「克萊恩瓶」主題變奏曲

作者：弗蘭佐尼 Gregorio Franzoni　譯者：王夏聲

作者簡介：弗蘭佐尼在義大利的中學及卡格利亞里大學（University of Cagliari）教數學。

克萊恩瓶是依據等價關係（equivalence relation）

$$(u,0)\sim(u,2\pi),\quad (0,v)\sim(2\pi,2\pi-v)$$

將正方形$[0,2\pi]\times[0,2\pi]$的對邊黏貼起來而定義的拓樸物件（圖 1）。

我們知道克萊恩瓶是不可賦向（nonorientable）的閉曲面（closed surface），它的歐拉示性數（Euler characteristic）χ等於 0，虧格（genus）為 2，並且可以想成是將兩條莫比烏斯帶（Möbius band 或 Möbius strip）沿邊界黏貼起來的曲面。

克萊恩瓶不能嵌入（embed）到三維空間 $\mathbb{R}^3$，因此我們眼睛看不到真正的克萊恩瓶。但克萊恩瓶可以浸入（immerse）到$\mathbb{R}^3$中，也就是說，我們可以找到克萊恩瓶到$\mathbb{R}^3$的映射，使得映射的像（image）曲面沒有奇點（singularity），但可能自交。想要找到從克萊恩瓶到$\mathbb{R}^3$的浸入映射（immersion），我們可以把映射定義在正方形$[0,2\pi]\times[0,2\pi]$上，只要它滿足等價關係～要求的條件即可。（這邊的概念請參看 38-39 頁 BOX）

克萊恩（Felix Klein）在他 1882 年最開始的研究 [18, §23][15，308-310 頁] 中是這麼描述萊恩瓶的：**將一段橡膠管穿透它自身，然後將管子的二端光滑的黏接起來**（如封面），但是他沒有寫下任何方程式。

今天我們已經有這個拓樸物件的方程組，並且從技術來看完全令人滿意。由於這個方程組很簡潔，而且推導出的形狀也清晰易懂，足可稱之為**典型**（canonical）方程組。這是班喬夫（T. Banchoff）和勞森（H. B. Lawson）的研究，後文還會詳述。

不過他們方程式描述的形狀，和克萊恩提出的幾何構造（姑且稱為**古典形態**）並不一樣。我們很希望能為古典版本的克萊恩瓶，找到一組公式簡明、形狀優美的參數方程式。當然，新版本和古典版本的形狀其實是拓樸等價的，但是就浸入映射而言，

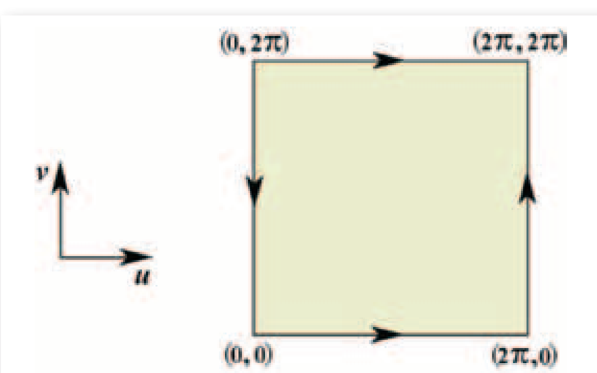


圖 1　依圖示的箭頭方向將正方形的對邊黏貼起來就得到克萊恩瓶。

它們分屬於不同的正則同倫類（regular homotopy classes）（請參看底下關於浸入曲面的同倫類的章節），因此除了歷史與美學的理由外，找出古典瓶的典型方程組還是有意義的。

進一步來說，當某項數學主題缺了一塊拼圖時，常會被數學家視為挑戰。他們會盡最大的努力研究它，有時甚至超越原來的目標，進而開啟一些嶄新的研究線索，甚至可能揭示了不同領域間前所未知的關聯。

帕雷斯（R. S. Palais）在 [20] 中概述了二則著名的故事；一則是關於科斯達面（Costa surface），以及相關由霍夫曼（D. Hoffman）及密克斯（W. H. Meeks）發現一系列新最小曲面的故事，另一則是**球面外翻**（sphere eversion）的故事。這些故事一方面挑戰並激勵了許多幾何學家。另一方面，它們在數學視覺化技術的發展上扮演了關鍵的角色，同時也吸引了公眾注意到數學的美麗壯觀的一面。

找到曲面的優秀數學表達方式，也有助於了解它們的實體模型。由於艾沛瑞（F. Apéry）能將波伊面（Boy surface）以及球面外翻的中繼曲面表現成空間中的簡單曲線（simple closed curves）族 [1]，艾沛瑞及後來作者才能做出它們的線框模型（wire model）[2][7]。

再多說點關於曲面實體模型的事，我們可以宣稱，當今這個領域發展最大的潛能在於 **3D 列印**系統，因為它可以把電腦生成的 3D 模型實現在真實世界，而且比起僅只是十年前，今天我們已經更負擔得起了——入門系統要價不到美金一萬元。

數學物件的觸覺化是視覺化的自然延伸。它們一樣可以成為年輕及資深數學家的靈感的良好來源，也是極好的方式去凸顯或傳達各種幾何性質與觀念，如曲率、面積極小性、可賦向性（orientability）、測地線、奇點等。

