

少女也愛上數學

《數學女孩》的數學學習與結構美學

作者：洪萬生

書評

作者簡介：洪萬生為台灣師大數學系退休教授，研究數學史，並為臺灣「HPM」發起人，強調數學史在數學教學中之功用。洪更是台灣數學科普的推手，與學生翻譯多本科普書，廣撰科普書評，目前更推動以文學小說來促進數學之普及化。

前言

臺灣出版商引進結城浩的《數學女孩》系列，一開始應該是出自數學普及面向的考量，而非我們現在更感興趣的數學小說文類（genre）。現在，就國內所出版數學小說（mathematical fiction，主要是中譯本）的敘事風格來說，《數學女孩》是非常獨特的一個系列，這是因為作者在本系列中，忠誠地分享了他自己的數學學習心得。不過，他除了這種在「小處」斤斤計較、吹毛求疵的「著手」之外，還不斷地高舉他的結構美學大旗，向讀者宣示數學「旅行地圖」的重要意義。

在本文中，我所討論的《數學女孩》系列共有四本，依中譯本發行順序如下：《數學少女》（青文出版社，2008）、《數學女孩：費馬最後定理》（世茂出版公司，2011）、《數學女孩：哥德爾不完備定理》（世茂出版公司，2012），以及《數學女孩：隨機演算法》（世茂出版公司，2013）。由網路出版資訊得知，結城浩又出版了《數學女孩：伽羅瓦理論》，不過，由於該書尚未有中譯本，本文姑且不論。在此，我打算依序先簡介前述四書（都各有10章）的內容，最後再綜合評論作者的敘事風格，及其對於我們的（中學）數學知識活動所可以帶來的深刻啟發。

《數學少女》

本書數學主題是分拆數（partition）（第10章）。作者利用生成函數（generating function），先找出費氏數列（或斐波那契數列）的一般項 F_n ，從而說明後者如何成為分拆數（partition） P_n 的上界： $P_n \leq F_n$ 。所謂分拆數 P_n ，是指給定正整數 n ，將 n 用小於或等於 n 的正整數分拆的所有可能情形之個數。例如，

$$4 = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

故 $P_4 = 5$ 。正如蘇俊鴻指出：「雖然分拆數的主題在數學上並不讓人驚奇，作者卻能由高中所學得的數學知識出發，將這個主題的相關數學知識一一連貫起來，值得我們為作者的努力鼓掌。」

作者以數列謎題引導本書前三章的討論，而這三章（〈數列與規律〉、〈名為算式的情書〉及〈 ω 的華爾滋〉）與第5章〈算術平均數與幾何平均數的關係〉，可說是高中數學的簡要複習。不過，在第2.9節中有關「方程式與恆等式」與算式的「積的形式與和的形式」之單元，作者運用八頁的篇幅，「細緻且透徹地將算式的基本定義，好好提點了一遍」，讓身為數學教師的蘇俊鴻大為感動，他「自問在課堂上的傳授都無法做到」。由此，我們也看出作者念茲在茲的，是對於數學知識本質的解說。同時，他也不吝於分享個人的數學學習的心路歷程，譬如第5.5節〈所謂讀數學〉的內容，就十分貼近高中生的學習經驗。

作者也藉由費氏數列（第4章）與卡塔蘭數（Catalan numbers）（第7章）引進生成函數，以及如何運用生成函數求數列一般項的方法。至於第6章有關微分與差分（連續與離散）的對比，則是討論連續觀點下的數學定義、如何在離散觀點下尋找合適對應的定義。因此，微分 vs. 差分；積分 vs. 和分，這種「悠遊於兩個不同世界的方式」，連結了數列與生成函數兩種不同的數學主題。

此外，本書第8-9章有關黎曼 ζ 函數 $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ 的內容，涉及調和數列 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ 的討論（ $\zeta(1)$ ，第8章），以及泰勒展開式與貝塞爾問題（即 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ ）（ $\zeta(2)$ ，第9章）。針對前者，作者特別利用摺積的概念與方法，以及黎曼 ζ 函數與尤拉（歐拉）積的關係：

