體群的理論以包納準晶體。這是一個仍在進行中的重要研究課題。

準晶體與黎曼假說

大自然的第四個玩笑是準晶體和黎曼ζ函數零點之間的行為相似性。數學家對ζ函數的零點大感興趣，因為已知的零點總是落在一條直線上，沒有人知道其原因為何。「除了無聊的零點之外，這些零點必定落在一條直線上」的命題，即是著名的黎曼假說。證明黎曼假說是百餘年來眾多年輕數學家的夢想。我在此大膽建議：我們或許能用準晶體來證明黎曼假說。在座的各位數學家或許會認為這個提議像是胡鬧，在座中的非數學家則可能不感興趣。但我仍籲請諸位認真考慮。當物理學家西拉德（Leó Szilárd）年輕時，他對摩西十誡很不滿意，於是寫了一組新的十誡來取代它。西拉德的第二誡是：「你應朝向崇高的目標行事，而不要問能否達到目標。行為是要能成為典型與模範，並非達成目標的手段。」西拉德親身實踐他自己的信條。他是第一個想像以核能做武器的物理學家，也是率先積極推動禁用核武的物理學家。他的第二誡在此非常適用。證明黎曼假說是一項崇高的目標，我們不必去問是否能在我們手中完成。接下來我要說的是怎樣達成這目標的可能提示。在此，我要先以我五十年前、在成為物理學家之前的數學家身分來發言。我會先談黎曼假說，然後再談準晶體。

直至最近，純數世界裡有兩大未解難題：證明費馬最後定理，以及證明黎曼假說。十二年前，我在普林斯頓的同事懷爾斯（Andrew Wiles）最終完成費馬最後定理的證明，於是只剩下黎曼假說。懷爾斯證明費馬最後定理，並不只是高超的特技表演，它還需要發現和探索新的數學思想領域；這遠比費馬最後定理本身意義更大，而且影響更深遠。黎曼假說的任何證明，很可能也會使我們得到對許多不同數學領域、甚至是物理學領域的更深刻理解。黎曼ζ函數和其他類似的ζ函數，在數論、動力系統、幾何學、函數論，乃至在物理學中處處可見。ζ函數像是位於一個通往各處的中央車站，證明黎曼假說將可闡明所有這些連繫。當我年輕時，我就像所有學習純數的認真學生一樣，夢想能夠證明黎曼假說。當時我有一些模糊的想法，是我覺得可用來證明的。當準晶體在最近被發現後，我的想法變得比較清晰了。我在此提出來，供任何有志贏取費爾茲獎的年輕數學家參考。


鋁鈀錳合金準晶體之原子模式

準晶體可以存在於一維、二維或三維空間。從物理學的觀點來看，三維準晶體是最有趣的，因為它們就存在於我們的三維世界，可以用實驗來研究。從數學的觀點來看，一維準晶體遠比二維或三維的要有趣得多，因為它們的種類遠遠更為豐富。準晶體的數學定義是這樣的：準晶體是一種離散點質量的分布，且其傅立葉變換是一種離散點頻率的分布。或者說得再更簡短：準晶體是具有純粹點譜的純粹點分布。普通晶體是這個定義的特例，它是具有週期譜的週期分布。

排除掉普通晶體，三維的準晶體只有非常少數幾種，每一種都和二十面體群有關。二維準晶體就多得多，大致而言，每一個正多邊形就對應到一類準晶體。具有五邊形對稱的二維準晶體就是著名的潘洛斯平面鋪磚。最後，一維準晶體因為不受限於旋轉對稱，所以具有遠遠更為豐富的結構。就我所知，目前還沒有一維準晶體的完整枚舉。已知的是，每一個 PV 數（Pisot-Vijayaraghavan number, PV number）就對應到一種唯一的準晶體。PV 數是大於 1 的實代數整數，它是整係數多項式方程的根，且該式所有其他根的絕對值小於 1，參見 [1]。PV 數的數目無窮多，而且構成一種獨特的拓樸結構。由所有一維準晶體所構成的集合，其結構至少與所有 PV 數所構成的集合一樣豐富，甚至還遠勝過後者。關於這一點還不確定，或許正有一宇宙和 PV 數無關的一維準晶體等待我們去發現。

接下來要談到一維準晶體和黎曼假說的關係了。假如黎曼假說成立，那麼根據定義，ζ函數的零點形成一個一維準晶體。它們構成直線上的點質量分布，而它們的傅立葉變換同樣也是點質量分布，變換後的點位於每一個質數或其自然冪次的自然對數值上。我的朋友歐利茲柯（Andrew Odlyzko）曾針對ζ函數零點的傅立葉變換，發表了一篇優美的電腦計算 [6]。他的計算正顯示了所預期的傅立葉變換的結構，唯有在每個質數或其自然冪次的自然對數值會有尖銳的不連續，其他地方則沒有。

我的提議如下。我們暫且假裝不知道黎曼假說是否正確，然後從另一頭來處理這個問題。我們先試著進行一維準晶體的完全枚舉和分類，也就是說，我們對所有具備離散點譜的點分布，進行枚舉和分類。對新品種的物體做蒐集和分類，是最典型的培根式活動，非常適合青蛙型的數學家。然後我們將