這個領域的一些有趣作品已經由狄克遜（S. Dickson）（如 [7][12]）及瑟昆（C. Séquin）[22] 這些先驅者所完成。如果著名的布里爾 / 席林（Brill-Schilling）的石膏及線框模型組在 1920 年代必須停產，只因為成本太高，而且當時的數學家關注的是數學的形式與抽象面，而對其視覺與直觀面向興趣缺缺，今天我們看到了民眾對影像及模型已經重燃興趣。

十多年前，帕雷斯在 [12] 文中所描述的趨勢如今更為強烈，這個趨勢也因為眾人對源於數學的藝術表現作品感興趣而大受鼓舞。相對於席林的製品，我相信加以改善與更新，而且生產更廣泛的曲面模型組合的時機應該已經來臨。事實上，在克萊恩瓶的個別案例，我已開始尋找古典造型的非奇異浸入映射，而且必須是單件式的，因為我需要單個適合以 3D 列印的 3D 模型來建構克萊恩瓶的實體模型。後來我意識到某些發現的條件並不必要，不過當時作品已經完成了！

一段表現克萊恩瓶的歷史

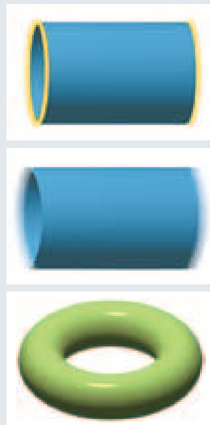
一直到 1970 年，幾何與拓樸教科書裡的克萊恩瓶，都是嚴謹依據克萊恩原來的幾何構造方式以手繪圖型呈現，也就是一條穿越自身的管子。

克萊恩瓶的第二個版本出現於班喬夫 1976 年的一篇論文中 [13]，這篇文章處理是具備雙柱邊界（bicylinder boundary）的最小子流形（minimal submanifolds）。他的克萊恩瓶是將一條**雙紐線**（lemniscates）沿著平面上的圓旋轉移動的軌跡，雙紐線的中心緊叩著圓前進，同時雙扭線也要旋轉，等中心回到起點時正好轉半圈（40 頁圖 2）。他宣稱是先在三維球面上發現這個模型，再將它投影到三維空間。

這個克萊恩瓶版本的電腦圖形首次出現於 1982 年費那（S. Feiner），沙勒辛（D. Salesin）及班喬夫 [4] 一篇關於動畫程式語言的論文中，克萊恩瓶是該文的研究案例。這篇論文中提供了這個曲面的線框模型及修飾的圖像，以及有助於了解其拓樸

曲面小辭典

閉曲面 closed surface

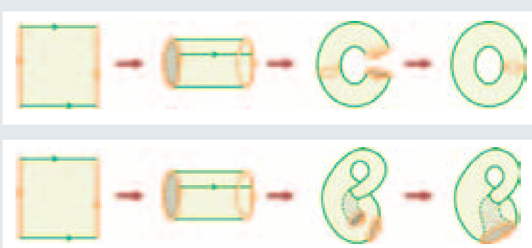


通常我們考慮的曲面是沒有邊界的曲面（上圖），而是局部上像是「平面」的光滑曲面（在這裡，「平」不是重點），稱為 2 維**流形**（manifold）。有點像人在地球表面上，局部看起來是平面，而且只能前後左右移動，只有 2 個自由度。

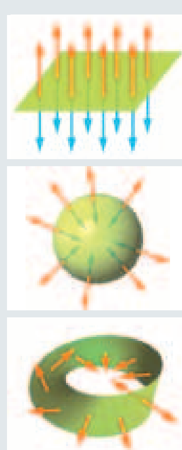
本文所考慮的曲面，都是有限的，稱為**閉曲面**（下圖），不可以有往無窮延伸的部分（中圖）。無窮會造成一些計算上的不便。

曲面的黏貼

用一張紙，對邊界做恰當的黏貼，就可以得到所有的曲面（當然紙要有「彈性」）。要黏貼的兩條線段以同樣的符號或顏色標記，並且要標明黏貼的方向。下兩圖是環面與克萊恩瓶，兩者的差別只有某一組邊的方向標記不同。



賦向 orientation



一張紙有正反兩面（上圖，用不同顏色的箭頭表示不同的方向），因此局部上曲面也有兩面。如果這個性質能夠一致的推廣到整個曲面，讓曲面也有正反**賦向**，這個曲面稱為**可賦向曲面**（orientable surface，中圖），否則只有「單面」的曲面稱為**不可賦向曲面**（non-orientable surface）。最有名的不可賦向曲面是有界的莫比烏斯帶（下圖）以及本文的主角克萊恩瓶。

連通和 connected sum

就像加法一樣，曲面也可以做加法運算（用♯表示），稱為**連通和**。方法如下圖，將兩個曲面擺在一起，先各自挖掉兩個圓盤，再想像圓盤邊緣像嘴唇噘起來，最後黏在一起，就得到一個新曲面。如果你對於黏起來的方向有點遲疑，表示你很有空間感，要怎麼解決呢？