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{\text{prime } p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$



數學少女（2008），青文。



數學女孩：費馬最後定理（2011），世茂。



數學女孩：哥德爾不完備定理（2012），世茂。



數學女孩：隨機演算法（2013），世茂。

證明質數有無限多個。針對後者，作者的目的，顯然就是介紹尤拉（歐拉）如何利用邏輯上站不住腳的「類比」方法，發現 $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ ，而這也讓十八世紀的尤拉（歐拉）老師成為本書的偶像。為此，作者還特別處理了代數基本定理及其相關的根與係數關係。而有關此一貝賽爾問題解法的「重新發現」，作者刻意安排最缺乏數學自信的一位女主角蒂蒂完成，在數學學習方面的確頗富深意。

本書主角除了蒂蒂之外，還有第一人稱的「我」（高二男生），他的同學米爾迦是一位數學才女，經常對他「發號施令」。至於蒂蒂（或蒂德拉）則是他的高一學妹，喜歡纏著男主角發問，但是，一直不清楚自己的數學潛力。他們三人之間的對話除了數學的解題探索、經驗分享之外，甚少涉及日常生活點滴，但是，對白中也洋溢著少男少女情懷，讓熟悉日本輕小說敘事的讀者深感親切。

除了上述的敘事特色之外，本書還洋溢著數學史的洞識，譬如在第 2.10 節〈數學公式的背後是誰？〉，作者就指出：「在算式背後都有一段歷史，當我們在讀算式的時候，就像是和無數的數學家格鬥」，因此，「會花時間理解是一定的」，同時，「當我們展開一道算式，就是超越了幾百年的時光；在我們面對算式時，我們都是小小的數學家。」這種運用數學史的縱深來賦予數學知識活動的意義，當然是本書的主要敘事特色。

作者的「縱深」關懷也表現在（譬如）複數平面的引進，在此，他提出高觀點的方法論反思，也非常具有啟發性：「從整數到實數的數線，再從數線到複數平面，不斷地思考更高的次元。於是表現就變得簡單明瞭，可以說越簡單明瞭，就越象徵『理解』吧。」而這，當然也連結到他的結構關懷。

另一方面，這種結構關懷也表現在「跨界」的連結上，譬如作者推許生成函數是操作數列為一個有效方法，其原因就在於利用「生成函數求得斐波那契數列一般項，就像原本捧在手上快要散落的數列，被名為生成函數的一條線串起來」，且最終得以讓相關數學主題成為具有結構的一個有機整體（organic whole）。而這，也很好地解釋了何以作者在本書適當脈絡中繪製數學「旅行地圖」。

《數學女孩：費馬最後定理》

本書數學主題當然是第 10 章的費馬最後定理。前四章介紹初等數論，作者一再強調代數 / 數論與幾何之連結意義，不過，其內容層次大致止於高中數學課程。第 1 章主題是時鐘或模數算術，作者利用具體例證，說明由特殊推論到普遍的數學方法論意義。第 2 章主題是畢氏定理的數論版——畢氏三元數，因為這是為了費馬最後定理的討論，而進行暖身的必要的工作，尤其它們還對應到單位圓上的有理點。作者顯然利用此一連結，說明「原始畢氏三元數組有無窮多個」等價於「單位圓上的有理點有無窮多個」，從而指出「尋求方程式的解」（代數命題）與「用圖形捕捉事物」

（幾何命題）之關連。第3章主題是互質，作者當然討論分數運算如通分與約分、最大公因數與最小公倍數以及這兩個概念之關係、質因數分解及其運用指數表現式之幾何表徵，而且再一次指出數論與幾何之連結：「深具內涵的幾何特性，讓我們的表現更為豐富。」第4章主題是反證法或歸謬證法，其例題是有關根號2為無理數之證明。作者在本章提供了兩個證明，並企圖說明這種證法在方法論上之意義。