發現已經很熟悉的 PV 數準晶體，以及各式各樣的其他準晶體，有的已知、有的未知。在眾多的準晶體裡，我們搜尋對應到黎曼 ζ 函數的準晶體，此外還有每個與黎曼 ζ 函數類似的 ζ 函數，也各有一個對應的準晶體。如果在我們的名單中找到一個準晶體，其性質符合黎曼 ζ 函數的零點，那麼我們就證明了黎曼假說，而且可以等著費爾茲獎的通知電話。

這當然只是異想天開。一維準晶體的分類問題極其困難，可能至少和懷爾斯花了七年時間去鑽研的那些問題一樣困難。但如果我們採取培根式的觀點，數學史就是一代代全然無知的初生之犢，去解決恐怖難題的歷程。準晶體的分類是值得努力的目標，而且甚至可能做得到。這種難度的問題不是像我這樣的老人能解的，我將它留給在座的青蛙型年輕學者當習題。

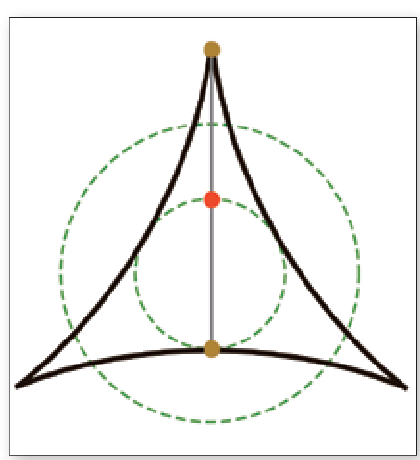
貝西柯維契

再來我要介紹幾位我所認識的飛鳥型和青蛙型的著名學者。我是在 1941 年進劍橋大學唸書的，而且非常幸運，我的導師是俄國數學家貝西柯維契（Abram Samoilovich Besicovitch）。因為當時正值第二次世界大戰，劍橋的學生人數很少，研究生更是寥寥無幾。所以雖然我年僅 17 歲，而貝西柯維契已是知名教授，他仍對我付出相當多的時間與關注，後來我們成為畢生的好友。他樹立了我研究和思考數學的風格。他教的測度論和積分課非常精采，當我們嘲笑那慘遭他蹂躪的英語時，他只回報以和藹的微笑。我記得只有一次，因為被我們的大笑搞得有點惱怒，他停了一會兒不出聲，然後說：「各位先生，五千萬的英國人說著你們那種英語，但是有一億五千萬的俄國人說的是我這種英語。」


貝西柯維契

貝西柯維契是青蛙型學者，他在年輕時即因為解決基本平面幾何裡的掛谷問題（Kakeya problem）而成名。掛谷問題是這樣的：一條長度為 1 的線段在平面上自由移動並同時做旋轉，當線段旋轉了 360 度時，所掃過區域的最小面積為何？這問題是日本數學家掛谷宗一於 1917 年提出的，其後十年成為一道著名的待解難題。美國當時的數學界領袖柏克霍夫（George Birkhoff）公開宣稱，掛谷問題可以和地圖著色的四色問題並列為當前最特出的未解問題。當時的人大多相信最小面積是 $\pi/8$，也就是三尖內擺線（3-cusped hypocycloid）的面積。三尖內擺線是一條有三個尖的美麗曲線，它是當一個半徑為 1/4 的小圓，在一個半徑為 3/4 的大圓內貼著大圓圓周滾動時，小圓圓周上的一點所畫出的軌跡。

把長度為 1 的線段置於前述三尖內擺線內、且兩端點位於內擺線上，當線段轉動時，除了兩端點維持在內擺線上之外，必定會有一點與內擺線相切。線段轉動的同時永遠有三點落在內擺線上，這幅景象非常優雅，使得大多數的人都相信它必定是最小面積。然後出乎所有人的預料，貝西科維契證明了線段移動並旋轉所掃過的面積，可以小於任意的正數。


三尖內擺線。（Claudio Rocchini 原製，本刊重製）

其實早在

1920 年、掛谷問題還不為人所熟知時，貝西科維契即已提出了解答，當時他甚至不知道掛谷宗一提出了這個問題。1920 年時，他在流傳不廣的《佩爾姆物理與數學學會期刊》（*Journal of the Perm Physics and Mathematics Society*）上，以俄文發表了解答。佩爾姆位於莫斯科以東 1100 公里，它的大學在俄國大革命後，成為許多傑出數學家的臨時避難所。這份期刊出版了兩卷，然後就在革命與內戰的動盪之中夭折。在俄國之外，這份期刊不僅鮮為人知，而且難以取得。貝西科維契在 1925 年離開俄國，抵達哥本哈根後，才得知他五年前解出的題目是出名的掛谷問題。於是他又再寫出解答，這次是以英文發表在德國的《數學期刊》（*Mathematische Zeitschrift*）上。原始形式的掛谷問題是標準的青蛙型問題——題目很具體，而且和其他數學沒什麼關聯。貝西科維契給出了優雅、深刻的解答，闡明了這個題目其實連繫到關於平面點集結構的一般定理。

最能完美展現貝西科維契風格的是發表在德國的《數學年刊》（*Mathematische Annalen*）上，以〈論線性可測平面點集的基本幾何性質〉（On the fundamental geometric properties of linearly measurable plane sets of points）為題的三篇經典論文（分別於 1928、1938、1939 年刊載）。他在這三篇論文裡證明了平面上每個線性可測集，都可分成一個正則的和一個非正則的部分。其中，正則的部分幾乎處處都有切線，而非正則的部分則幾乎在所有方向投影的測度皆為零。大致來說，正則部分看起來像連續曲線的組合，而非正則部分看起來一點兒都不像連續曲線。非正則部分的存在及其性質，和貝西科維契如何解決掛谷問題有關。他給我的一個研究題目是把更高維空間裡的可測集，分成正則和非正則兩部分。我在這問題上毫無進展，但是他的風格卻永遠銘刻在我心中。貝西科維契的風格像是建築。他用簡單的元素，建造出精緻複雜、通常是層級分明的建築物；然後當建築物完成後，又用簡單的論證將這完成的結構引導至出乎意料的結論。貝西科維契的每個證明都是細心構築的藝術品，一如巴哈的賦格曲。