虧格 genus

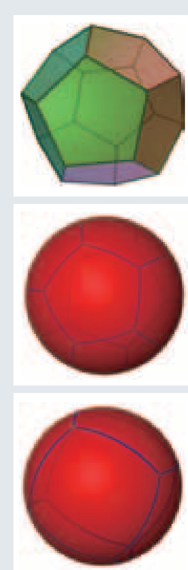
直觀的說，曲面的**虧格**就是曲面的「洞」數，例如附圖的曲面有兩個洞，所以虧格是 2。虧格是一個**拓樸不變量**，只要不撕裂，一個曲面再怎麼變形，虧格都不變。可賦向曲面可以用虧格 g 表示成 Σ_g ，例如球面是 Σ_0 ，環面是 Σ_1 等。利用連通和，可賦向曲面有下面的關係：$\Sigma_i \sharp \Sigma_j = \Sigma_{i+j}$ 。

不可賦向曲面也有虧格，只是比較抽象。若用 P 表示射影平面（文中的波伊面或羅曼面），則已知 P 的虧格是 1。若將不可賦向曲面以虧格 g 表示成 P_g ，則亦滿足 $P_i \sharp P_j = P_{i+j}$ 。克萊恩瓶是 P_2，文中用到它可以表示成兩個射影平面 P_1 的連通和。

歐拉示性數 Euler characteristic

定義**歐拉示性數**（簡稱**歐拉數**）的原型是多面體，例如上圖的十二面體有 20 個頂點 V 、30 條稜 E 、12 個面 F，其歐拉數就定義為

$$\chi = V - E + F = 20 - 30 + 12 = 2$$



十二面體在拓樸上和球面一樣，將十二面體的點、邊、面結構搬到球面上，稱為球面的剖分（中圖），得到 $\chi = 2$ 。球面上不同剖分的歐拉數都是 2（下圖），所以是拓樸不變量。

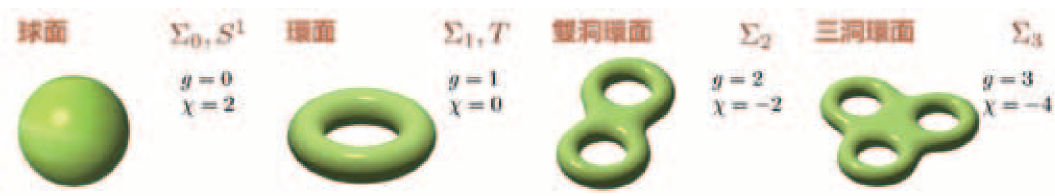
球面上的剖分與歐拉數的算法可以用到任何閉曲面，得到另一種拓樸不變量。從連通和的操作與恰當的剖分，很容易證明 $\chi(S \sharp T) = \chi(S) + \chi(T) - 2$ ，其中 S 和 T 都是閉曲面。由此可以推導出，當曲面是可賦向的，其歐拉數 χ 和 虧格 g 的有如下關係 $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ 。不可賦向時，兩者的關係是：$\chi(P_g) = 2 - g$ 。

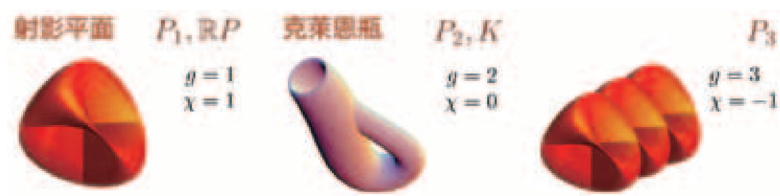
BOX

曲面動物園

從曲面小字典，可以整理出下面的曲面表。我們只考慮閉曲面，不考慮有界曲面，或涉及無窮遠的曲面。

注意每欄上方可賦向曲面的歐拉數是下方不可賦向曲面的兩倍，表示上方曲面有一 2 對 1 的映射映到下方曲面。

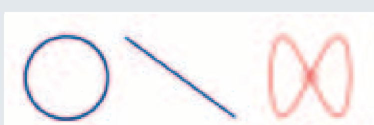




習題：由於所有的閉曲面都已經列表，那 $\Sigma_i \sharp P_j$ 是那個曲面呢？從連通和的歐拉數公式，可以得到此曲面的歐拉數，重點是這個曲面是可賦向還是不可賦向的？

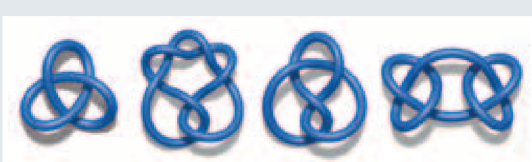
嵌入和浸入

就像曲面，我們考慮局部像「直」線的光滑曲線（1 維流形）。螞蟻在曲線行走只有進退一個自由度。曲線動物園很貧乏，閉曲線只有圓 S^1，就算允許無窮曲線也只有直線。最右圖不是曲線，因為叉點附近結構不是直線。



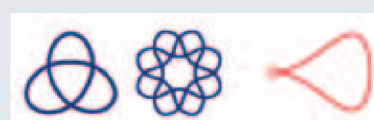
下圖的**結**（knot）不是多姿多彩嗎？怎麼說圓很貧乏呢？但結上的螞蟻無法感受這種差異。結很豐富是因為我們是從螞蟻的世界之外，看它在空間中不同的呈現。結是 S^1 在 $\mathbb{R}^3$ 中的不同**嵌入**（embedding）。S^1 和它在 $\mathbb{R}^3$ 的「像」等同，因此螞蟻感受不到差別。