第5章主題是可以分解的質數，其內涵已經超越一般高中數學範圍了。在本章中，作者除了利用一、二次方程的解來定義新數之外，還為了引進高斯整數（Gaussian integer） $a + bi$ ，其中 a, b 為整數， $i = \sqrt{-1}$ ，而說明複數的幾何表徵及其運算意義，最後，在比較整數與高斯整數異同之後，說明「會粉碎」的質數之意義。第6章主題是交換群（的眼淚）。正如前一章，本章內容也超越一般高中數學範圍，其各節單元有結合律、交換律、單位元、反元素、群與最小群，以及同態等等抽象代數的概念。這些當然都是為了第7章之後的抽象數學之引進，所做的預備工作。第7章主題是呼應第1章的（視髮型為）模數，以及由此引出的群、環、體等抽象代數結構。其中，針對模數 p 為質數時， $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 由剩餘類環變為體之討論，對於高中學生而言，則是非常抽象的主題。第8章主題是無窮遞減法，其中，作者不憚其煩地說明了費馬如何利用這一方法證明 $x^4 + y^4 = z^4$ 沒有非無聊的（non-trivial）整數解，從而印證了費馬在丟番圖的《數論》（*Arithmetica*）拉丁版頁邊空白處所寫下的備註，並非無稽之談。有了前述準備，作者在本書最終章（第10章）討論費馬最後定理的「證明」。作者為了讓讀者多少掌握一點有關此一偉大證明輪廓，特別提供了一個證明的概略。基於此，他還進一步介紹橢圓函數、模曲線與自守形式。最後，懷爾斯在橢圓曲線與自守形式之間成功地搭起一座橋樑，而完成了費馬最後定理的證明。

至於第9章主題，則是最美麗的數學公式： $e^{i\pi} = -1$ ，它也是小川洋子的著名小說《博士熱愛的算式》的主題。結城浩顯然意在利用這個許多讀者已經熟悉的歐拉算式，來說明冪級數如何在指數函數與三角函數之間，搭起一座溝通的橋樑。當然，所謂的歐拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 與複數平面之關連。在本章末，作者引述吉田武《虛數的情緒》說明 $e^{i\pi} = -1$ 這個算式「是由最有用的兩個常數，即『納氏常數』及『圓周率』這兩種『虛數』居中結盟而成。」^①不過，作者顯然也運用本章，再度表達他對歐拉老師的高度崇敬。

本書的主角除了《數學少女》的二女一男外，有多了男主角「我」的表妹由梨。此一國中生角色的安排，讓本書的數學對話顯得更加貼近中學生的數學經驗。

① 納氏常數是指歐拉數 e ，自然對數的底數，因為它是由納皮爾（Napier）所發明，故有納氏常數之稱。這是清代中國數學家的中譯，後來日本數學家襲用之。

《數學女孩：哥德爾不完備定理》

本書主題是哥德爾不完備定理。誠如我在推薦序所指出，本書所訴求的，是讀者的數學成熟度，而不必非要有高深的數學素養不可，因此，讓高中生當作課外讀物來討論，當然也是儘管十足挑戰性但卻相當合適的主題。

事實上，本書所預設的數學基礎知識，只有形式邏輯與集合論，作者依序分別在第 1、3 章討論。至於第 2 章，則是深入說明算術系統的皮亞諾公理，一方面強調自然數的公理建構，同時也為後文的形式系統（formal system）之引進來鋪路。其中，作者更是針對數學歸納法的無限指涉，提出重要的提醒與澄清：數學歸納法「所主張的並非是針對一個個的自然數，所欲主張的是針對所有自然數的集合。藉由邏輯的力量，一鼓作氣地全數一網打盡。」基於集合與無窮等比級數的概念，作者利用第 4 章整章的篇幅，詳盡地說明何以循環小數 $0.999\cdots = 1$ ？

第 5 章再回到邏輯主題，但深入討論形式邏輯與證明論，強調邏輯連詞與量詞的使用，並以第 6 章的極限分析論證為例。第 7 章分成兩個部分，第一部份是數集是否可數（countable）的討論，其中康托爾的對角線論證法是主題，作者深入說明何以實數系不可數，而且同一方法也無法否證有理數系可數。在第二部份，作者開始引進形式系統的一致性（consistency）、完備性（completeness）與哥德爾不完備定理，以及涉及後者證明的對角化法，因此，在本章中，作者顯然針對此一概念工具（conceptual tool），先引進再呼應，儘管後者的形式系統語言不是那麼容易親近！