魏爾

在我受業於貝西科維契之後過了幾年，我來到普林斯頓，並結識了魏爾（Hermann Weyl）。如果說貝西科維契是典型的青蛙，魏爾就是典型的飛鳥。在魏爾從普林斯頓高等研究院退休、回到蘇黎士老家之前，我很幸運地和他有一年的共事時間。他對我印象很好，因為那一年我在美國的《數學年刊》（*Annals of Mathematics*）發表了數論的論文，在《物理評論》（*Physical Review*）發表了量子輻射理論的論文。魏爾是當時世上少數幾個能夠同時悠遊於這兩個領域的人之一。他歡迎我來到研究院，期望我能和他一樣成為飛鳥。我令他失望了，我仍固執地當一隻蛙。雖然我探索了各式各樣的主題，但我一次只能做一個題目，沒去找出它們之間的關連。對我而言，數論和量子論是兩個不同的世界，各自有其優美之處。我並未像魏爾那樣，試圖從中找到大自然宏偉設計的線索。

魏爾對量子輻射理論的最大貢獻是他發明了規範場（gauge field）。規範場理論的發展有一段有趣的歷史。魏爾在 1918 年，為了統一廣義相對論和電磁理論，作為一種古典的場而發明了它。[7] 因為這種場是關於長度測量的不可積性，所以他將之命名為「規範場」。他的統一理論立即被愛因斯坦公開否決。遭到


魏爾

從天庭發出的雷霆一擊之後，魏爾並未放棄他的理論，而是轉而研究其他課題。他的理論沒有可供檢驗的實驗結果。到了 1929 年，當其他人發明了量子力學之後，魏爾才明白他的規範場放在量子世界裡，會遠比在古典世界更為適切。[8] 要把古典規範場改成量子規範場，只需要把實數改成複數就行了。在量子力學裡，每個電荷量子攜帶了一個具相位的複數波函數，而規範場就是關於其相位的不可積性的測量。於是規範場就和電磁勢精確地等同起來，而電荷守恆定律也就是規範場論的局部相位不變量的結果。

魏爾在退休回到蘇黎士的四年後辭世。我為他寫了一篇追悼文刊載在《自然》（*Nature*）期刊上 [3]，其中寫道：「在二十世紀展開研究生涯的數學家裡，魏爾是唯一能在最多不同領域都做出重大貢獻的一位。他卓然而立，足以和十九世紀最後的兩大數學通才，希爾伯特和龐卡赫相比肩。當他在世時，他是純數學和理論物理齊頭並進、緊密連繫的活生生表徵。如今他去世，這連結也就斷了，而我們希望直接使用創造性的數學想像來理解物理世界的企圖，也暫時告一段落。」我哀悼他的去世，但無意追尋他的夢想。我很樂於見到純數和物理的發展分道揚鑣。

悼文的結尾描寫的是魏爾人性的一面：「魏爾的性格特點是，美學品味主導了他對一切學識的思考。他曾半開玩笑地對我說：『我的研究永遠試圖將真與美結合；但若兩者只能擇其一，我選擇的通常是美。』這句話完美地概括了他的人格，顯示出他深深相信大自然最終極的和諧，因而自然律必然是以數學上優美的形式表現出來。這同時也顯示了他體認到人的脆弱，再加上他的幽默，使得他不至流於浮誇。魏爾留在我們這些普林斯頓朋友心中的，會是去年四月他在高等研究院春季舞會時的模樣──心情很好的大個子，玩得很愉快；他興高采烈、腳步輕快，完全看不出已有六十九歲。」

魏爾去世後的五十年是實驗物理和觀測天文學的黃金年代，是蒐集事實的培根式旅人、探索居處周遭小片濕地的蛙兒的黃金年代。在這五十年裡，關於各式各樣的宇宙結構以及各式各樣的粒子和交互作用，青蛙們累積了詳盡的知識。隨著物理學家持續探索新領域的同時，宇宙也變得更複雜。探險家發現的不是以魏爾的數學展現出簡潔與優美的閎大設計，而是像夸克、γ射線爆發之類的奇怪物體，像超對稱、多重宇宙之類的奇怪觀念。同時，由於探討混沌現象及其他各種由電腦而開啟的新領域，數學同樣也變得更複雜。數學家發現可計算性（computability）的核心之謎，是一個可以表成 $P \neq NP$ 的猜想。這個猜想斷言，有些數學問題若以個別案例來處理，可以迅速解決，但卻沒有適用於所有情形的快速算則。這類問題最有名的例子是旅行推銷員問題：有一個推銷員要到好幾個城市，若任兩城之間的距離已知，試找出他旅行的最短路徑。所有專家都相信這個猜想是對的，也相信旅行推銷員問題是一個 NP 但不是 P 的問題，但大家對於如何證明它卻沒有絲毫頭緒。在魏爾的十九世紀數學世界裡，這個問題甚至是沒辦法表述的。