圓嵌入空間的方式（結）太多需要分類。如果不同



嵌入方式之間，可從一個「移動」到另一個，且在過程中保持嵌入的性質，這兩個結（嵌入）就被認為是同一類結（文中稱為正則同倫類，見右欄最上圖）。

如果放寬嵌入的條件，允許 S^1 的光滑映射只要局部上一對一，但「像」可能和 S^1 不同，則稱為**浸入**（immersion）。下左二圖是 S^1 浸入 $\mathbb{R}^2$ 的例子（可以想成螞蟻在平面爬行的軌跡，



注意背景空間換了）。至於最右圖因為有一個破壞光滑性的奇點，並不是浸入。

和結一樣，圓在平面的浸入方式也可以分類（也稱為正則同倫類），只要從一個浸入「移動」到另一個，

並且在移動過程中一直保持浸入的性質，這兩種浸入方式就是同一種（如圖）。

現在讀者可以想像用克萊恩瓶取代上述圓的角色。由於不可賦向閉曲面不可能嵌入日常空間 $\mathbb{R}^3$ 中，必須考慮弱一點的浸入，才看得到這些曲面。本文討論的就是克萊恩瓶的四種浸入方式。

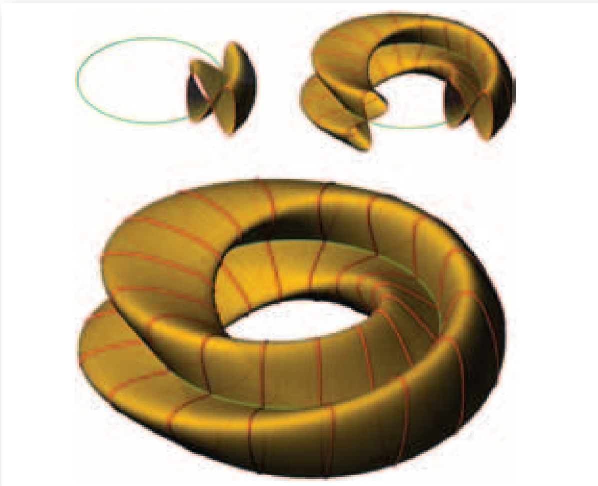


圖 2　班喬夫瓶：移動雙紐線生成克萊恩瓶的三個圖示。

結構的一序列幾何構造的步驟。在這個常稱為 8 字（figure-eight）瓶或班喬夫瓶的版本中，圓形自交曲線的鄰域（neighborhood，就是周邊的意思）是由一雙莫比烏斯帶所組成，而在古典瓶的情況，圓形自交曲線的鄰域則是一對環帶。

另一個有趣的克萊恩瓶模型，形狀非常美麗，但是比起上一個模型也許不那麼容易理解。它本來是三維球面 S^3 中的最小曲面，隸屬於勞森最小曲面分類中的一類 [19]，再透過球極射影（sterographic projection）從 S^3 送到 $\mathbb{R}^3$ 而得到的。在勞森這篇 1970 年的論文裡，他並沒有任何將曲面視覺化的企圖。這曲面在 $\mathbb{R}^3$ 上的投影可以想成是空間裡的圓族，但也是一個六次多項式的零根集（圖 3 和圖 4）。在艾沛瑞的《實射影平面的模型》（*Models of the Real Projective Plane*）一書中 [1]，我們可以找到這個曲面的參數方程及代數公式，而且就我所知，也包含第一個該曲面的電腦圖形。

1991 年，狄克遜在 [11] 中提供了克萊恩瓶古典模型的方程。他將曲面的兩個不同部份分別加以參數化，而它們的聯集就是古典瓶。這個版本被收錄在軟體 Mathematica 2.2 版的諸多範例中 [25]，這是一套以電腦為工具做數學的系統，其中包含了一組功能強大可以將幾何物件視覺化的工具。

圖 3　勞森版的克萊恩瓶可視為一個參數的圓系（family of circles），這些圓在圖中以黃色曲線為例表示。上列展示四個不同角度的視圖。下列展示它如何分解成兩條莫比烏斯帶並沿著紅色圓圈黏貼起來。綠色的則是此曲面自交通過彼此的圓圈。此曲面上的紅、綠二圓並不屬於生成此曲面的圓系而是與它們垂直。

圖 4　以不同方式切開的勞森瓶。環繞自相交圓的部分是由兩莫比烏斯環組成。將此部分切除，剩餘部分的曲面是可賦向的，所以正反面可以塗上黃、橘二種不同的顏色。

一樣是 1991 年，考克斯（D. Cox）、法蘭西斯（G. Francis）和伊達札克（R. Idaszak）製作了一部名為《伊特拉斯坎的維納斯》（*The Etruscan Venus*）的驚人影片。它顯示了二種新版本克萊恩瓶之間的變形特效（morphing，相當於數學的同倫變換（homotopy））。一種是一雙羅曼面（Steiner Roman surface）的連通和（connected sum）❶，另一種是一對波伊面的連通和。片名源於雙羅曼面的造型類似女性的身軀，而羅曼原文和羅馬相同，伊特拉斯坎文明則是古羅馬文化。他們的變形方法修改自艾沛瑞所解決的稱為羅波伊（Romboy）的