延續這種形式系統的思維，作者在第 8 章運用商集的概念，從自然數系引進整數系，再進一步引進有理數系。當然，作者也利用本章內容，強調「人的心會壓縮具體實例」，同時，由於「同態映射為意義之源」，因此，吾人可以從形式系統再回到具體實例的意義世界上。基於此一考量，再加上本書第 10 章論述的「形式化的形式化」，作者安排第 9 章的高中三角函數題材，讓讀者喘一口氣，以便迎戰本書終章——第 10 章。

本書主角與《數學女孩：費馬最後定理》相同，亦即共有三女一男。到了下一本小說《數學女孩：隨機演算法》，又多了一位紅髮的高中美少女麗莎，非常擅長電腦程式，同時也是贊助雙倉圖書館的雙倉博士的千金。

《數學女孩：隨機演算法》

本小說主題為隨機漫步（random walk）及其定量估算，但由於涉及機率、統計與矩陣，因此，作者運用了第 1、3、4、5、7 等五章，引進排列、組合、機率、期望值以及矩陣等高中基礎數學單元。不過，在第 4 章中，作者花了相當多的篇幅，說明了機率的公設定義。至於第 2、6 章的主題，則是線性搜尋與快速演算法的等級估算。

第7章主題是矩陣，作者從二元一次聯立方程組的解法談起，引進矩陣與行列式，並進一步討論二階矩陣所表現的線性變換之映射圖形。這些都是高中數學層次的題材，也是隨機漫步的計算利器之一，因此，在第8章中，矩陣的延伸內容又涵蓋了二階矩陣的對角化，其中作者當然必須介紹矩陣的特徵（或固有）值與特徵（或固有）多項式。不過，本章主題是隨機漫步，作者除了提出「鋼琴問題」之外，還詳盡地討論了「流浪問題」。

第9章主題是如何找出有效率的演算法，這個問題被認為是電腦科學中最有名的未解決問題。給定一個邏輯式，針對其變數賦予怎樣的真假值，整個邏輯式才能為真呢？現在，使得邏輯式為真的變數之賦值是否存在？由於演算法的級數經常會非常龐大，因此，我們需要有效率的演算法，來找出這個問題的答案。在這個脈絡中，作者也引進可滿足性問題（SAT, Satisfiability problem）。考慮邏輯式 3-CNF（Conjunction Normal Form），它有2個子句，它們都各由3個字符組成。那麼，檢查是否存在滿足 3-CNF 的賦值存在的問題，就稱為 3-SAT。後者這個問題又自然地連結到 $P \neq NP$ 的猜測，這是一個千禧年百萬美元獎金難題。所謂 P 問題是指有效率可解的問題，至於 NP 問題，則是給定一個可能的解時，能有效率判斷這個解是否正確的問題。目前已經證明 $P \subset NP$ ，但是反過來，則仍然未知。作者從具體例子入手，說明此一難題的背景與意義，意在激發「小數學家」的豪氣，用心良苦，令人感佩。此外，作者還介紹史特靈公式（Stirling's formula）來估算組合數，作風也令人驚豔。

在第10章，作者主要介紹兩種隨機演算法：快速排序演算法和隨機快速排序。針對前者，他針對其執行步驟數的進行深入分析，得出最大執行步驟數與平均執行步驟數。至於後者，他則是結合了期望值的概念來進行估算。

總之，本書一如本系列前三本，作者在解題時盯住細節但又不為其所侷限，總是提醒讀者從容出入，適時掌握「筆記」要點或「旅行地圖」，以免迷失所在位置。此外，他還進一步說明如何從結構面向切入，以連結具體例子與一般化，以及「看穿構造，需要心之眼」的知識洞察力之不可或缺。