楊振寧

對飛鳥型學者來說，最近五十年是一段艱苦歲月。但即使歲月艱苦，仍然有事情可做，而飛鳥們也仍奮發從事研究。在魏爾離開普林斯頓後不久，楊振寧從芝加哥過來，搬進魏爾的舊宅。楊振寧接替魏爾的位子，成為我們這一代物理學家領頭的飛鳥。在魏爾仍在世時，楊振寧和他的學生米爾斯（Robert Mills）發現了非交換規範場的楊 / 米爾斯理論，這是魏爾的規範場極其優雅的推廣 [11]。魏爾的規範場是一種古典量，滿足乘法交換律。楊 / 米爾斯理論的規範場則是不可交換的三元組。它們滿足量子力學自旋三個分量的交換規則，是最

簡單的非交換李代數 A_2的生成元。這理論後來又得到推廣，使得其規範場可以是任何有限維李代數的生成元。有了這個推廣之後，楊 / 米爾斯規範場論提供了可解釋所有已知粒子和交互作用的模型架構，這模型現在稱為粒子物理的標準模型。楊振寧又論證，只要讓克里斯多福三標數符號（Christoffel three-index symbol）扮演規範場的角色，則愛因斯坦的重力理論也符合相同的架構，又再為這理論添上一筆 [10]。

魏爾在 1955 年為慶祝他的七十壽辰而選編的論文集裡，替他的 1918 年論文加寫了評註，其中表達了他對規範場理論的最終想法 [12]：「支持我理論的最強論證似乎是這樣的：規範不變性與電荷守恆的關係，正如同時空坐標不變性與能量、動量守恆的關係。」（戴森自譯）三十年之後，楊振寧在蘇黎士紀念魏爾的百歲誕辰時，在演講 [12] 中也引用了這句話，以證明魏爾是如何專心致志於以規範不變性作為物理學統攝原理的想法。他繼續說道：「由於理論和實驗的進展，人們現已清楚地認識到，對稱性、李群和規範不變性在確定物理世界的基本力時，起著決定性的作用。我把這個原則稱為對稱性支配交互作用。」對稱性支配交互作用的理念，是楊振寧對魏爾那句評語的推廣。魏爾觀察到，規範不變性與物理守恆定律密切相關，但因為他只知道可交換場的規範不變性，所以他的理論沒辦法再往前推展。楊振寧引入非交換規範場，於是建立起遠遠更強的連繫。藉由非交換規範場生成不無聊的李代數，場之間交互作用的可能形式就變成唯一，所以對稱性支配了交互作用。這個想法是楊振寧對物理學最偉大的貢獻。這是飛鳥才能有的貢獻，因為他們飛翔的高度遠超過我們大多數人所在的、由枝節問題所構成的雨林之上。


楊振寧

馬寧

另一位令我深懷敬意的飛鳥型學者是俄國數學家馬寧（Yuri Manin），他最近出版了一本精采的文集，書名是《作為隱喻的數學》（*Mathematics as Metaphor*）[5]。這本書是以俄文在莫斯科出版，英文版則是由美國數學學會出版。我為英文版寫了一篇序，請容我在此唸一段序文的話：

作為隱喻的數學是飛鳥型學者極佳的口號。它意味著數學中最深刻的概念是那些能夠連結兩個理念世界的。17 世紀時，笛卡兒以坐標的概念，把代數和幾何這兩個相異世界連結起來。牛頓用流數、也就是現在稱為微積分的概念，把幾何和力學的世界連結起來。在 19 世紀，布爾（George Boole）用符號邏輯的概念把邏輯和代數的世界連結起來，而黎曼用黎曼面的概念把幾何和分析學的世界連結起來。坐標、流數、符號邏輯和黎曼面都是隱喻，把字詞的意義從熟悉的脈絡延伸到陌生的脈絡。馬寧認為數學的未來是去探索那些已經看得見、但尚未被理解的隱喻。這裡頭最深刻的隱喻是數論和物理學在結構上的相似性。他在這兩個領域都隱約窺見了相彷彿的概念，亦即將連續和離散連結起來的對稱性。他期望能看到他稱之為數


馬寧

學的量子化的統一。

馬寧不同意培根式的故事情節——當希爾伯特於1900年的巴黎世界數學家大會上提出他著名的23個未解問題時，他也就設定了20世紀數學的走向。根據馬寧的看法，希爾伯特的問題反而讓人從數學的核心主題分心。他認為數學的重要進展是來自於研究綱領，而非來自於問題。問題往往是以新方法運用舊觀念而得以解答。研究綱領才是培育新觀念的搖籃。他認為，試圖以更抽象的語言重寫整個數學的布巴基綱領，是二十世紀許多新觀念的源頭。而試圖統一數論與幾何的朗蘭茲綱領，則很可能蘊育出二十一世紀的新觀念。解出著名數學難題的人或許能贏得大獎，但開創新綱領的人才是真正的拓荒者。

英文版的《作為隱喻的數學》比俄文版少了十章，因為美國數學學會認為英文讀者不會對這些章節有興趣。這種省略所造成的遺憾有兩重。其一、英文版讀者所看到的，只是刪節過的馬寧觀點，而他在數學之外的廣泛涉獵，在數學家裡是極罕見的。其二、我們看到的，是被刪節過的俄羅斯文化景觀；在俄國，各領域間的分野並不像英語文化圈那樣涇渭分明，數學家和歷史學者、藝術家、詩人等的接觸更為密切。