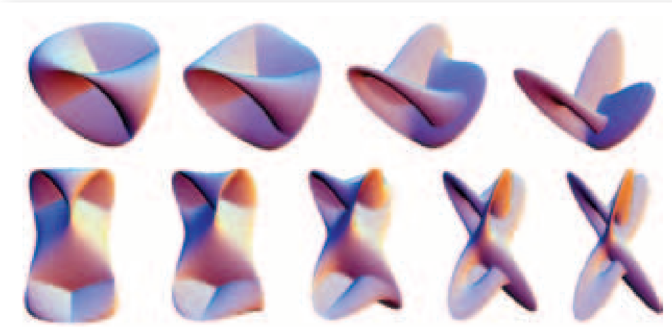


圖 5　上列是艾佩瑞的羅波依變形的四個步驟，下序列是依特拉斯坎的維納斯變形的五個步驟。

傑出變形研究，他討論如何從羅曼面變形到波伊面，並在 [1] 中給予描述與繪圖（圖 5）❷。

1993 年，當時仍是加州大學洛杉磯分校數學系學生的張（P. Chang）完成一個由四片所組成的克萊恩瓶模型並由狄克遜繪圖 [10]。由於這個模型的每一部份都是圓沿著曲線段移動掃過的軌跡，非常適合讓即使不太懂數學的人也可以用 CAD（Computer Aided Design，電腦輔助設計軟體）來繪圖。

1994 年，瑟馮（D. Cervone）回應班喬夫 [6] 提出的問題，做出一個古典克萊恩瓶的有效表示法，而後畢歐（J. Beall）為它加上透明度的處理並繪製成動畫，成果短片曾在史楚克（D. Struik）的百歲生日晚會中放映 [16]。這曲面分成二部分，一部分是以半條雙紐線為軸的管面，另一部份則是由剩下的雙紐線所生成的旋轉面（詳情後敘）。

為克萊恩瓶表示法邁出重要新步驟的是 1999 年楚洛特（M. Trott）的研究 [24]，他為古典克萊恩瓶給出單一的代數與參數表式，並用它做為檢視 Mathematica 特色的測試案例。

浸入曲面的正則同倫類

除了外形以外，前一節描述的克萊恩瓶彼此之間有多麼不同呢？浸入映射的正則同倫（regular homotopy）的觀念給我們一個嚴謹的準則，可以決定某曲面的任何二種浸入映射是否**基本上**是一樣的。這是個非常技術性的課題，我只想摘取適用於我們討論脈絡的關鍵想法。關於這個主題的細節可參看例如 [21]。

兩個浸入映射間的**同倫**，是以其中之一映射做為初始階段，一直演變到另一個映射做為結束階段的連續變形（continuous deformation），同倫關係是一個等價關係。所謂**正則同倫**是在變形的每一階段都是浸入映射的（光滑）同倫。正則同倫也是等價關係，因此可以將彼此有正則同倫關係的浸入映射當作同一類，稱為等價類（equivalence class）。一個**浸入曲面**可以想成是曲面所有浸入映射，透過正則同倫關係所定義的一個等價類。

任何 $\mathbb{R}^3$ 中的緊緻浸入曲面，皆可透過一小組浸入曲面再加上連通和 $\sharp$ 的操作來生成。特別是任何克萊恩瓶的浸入映射一定正則同倫於一對波伊面的連通和。而波伊面有兩個等價類：B 和它的鏡像 $\overline{B}$（關於波伊面的細節參看 [1]）。在 B 或 $\overline{B}$ 挖掉一個小圓盤會分別得到右旋或左旋的莫比烏斯帶。

由此，我們可立即辨識出所有在前一節裡描述的克萊恩瓶浸入映射所屬的正則同倫類。古典瓶屬於 $B\sharp\overline{B}$ 的等價類，因為它是一雙彼此互為鏡像（亦即兩者扭轉方向相反）的莫比烏斯帶的聯集。班喬夫瓶則屬於 $B\sharp B$ 和 $\overline{B}\sharp\overline{B}$ 這兩種等價類，因為它是扭轉方向相同的一雙莫比烏斯環的聯集。勞森瓶也一樣是一雙依相同方向扭轉的莫比烏斯帶組合，所以它與班喬夫瓶屬於相同的二種等價類。伊特拉斯坎的維納斯也只不過是 $B\sharp B$ 或 $\overline{B}\sharp\overline{B}$ 的典型代表，取決於它組成元素的手徵（chirality）。

上述的三種等價類窮盡所有可能了嗎？不。根據

❶ 二曲面的連通和是由各曲面各自挖掉一個小圓盤，然後光滑的將兩洞的邊界黏起來所得到的新曲面，參看 38 頁。

❷ 譯註：克萊恩瓶在拓樸上等同於兩個實射影平面的連通和。這裡的羅曼面和波伊面都是實射影平面在三維空間中的模型，這也是為什麼艾沛瑞可以討論羅曼面變形到波伊面的原因。