綜合評論

正如前述，本文所討論的這四本小說都有各自的主題，依序是分拆數、費馬最後定理、哥德爾不完備定理，以及隨機演算法。為了普及遠遠超乎高中數學層次的這些知識，作者顯然事先擬定好了數學「旅行地圖」，由最基本的中學數學題材開始討論，一步一步地由書中的數學女孩與男孩帶領，探索數學的奇妙世界。同時，作者對於十分熱門的數學普及話題如斐波那契數列、蒙提霍爾三門問題等，也都討論得唯恐不夠深入。更值得注意的，儘管學校數學老師是一個「隱形的」角色，然而，作者提及他的時候，總是伴隨著一個十分適當、但卻與考試毫不相干的數學問題，

將本書主角的課外與課堂學習連成一氣，從而讓這一系列小說的敘事自然地呈現些許數學教育改革之關懷。此外，他們也經常提及十八世紀的偉大數學家歐拉（尤拉），尊稱他為歐拉老師。而這，當然與歐拉的高度重視數學的新發現之進路息息相關。

在人物個性的塑造與故事情節的安排上，這些小說都相當成功地結合數學知識活動中的提問與解題。這種高中或國中學生主角的「現身說法」，無疑地發揮了極大的親和力，甚至讓數學沒那麼機伶的一般學生，也容易產生共鳴。此外，它們所提供的解題或證明活動，也總是充分地配合人物個性與數學經驗，而呈現多面向的進路或方法，讓讀者可以從容分享。在這樣的關連中，作者也利用主角提供各章開頭與結束時的名家引言，數學方法的學習反思，以及得自數學史的啟發，做為彼此的勉勵或提醒，這種平起平坐的「勵志」方式，料想一般讀者應該比較容易接受才是。

另一方面，這些小說也經常基於「知識結構的高觀點」或「數學史的洞察」，來歸納或提示一些（有時是跨界的）「旅行地圖」，藉以強調相關的數學結構意義，讓讀者不至於迷失在瑣碎的解題迷魂陣中，而無法自拔。最後，作者仿效類似網路「超連結」資訊的手法，鼓勵讀者進行形式推論，即使不知道個別命題或定理之內容為何。而這，當然也意在凸顯數學知識的結構面向之意義。根據網路相關資訊，作者的興趣與工作是「寫程式」與「寫書」，相當喜歡花好幾年的時間，不斷地重複閱讀同一本書。此外，他熱愛巴洛克音樂，尤其是巴哈的《賦格的藝術》與《音樂的奉獻》。上述這些有關他個人的素描，相當具體地反映在本小說系列的形式與內容上。一般而言，寫程式的人似乎比較不易被數學結構所吸引。然而，結城浩愛好巴洛克與巴哈的音樂 — 樂曲以簡單、對稱、優雅與結構謹嚴著稱，則相當可以解釋他在本書敘事時，何以那麼重視數學結構！

總之，像《數學女孩》這樣的系列小說，顯然是可以吸引喜歡敘事的讀者，藉以學習數學的一種新興的普及讀物。事實上，他的敘事往往伴隨著數學知識的開展，而達到融數學與敘事為一體的境界。一般而言，數學實作的這種鋪陳與開展，當然為一般科普作品所具備，不過，如果還想契合故事情節中小說人物的對話，那麼，作家的數學敘事（mathematical narrative），就非要完全融會貫通相關的數學知識不可。正是基於這種在「脈絡」（context）中「做」與「說」數學的特性，結城浩也得以細緻地分享他對相關數學主題的學習心得，因此，如果讀者有意就數學普及書籍學一點數學，那麼，這一系列小說都是上上之選。∞

延伸閱讀

▶ 結城浩《數學少女》中譯本系列。《數學少女》2008（青文）、《數學女孩：費馬最後定理》2011（世茂）、《數學女孩：哥德爾不完備定理》2012（世茂）、《數學女孩：隨機演算法》2013（世茂）

▶ 洪萬生，《數學與文化：以數學小說閱讀為進路》16講，臺大開放式課程。

網址 <http://ocw.aca.ntu.edu.tw/ntu-ocw/index.php/ocw/cou/101S126>

▶ HPM《HPM 通訊》網站。洪萬生發行，蘇惠玉主編。關注數學史與數學教育之關連。網址 <http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>