馮諾曼

二十世紀數學的另一個重要人物是馮諾曼。馮諾曼是青蛙型學者，運用他極其高超的技巧解決了數學和物理裡許多領域的問題。他一開始研究的是數學基礎，提出了第一組令人滿意的集合論公設，避免了康托在處理無窮集和無窮大數時所遇到的邏輯悖論。數年後，馮諾曼的朋友、飛鳥型學者的哥德爾（Kurt Gödel）運用他的公設證明了數學中存在無法判定的命題。哥德爾的定理賦予飛鳥型學者新的數學視野。後此之後，數學不再是用唯一一種真理概念維繫起來的單一建築物，而是具有各種公設系統以及各種真理概念的建築群。哥德爾證明了數學是無法窮盡的。不論選擇哪一組公設作為基礎，數學飛鳥們總是能找到這些公設無法回答的問題。


馮諾曼

馮諾曼接著轉而研究量子力學的基礎。為了賦予量子力學一個穩固的數學基礎，他創造出非常精采的算子環（rings of operators）理論。每一個可觀測量都由一個線性算子來代表，而量子行為的特質都由算子的代數性質忠實地表現出來。就像牛頓發明了微積分以描述古典力學，馮諾曼則是發明了算子環以描述量子力學。

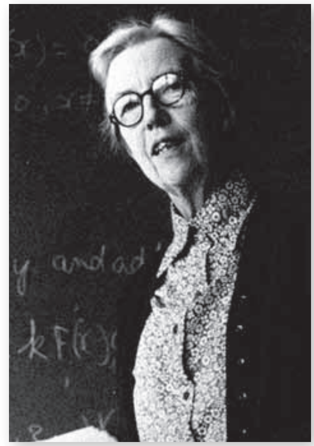
馮諾曼還在其他幾個領域做出了基礎性的貢獻，特別是對局論和電腦的設計。馮諾曼的最後十年，深深地沉浸在電腦之中。他對電腦的興趣強烈到不只是研究電腦的設計，而且還用真正的硬體和軟體造出一部電腦，並且用它來做科學研究。我仍清楚記得馮諾曼在高等研究院裡，剛開始進行電腦計畫時的景象。那時他的科學興趣主要有兩項：氫彈和氣象學。他在晚上用電腦做氫彈計算，白天則做氣象學。白天待在電腦館的人大多是氣象學家，他們的負責人是查爾尼（Jule Charney）。查爾尼是真正的氣象學家，在面對變幻莫測的天氣時，能適度地保持謙虛，而且也懷疑電腦真的能解開天氣之謎。馮諾曼既沒那麼謙虛，也沒那麼存疑。我聽過一場馮諾曼談論他的研究目標的演講。他一如既往，言談中充滿自信。他說：「電腦將能讓我們把任一時刻的大氣分成穩定區域和不穩定區域。對於穩定區域，我們可以預測；對於不穩定區域，我們

可以控制。」馮諾曼相信任何不穩定區域，都可藉由審慎施加的小幅擾動力量加以推動，使其移往我們希望的任何方向。實施這種小幅擾動的是一群載著製煙設備的機隊。這些飛機飛到擾動最有效的地方，藉由煙霧來吸收陽光、提高或降低溫度。尤其是，對於即將形成颶風的區域，只要我們能及早確定不穩定處的位置，然後冷卻該地的空氣，即可阻止其溫度上昇產生氣旋，如此也就消除了颶風。

馮諾曼的演講是在 1950 年，當時他宣稱只要再十年，電腦的運算能力就足以鑑別大氣中的穩定和不穩定區域。一旦能做精確鑑別，那麼只要再花一點時間，我們就能控制天氣。他預估到了 1960 年代，實際控制天氣會是很平常的例行公事。

馮諾曼當然錯了。他之所以犯錯，是因為他不知道混沌（chaos）。我們現在知道，當大氣的流動是局部不穩定時，它通常是混沌的。「混沌」這個詞指的是，初始狀態很接近的兩個運動，會隨時間推移而產生指數性的差距。如果一個運動是混沌的，它會變得無法預測；小幅擾動並不能讓它變成可預測的穩定運動，通常只是把它變成另一個同樣無法預測的混沌運動。所以馮諾曼控制天氣的策略失敗了。他雖然是一位大數學家，但終究只是個平庸的氣象學家。

勞倫茲（Edward Lorenz）在 1963 年發現，氣象學方程的解通常是混沌的，那時馮諾曼去世已六年。勞倫茲是氣象學家，一般公認他是混沌的發現者。他發現氣象中的混沌現象，並賦予其現代名稱。但其實早在 1943 年，我就在劍橋的一場演講裡聽過數學家卡特萊特（Mary Cartwright，她在 1998 年以 97 歲的高齡辭世）描述相同的現象，這比勞倫茲的發現還早二十年。雖然她用的名稱不同，但現象是相同的。她是在求解描述非線性放大器振盪的凡德波爾方程（Van der Pol equation）時發現它們的 [2]。第二次世界大戰時，因為在早期雷達系統裡是由非線性放大器負責輸送功率給發送器，所以凡德波爾方程非常重要。當時發送器的行為常出錯，英國空軍認為廠商製造的放大器有瑕疵，他們請卡特萊特查看這個問題。她查明了問題不是出在製造商，而是凡德波爾方程。凡德波爾方程的解正是空軍所抱怨的混沌行為。我在聆聽馮諾曼的氣象控制演講之前七年，就聽過卡特萊特講述混沌，但我沒有足夠的遠見能看出其中關連。我從不曾想過，凡德波爾方程頻出岔錯的行為，或許和氣象有相似之處。如果我是鳥而不是蛙，我或許能看出其中關連，因而能幫馮諾曼省去很多工夫。如果他在 1950 年就知道混沌，他或許就會深刻地思考它，然後在 1954 年時，對這題目發表些重要的洞察。