詹姆士(I. James)與托馬斯(E. Thomas)[17] 的研究結果:一曲面的等價類個數等於$2^{2-\chi}$,其中χ是曲面的歐拉示性數。由於克萊恩瓶的歐拉示性數是 0,因此應該有四種等價類,這告訴我們還有不等價於上述三種的第四類瓶存在。關於這個方向,瑟昆正完成一項有趣的結果 [23]。他探討如何建構第四等價類的良好表達式,同時展示了幾個克萊恩瓶浸入映射的例子,其中有些從未被描述過。

克萊恩瓶的簡單方程組

在這小節,我們回顧兩種由克萊恩瓶到$\mathbb{R}^3$浸入映射的參數表示(圖形見 40 頁)。這就是在本文開始提到的**典型**克萊恩瓶,分別由班喬夫及勞森所構造。

班喬夫瓶:

1

$$\begin{aligned} x &= \left(a+\cos\left(\tfrac{u}{2}\right)\right)\sin v-\sin\left(\tfrac{u}{2}\right)\sin(2v)\cos u \\ y &= \left(a+\cos\left(\tfrac{u}{2}\right)\right)\sin v-\sin\left(\tfrac{u}{2}\right)\sin(2v)\sin u \\ z &= \sin\left(\tfrac{u}{2}\right)\sin v+\cos\left(\tfrac{u}{2}\right)\sin(2v) \end{aligned}$$

勞森瓶:

2

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos 2u\sin v}{(1-(\sin u\cos u+\sin 2u\sin v)/\sqrt{2})} \\ y &= \frac{\sin 2u\sin v-\sin u\cos v}{\sqrt{2}(1-(\sin u\cos u+\sin 2u\sin v)/\sqrt{2})} \\ z &= \frac{\cos u\cos v}{(1-\sin u\cos u+\sin 2u\sin v)/\sqrt{2}} \end{aligned}$$

古典造型的克萊恩瓶

這一節,我們要回顧先前依年次介紹過的一些古典造型克萊恩瓶的公式和圖形。其中有些是以二片或更多聯集起來的,其它有一些的表式很複雜,缺乏 1 與 2 的簡潔與優雅。

首先是 1994 年瑟馮在回覆班喬夫提議的方案時所得到的結果:取一條白努利雙紐線(Bernoulli lemniscate),用它的一段做為管面的中心軸,而另一段則做為旋轉面的母線(generatrix)。圖 6 顯示這個構造是如何完成的。這二部分相接時互切的很剛好,是克萊恩瓶非常有效且美麗的模型,完美地符合克萊恩的描述,而且它的參數方程也非常簡單。

在繼續探討狄克遜和楚洛特分別完成的另兩個古典克萊恩瓶模型之前,我們先回顧如何環繞一曲線生成**管面**的基本技術。令$\alpha(t)=(x(t),y(t))$,$t\in[a,b]$為一在xy平面上的曲線並滿足$\|\alpha'(t)\|\neq 0$。令$\mathbf{k}=(0,0,1)$為z軸單位向量,而$\mathbf{T}=\alpha'/\|\alpha'\|$為沿$\alpha(t)$的單位切向量。令$\mathbf{N}=\mathbf{k}\times\mathbf{T}$。於是這一對單位向量$(\mathbf{N},\mathbf{k})$是垂直於$\alpha'(t)$的活動標架(moving frame),我們可以用此生成環繞$\alpha(t)$的管面如下:

3 $\alpha(t)+r(t)(\cos\theta\,\mathbf{N}+\sin\theta\,\mathbf{k})$

其中$(t,\theta)\in[a,b]\times[0,2\pi]$。這裡的純量連續函數$r(t)$是管面的半徑。注意到這裡所定義的$\mathbf{N}$並非曲線$\alpha(t)$的標準單位法向量,標準單位法向量會指向$\alpha(t)$密切圓(osculating circle)的圓心,而且無法在曲率為 0 的點上定義。

第一個將克萊恩瓶看成環繞某曲線管面的模型

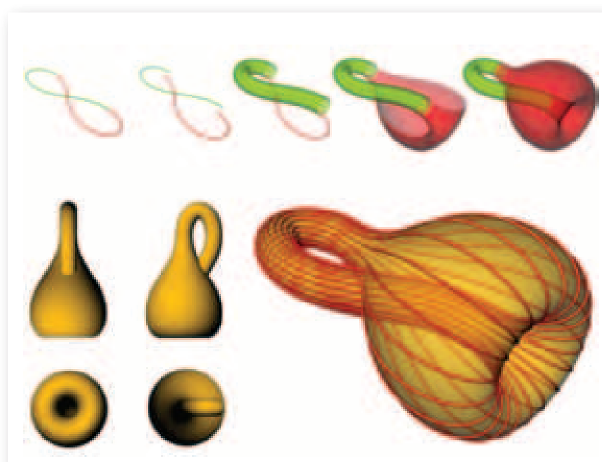


圖 6 班喬夫 / 瑟馮瓶的構造。上方是構造序列:先將白努利雙紐線剪為二段,平移其中一段r的距離,環繞此段曲線生成半徑為r的管面,然後黏上將第二段雙紐線繞第一段雙紐線兩端點連線為軸的旋轉面。下方是班喬夫 / 瑟馮瓶不同角度的視圖與透視圖。

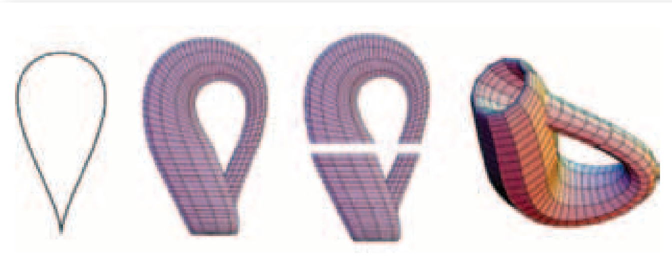


圖 7　狄克遜版的克萊恩瓶。圖左是中心曲線。最右圖是用 Wolfram Research Inc. 提供的。

（事實上是兩段不同管面的聯集）是狄克遜完成的。除了所選的單位向量活動標架場並不垂直於 $\alpha(t)$之外，它是依據以上描述的想法構造出來的。底下是狄克遜瓶的參數方程組 4：

當 $0 \leq u \leq \pi$ 時：

$$\begin{aligned} x &= 6\cos u(1+\sin u)+4(1-\frac{1}{2}\cos u)\cos u\cos v \\ y &= 16\sin u+4(1-\frac{1}{2}\cos u) \\ z &= 4(1-\frac{1}{2}\cos u)\sin v \end{aligned}$$

當 $\pi \leq u \leq 2\pi$ 時：

$$\begin{aligned} x &= 6\cos u(1+\sin u)-4\left(1-\tfrac{1}{2}\cos u\right)\cos v \\ y &= 16\sin u \\ z &= 4(1-\tfrac{1}{2}\cos u)\sin v \end{aligned}$$

4 的參數式定義了二段不同的管面，第一段管面的活動標架沿著中心曲線移動，而且標架保持與 xz平面平行，第二段連接第一段的首尾，活動標架不但沿著中心曲線移動，同時還旋轉π角。這兩段的聯集結果很優美（圖 7），它適切的表現出克萊恩概述的想法。

注意到在這個構造中使用的中心曲線是

5 $\alpha(t)=(6\cos t(1+\sin t), 16\sin t)$

這是著名的**梨狀曲線**（piriform）（參見 [8] 或 [9]），它的一般參數式是

6 $(a(1+\sin t), b\cos t(1+\sin t))$

觀察圖 7，很容易可以猜測與證明 4 式得到的是奇異浸入（singular immersion），因為這兩段管面並不是以互切的方式在共同邊界相接。再者，如果可以只用單一參數式來描述這個曲面（不像 4 用到不等式）當然更好。這已由楚洛特達成了，他在運用 Mathematica 去求其代數定義時，在中間步驟得到這個參數式。我們感興趣的是他的參數式，它密切依循 3 的管面設定，總結如下：

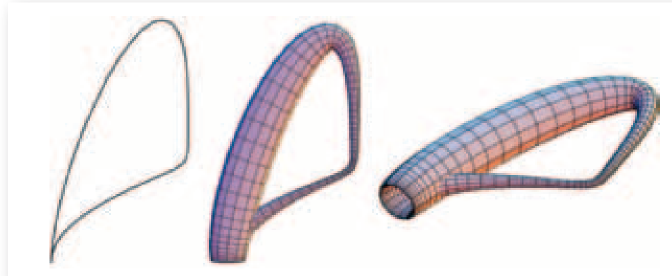


圖 8　楚洛特版的克萊恩瓶，圖左是中心曲線。

7
$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \alpha(a)=\alpha(b) \\ \text{ii)} & \alpha'(a)=-\alpha'(b) \\ \text{iii)} & r(a)=r(b) \\ \text{iv)} & r'(a)=r'(b)=\pm\infty \end{array}$$

條件 i）、ii）、iii）的意思是管子的二端接在一起，而 iv）則表示兩者以互切的方式相接。楚洛特用的曲線和半徑方程式是

8
$$\beta(t)=\left(\frac{1}{t^2+1}, \frac{t^2+t+1}{t^2+1}\right) \qquad t\in(-\infty,\infty)$$

$$r(t)=\frac{84t^4+56t^3+21t^2+21t+24}{672(1+t^2)}$$

所生成的圖見圖 8。方程組 8 定義了一個浸入映射，但因為所選的中心曲線曲率不光滑，所以圖形形狀有點尖銳。再者，因為 t 的範圍是開區間，繪圖時在尖點（cusp）附近會少一個圓。（楚洛特在繪圖時令 $t\in[-20,20]$。）