卡特萊特

馮諾曼的晚年陷入了某種困境。因為他其實是青蛙型學者，但每個人都期待他像鳥一樣高飛。1954 年時，世界數學家大會在阿姆斯特丹舉行。數學家大會每四年舉行一次，能受邀在開幕當天演講是莫大的榮譽。阿姆斯特丹大會的籌辦者邀請馮諾曼做全會演講，期望他能重演希爾伯特 1900 年在巴黎大會上的歷史性一幕。就像希爾伯特提出了一系列待解的問題引導二十世紀前半期的數學發展，他們希望馮諾曼能為二十世紀的後半期提出一份清單。馮諾曼的演講題目列在大會程序冊上：「數學的未解問題（籌備委員會邀請演講）」。大會結束後出版論文集，收入所有的演講稿，唯一的例外就是這一場。在論文集裡，翻到這一頁，只會看到馮諾曼的名字和講題，下面寫著：「本場演講無原稿。」

發生什麼事？我知道是怎麼回事。因為當時當地── 1954 年 9 月 2 日星期四，下午三點，阿姆斯

特丹音樂會堂（Concertgebouw）的大廳——我就坐在觀眾席裡。大廳裡坐滿了數學家，全都期待能聽到與這個歷史性時刻相稱的精采演講。結果它是一場很失敗的演講。馮諾曼大概是幾年前就答應要談數學的未解問題，然後就忘了這件事。因為有太多事情要忙，他就疏忽了演講的準備工作。然後在最後一刻，當他想起要去阿姆斯特丹談談數學時，他從某個抽屜裡找出一份塵封已久的 1930 年代講稿，打算舊稿新用。這講稿是關於算子環的，它在 1930 年代是既新又時髦的題目。但它和未解問題無關，和未來無關，也和馮諾曼當時最心愛的題目「電腦」無關。如果談的是電腦，他至少應該會有些新鮮、令人興奮的內容可說。音樂廳裡的聽眾開始騷動起來。有個人用大得足以讓所有人都聽得見的音量，用德語說：Aufgewärmte Suppe，意思是「回鍋重熱的湯」。當年絕大多數數學家的德語能力都足夠聽懂這個笑話。馮諾曼深感困窘，匆匆結束他的演講，不等人發問就離開了。

弱混沌

如果馮諾曼在阿姆斯特丹時就知道混沌現象，弱混沌可能會是他提到的一個待解問題。弱混沌問題在五十年後仍未解決。這個問題是要瞭解，為何混沌運動往往是有範圍的，而不會造成劇烈的不穩定。弱混沌的一個典型例子，是太陽系裡行星和衛星的軌道運動。人們直到最近才發現這些運動是混沌的。這是一項驚人的發現，因為傳統一向認為太陽系是有秩序穩定運動的典範。早在兩百年前，數學家拉普拉斯認為他已經證明了太陽系是穩定的，結果拉普拉斯是錯的。對軌道所做的精確數值積分明確顯示，鄰近的軌道會呈指數性發散。混沌在古典力學的世界裡，似乎是無所不在的。

因為太陽系的混沌很弱，所以在精確計算長時段積分之前，人們從不曾想過它會有混沌行為。弱混沌意味著鄰近的軌道會指數性發散，但不會離開太遠。發散一開始呈指數性成長，但之後就一直是有界的。因為行星運動的混沌很弱，太陽系才能維持長達四十億年之久。雖然行星運動是混沌的，但它們絕不會離開它們的適當位置太遠，所以整體系統也不致崩潰。儘管混沌普遍存在，但把太陽系看成是完美鐘錶機件的拉普拉斯式觀點，仍然近乎事實。

我們在氣象學裡也可看到相同的弱混沌現象。雖然紐澤西的天氣一向混沌不定，但這混沌有明確的極限。夏季、冬季的天氣有時會超乎預期的怡人或酷烈，但我們總能很放心地預期氣溫不會高於攝氏 45 度或低於零下 30 度，而在印度和明尼蘇達州就經常超過這兩個極端。並沒有哪條物理守恆律禁止紐澤西的氣溫上升到和印度一樣高，或降到和明尼蘇達一樣低。混沌的微弱，對於生命能夠長期在地球上存活是很重要的。弱混沌讓我們的天氣複雜多變，但又不會太過劇烈波動，以致難以生存。我們現在還不明白，混沌為何如此寬待我們。這是在座的青蛙型年輕學者可以帶回家的另一個未解問題。我希望你們能解答：為什麼在各式各樣的動力系統中所觀察到的混沌現象，通常都是弱混沌？

混沌這個主題的特色是：豐富的計量資料、無窮無盡的美麗圖片，但卻缺乏嚴格的定理。嚴格的定理是賦予一個主題知識深度和準確性的最佳方式。直到能證出嚴格的定理，你才算完全理解你的概念是什麼意思。在混沌的領域，我只知道一個嚴格的定理，是由李天岩和約克（Jim Yorke）在 1975 年的一篇叫做〈週期三蘊涵混沌〉（Period Three Implies Chaos）[4] 的短篇論文中證明的。這論文是數學文獻中一顆不朽的寶石。他們的定理是關於區間上的非線性自我映射。一個點在重複映射後的位置數列，可以視為是古典粒子的軌道。