新的描述

這裡我們提出一組古典瓶的新參數式。從上節所述的二種建構開始，自然的，我們試圖採用他們各自最好的特色來建構新曲面：狄克遜瓶美麗且對稱

圖 9　梨狀曲線與環繞它的管面；它是在 $\mathbb{R}^3$ 中浸入的克萊恩瓶。

的中心曲線，楚洛特瓶嚴謹的幾何方案。為了以梨狀曲線作為管面的中心曲線，我們為它定出新參數式，使其在曲線的尖點開始與結束：

9

$$\gamma(t)=(a(1-\cos t), b\sin t(1-\cos t)),\quad t\in(0,2\pi)$$

而滿足（7）式中 iii）和 iv）的半徑函數可以取成，例如

10 $r(t)=c-d(t-\pi)\sqrt{t(2\pi-t)}$

參數c與d分別影響整段管面的半徑，及其最大值與最小值的差。設$(a,b,c,d)=\left(20,8,\frac{11}{2},\frac{2}{5}\right)$與$(t,\theta)\in(0,2\pi)\times[0,2\pi]$，生成的圖形見圖 9。

一些評論

雖然上節描述的結果在我們看來是相當滿意的，仍然有一些事實必須指出。首先，我們的曲面參數式頗費篇幅，表式又長又複雜。其次，如同楚洛特的參數式，在中心曲線的尖點處會缺少一個圓，因此浸入映射的像不是閉的，這是因為在$t=0$和$t=\pi$時$\|\gamma'\|$為零，而原來的方案要求$\|\gamma'\|$處處不為零。消除這問題的方法之一是用啞鈴曲線（Dumbbell curve）（參看 [9] 與圖 10）的一半作為中心曲線。這是著名的六次曲線，它有底下的參數式：

11 $(\sin t,\sin^2 t\cos t),\quad t\in[0,2\pi]$

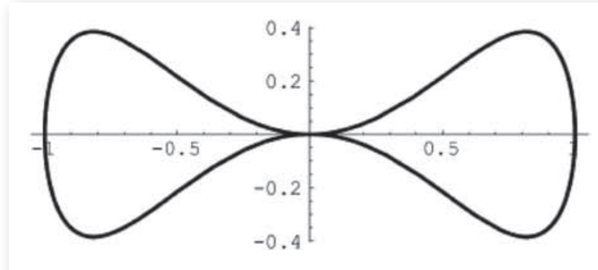


圖 10　啞鈴曲線。

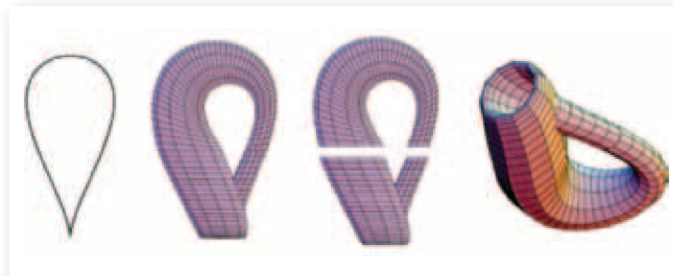


圖 11　將克萊恩瓶視為環繞啞鈴曲線的管面，這些是不同角度的圖示。

如果t在$I=[0,\pi]$的範圍內，可以得到滿足 7 式前三個條件的曲線，而且及它的切向量對所有$t\in I$都有定義，所以有可能以閉矩形做為浸入映射的定義域，並得到一個閉曲面。如果用伸展的啞鈴曲線$\alpha(t)=(3\sin t,3\sin^2 t\cos t)$為中心線，並以$r(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{30}(2t-\pi)\sqrt{2t(2\pi-2t)}$為半徑函數，其中$t\in[0,\pi]$，我們得到克萊恩瓶另一（閉）浸入的例子（圖 11）。

結語

在蒐集了一些將克萊恩瓶做為$\mathbb{R}^3$中浸入曲面的最有趣表示法後，我們回顧了它們的方程，展示了它們的圖形，最後我們定義了兩個新的克萊恩瓶的浸入表式，既符合 1882 年克萊恩所描述的形狀，也具有相當不錯的外觀。它們適合用電腦來繪圖，若在周邊加以固殼（solid shell）後，還可以做為 3D 列印系統的輸入資料集。不過這二者的的數學表式仍然非常複雜，遠不如 1 與 2 的版本優雅。無論從數學或歷史的觀點，提出這兩者的本意都是在尋求克萊恩瓶經典浸入方式的中繼步驟。

圖 12　四張不同版本克萊恩瓶以 3D 列印系統 Z-Printer Z310 Plus 列印的模型照片（材料：石膏）。左上圖：依據參數式（9）與（10）。右上圖：依據參數式（1）。左下圖：依據參數式（2）再切成兩部分的勞森瓶。右下圖：勞森瓶另一種切法的一半，這兩半都是以圓為邊界的莫比烏斯帶，其中強調了一些在曲面上的圓弧。（模型及照片由作者製作。）

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

致謝

本文的圖形是由 Wolfram Research Inc. 的 Mathematica 所繪製，一些 3D 數據是以 McNeel 的 Rhinoceros, v.4 做處理和修飾。

本文出處

Notices 56（2012） No.8 AMS.

譯者簡介

王夏聲為新竹交通大學應用數學系副教授

延伸閱讀

▶一段簡單的短片，顯示如何由長方形黏貼出克萊恩瓶，再切出莫比烏斯帶。https://www.youtube.com/watch?v=sRTKSzAOBr4

▶用 MAYA 動畫軟體製作的克萊恩瓶短片，內容較多，還可以在瓶內外「開車」。https://www.youtube.com/watch?v=sRTKSzAOBr4&spfreload=10