一個點如果在 N 次映射後回到原始位置，則稱其軌道具有週期 N。在此脈絡下，如果軌道偏離所有週期性軌道，則定義其為混沌的。李 / 約克定理

說的是：若一映射存在週期為三的軌道，則亦存在有混沌軌道。定理的證明既簡單而且不長。對我而言，這定理及其證明比一千張美麗的圖片更能闡明混沌的基本性質。它解釋了為何混沌無所不在，但它並未解釋為何混沌經常是弱的。這任務就留待後人了。我相信，要從基礎上理解弱混沌，我們得先能對它證明嚴格的定理。

弦論學家

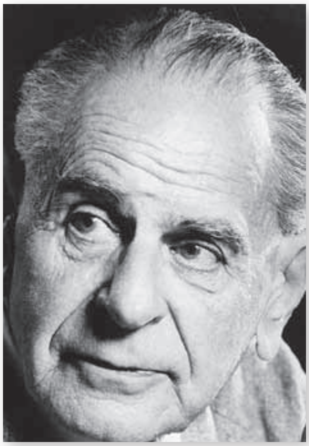
再來我想談一點點弦論。只談一點點，是因為我對弦論所知很有限。我不曾費力去跟人學習，也不曾自己鑽研。但在我任職的普林斯頓高等研究院，我的身邊有一群弦論學家，有時我會旁聽他們的對話。他們所說的，偶爾我能聽懂一些。就我所見，有三件事是很清楚的。首先，他們所做的是第一流的數學。一些頂尖的純數學家如阿提雅（Michael Atiyah）和辛格（Isadore Singer）都喜歡他們的東西。弦論開啟了全新的數學領域，裡面有新想法和新問題。最特別的是，它提供了新方法，以解決一些先前無解的老問題。其次，弦論學家認為他們是物理學家，而不是數學家。他們相信弦論描述的是物理世界裡實在的東西。第三，至今為止還沒有弦論確實關乎物理的任何證明，這個理論還不足以用實驗來測試。弦論與其他的物理學分離，活在它自己的世界裡。弦論學家竭盡心力去推導可能足堪測試的理論結果，但尚未成功。

我的同事韋頓（Edward Witten）、馬爾達西納（Juan Maldacena）和其他建立弦論的人是鳥兒，高高飛翔並眺望遠方山嶺的廣闊景象。而數千名遍布在世界各大學、比較平凡的弦論研究者則像是蛙，鳥兒看到的是遠在天邊的數學結構，而蛙兒則探討其細節。弦論令我憂心的問題並不在於科學，而是社會性的。如果你躋身前一千位弦論學家，能夠去發現新連結，開拓新方法，那是很棒的事。但如果你是列在第二個一千名、乃至第十個一千名裡，那就沒那麼美妙了。現在散布全球的弦論學家約有一萬人[1]。這對第十個一千名是很不利的處境，甚至對第二個一千名可能也是。潮流或許會突然改變，使得弦論不再熱門，然後造成九千名弦論學家丟掉工作。他們所受的訓練是非常特定的專長，這會使得他們難以在別的科學領域找到工作機會。

為什麼弦論可以吸引那麼多年輕人？它的魅力一部分是來自於智識方面──弦論大膽新穎，而且具有優美的數學結構。但另一方面，它的吸引力也是社會性的。弦論可以提供工作，所以它很迷人。為什麼會有那麼多弦論的工作機會呢？因為它便宜。如果你在資金匱乏的偏遠院校掌管物理系，你手上的經費不足以建造現代實驗室來做實驗物理，但你可以聘請幾位弦論學家。所以你提供幾個弦論的職缺，然後你就有了一個趕得上時代的物理系了。對於提供工作的系主任，和尋找工作的年輕人，這種誘惑是很強烈的。不管是對年輕學者或對科學的未來，這都是有害的。我並不是認為，即使年輕學者覺得弦論很有趣，我們也要勸阻他們不要去做。我的意思是，我們應該提供他們多種選擇，免得他們因為經濟需求而去做弦論。

最後再說一下我對弦論前景的猜測。我的猜測不見得正確，我不會幻想自己能預測未來；之所以在此說出我的想法，是為了提供各位一些思考的素材。我想，弦論最終的結果極不可能會是完全成功，或是完全無效。在此，「完全成功」係指弦論是一個物理學的完整理論，足以解釋粒子及其交互作用的所有細節。至於「完全無效」意味著，弦論只是一件純粹數學的美麗作品。我猜弦論會介於完全成功與徹底失敗之間。我猜它的情形會和李群理論相似。李在十九世紀時創建李群，以做為古典物理的數學架構。只要物理學依舊是古典的，李群就

[1] 譯註：多人指出戴森過度高估了弦論學者的數目。



波普（維基百科）

是一個失敗的理論。他們有了解答，卻不知道要回答什麼問題。直到五十年後，量子革命改變了物理學，於是李代數找到了它的適當位置。若要理解對稱性在量子世界裡的核心地位，李代數是解答的關鍵。我預期在五十年或一百年之後，將會發生另一場物理學革命，引入目前毫無跡象的新概念，而這些新概念將賦予弦論新的意義。在此之後，弦論將突然找到它在宇宙中的適當位置，做出關於真實世界的可檢驗的預測。我得警告各位，這個猜測可能是錯的。但它有一項優點，即可以被證偽（falsifiable），根據科學哲學家波普（Karl Popper），證偽性是科學敘述的標誌。或許就在明天，日內瓦的大型強子對撞機的實驗結果就會摧毀我的預言。

回到馬寧的隱喻

在演講的最後，我想回到馬寧和他的《作為隱喻的數學》。這本書的內容主要是數學，但西方讀者可能會驚訝地發現，他能以同樣流暢的文筆來談論其他主題，像是集體潛意識、人類語言的起源、自閉症心理學；以及惡精靈在世界許多文明的神話中所扮演的角色。對他的俄國同胞而言，這種多方面的興趣與專長毫不令人訝異。俄國知識分子維持了傳統俄羅斯知識階層的傲人傳統——科學家、詩人、藝術家和音樂家結合成一個社群。他們今天仍是如此，就如同我們在契訶夫的戲劇中所見到的一樣，一群理想主義者因為難以見容於迷信的社會和恣意妄為的政府，而聚集在一起。在俄國，數學家、作曲家和電影製片人可以相互對話，在冬夜的雪地裡一起散步，同斟共飲，以及分享彼此的想法。

容格（維基百科）

馬寧是飛鳥，他能超越數學領域，而看到更廣闊的人類文化地景。他的一項嗜好是探討瑞士心理學家容格（Carl Jung）所發明的原型理論。根據容格，原型是深植在我們共有的集體潛意識裡的心理意象。原型所攜帶的強烈情感，是人們集體的歡樂與悲傷，在被遺忘後所留下來的遺跡。馬寧認為，即使我們不接受容格的理論為真，也可從中得到很多啟發。

早在三十多年前，法國歌手莫芮利（Monique Morelli）錄製了一張由麥柯朗（Pierre Mac Orlan）作詞的歌曲唱片。其中一首曲子叫〈死城〉（La Ville Morte），它縈迴不去的旋律由莫芮利深沉的女低音唱出，配上手風琴的對位伴奏，描繪出種種情感強烈的意象。當印在紙頁上時，這些詞句平凡無奇：

走入死城，
我牽著瑪歌的手
……
一路踅過墓城，
支著斷腳，靜默不語，
眼前是未鎖的門戶，
眼前是不起眼的彈孔，
眼前是眾門無言，
垃圾桶遍地哀嚎。

每當聆聽這首歌，必定會激起我非常強烈的情緒。我常自問，為何這麼簡單的歌詞卻似乎能與某種深層潛意識的記憶發生共鳴，就好像逝去者的

Carol M. Highsmith 攝

和攻城大軍被發明之後，由數以百計被毀城市的哀愁凝煉而成。若要逃脫瘋狂的集體潛意識，唯一的途徑是以希望與理性為基礎，建立起清明的集體意識。創造這樣的集體意識，便是我們當代文明所面臨的重大任務。∞

靈魂透過莫芮利的音樂在說話。而現在，出乎意料地我在馬寧的書中找到了答案。在其中一章，〈空城原型〉（The Empty City Archetype），馬寧描述死城的原型如何從古至今，一次又一次出現在建築、文學、藝術和電影等創作裡。自從某些人開始聚集在城市裡，自從另一些人開始聚集成軍隊，以肆虐和摧毀城市，這個原型就反覆出現。麥柯朗的歌曲說的是很久以前佔領軍中的老兵，當他和妻子走過死城的瓦礫灰燼後，他再次聽見：

奇魅的號角曲調
遙遙響了一個時辰
在老兵的夢中。

麥柯朗的文字和莫芮利的聲音似乎召喚起我們集體潛意識中的一個夢，一個關於老兵在死城中遊蕩的夢。集體潛意識的概念或許和死城的概念一樣，都是神話的。馬寧在這一章，描述了這兩個或屬神話的概念如何相互投射了照亮對方的熹微之光。據他描述，集體潛意識是一股強大的非理性力量，足以將我們拉向死亡和毀滅。死城的原型則是在城市

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

原文出處

本文係作者為美國數學學會 2008 年愛因斯坦講座所準備之講稿，後因演講取消而未宣讀。文見 *Notices* 56 （2009） No.2 AMS.

譯者簡介

趙學信，原習建築，擔任數學知識網站、數學部編本網站工程師。翻譯有《數學：確定性的失落》（合譯）、《現世》、《丘成桐談空間的內在形狀》（合譯）等多本。

延伸閱讀

▶多人，Letters to Editor *Notices* 56 （2009） No.2 AMS. 讀者對戴森文章的回應，以及戴森對回應的回應。

▶ Baez, John，Quasicrystals and the Riemann Hypothesis *The n-Category Café Blog*. 探討戴森對黎曼假說與一維準晶體關係論點的可能詮釋。http://golem.ph.utexas.edu/category/2013/06/quasicrystals_and_the_riemann.html

▶ Lin, Thomas，A 'Rebel' Without a Ph.D., *Quanta*, March 26, 2014, Simons Foundation. 戴森在本文中追憶他的師友，而這篇訪談的主角則是他本人，兩文可互參。http://www.simonsfoundation.org/quanta/20140326-a-rebel-without-a-ph-d/

▶ Besicovitch, A.S.，The Kakeya Problem *The American Mathematical Monthly* 70 （1963） No.7, MAA。貝西柯維契後來又再寫了一篇普及版的掛谷問題介紹。這篇文章在網路也能找到。