

CCSS 餘波蕩漾

作者：蘇惠玉

近年美國媒體的數學教育論戰

作者簡介：蘇惠玉現任教於臺北市立西松高中，臺灣師範大學數學系碩士班畢業，為《HPM 通訊》編輯。

數

學家與數學教育家的戰爭

美國近三十年來，所謂的數學戰爭（math wars）一直時強時弱地在進行著，這些論戰起因於1960年代「新數學」（New Math）後的課程改革。雖然在新數學運動之後，美國數學教育以「回歸基礎」（back to basic）為口號，回到強調基礎演練，熟練基本運算的老路，不過美國在國際數學競試的評比卻一直處於落後的地位。

1989年美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）公布了《學校數學課程與評量標準》（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics），強調學生是學習的主體，應由學生小組合作，自己建構出數學知識，培養問題解決（problem solving）的能力，不重視程序性的運算技巧。

NCTM 這項改革受到數學教育界的歡迎，各州政府部門紛紛以此為各州數學課程之綱要，但不久之後卻受到許多家長與團體的質疑，也引來專業數學家的批判。數學家認為不可輕忽數學運算的重要性，算術演算並不是只以得到答案為單一性的目標。NCTM 的課程改革，雖然使教室氣氛變得活潑，數學變得有趣，卻也因考試成果不佳備受質疑，數學家更是懷疑學生實質學到的數學知識到底有多少。

既然數學家批評 NCTM 提出的改革課程，那麼換成數學家來主導吧！1997年，加州公布了由數學家領銜主導的新課程標準，同樣受到原先贊同 NCTM 改革課程派學者的批評，認為數學家重技巧而不重對概念的學習分析，憂心走向「新數學」的老路線。

這場數學戰爭的爭議點在於，數學程序性的演練技巧與概念性的理解發展到底孰先孰後。有鑑於此，NCTM 於2000年時再公布《學校數學教育的原則與標準》（Principles and Standards for School Mathematics），將路線稍作修正，納入計算器的使用與乘法表的背誦，試圖在兩邊取得平衡。

2006年，布希總統召開「國家數學諮詢小組會議」（National Mathematics Advisory Panel），這個小組在2008年的報告中指出，關於數學教學，極端以「學生為中心」或「教師為中心」的想法皆無研究證據可支持，「概念理解、演算與程序流暢性，以及問題解決的技巧同樣重要，並且互相鞏固增強。」

CCSS 登場

為了解決長久以來的紛爭，2010年美國全國州長協會與各州教育長官委員會公布《各州共同核心標準》（Common Core States Standards,

CCSS)，目前已有 48 個州加入採用。此標準規範美國 K-12 年級的課程標準，協助學生做好未來升學及就業的準備，並提升美國的國際競爭力。在數學領域方面，企圖呈現更精要、更深入，以及更具關連性及一貫性的課程。

以高中部分（9 至 12 年級）為例，不像之前的年級分年描述，而改以學段內容分類，規劃六項範疇：數與量、代數、函數、幾何、統計與機率、數學建模（Modeling），其中建模屬於用來聯繫其他五項範疇的橫向範疇。從規劃的內容來看，CCSS 的數學課程標準同時著重概念發展與程序演算，並且兼顧問題解決的能力，那麼應該可以平息長久以來的數學戰爭了吧。事實顯示並不是如此。

美國立國重視分權與個人發展，現在更重視多元文化價值，這些都和 CCSS 隱含的「集權」和「單一」違背。因此 CCSS 公布之後，對於數教育的爭議似乎並沒有因為所謂的「共同標準」而平息。依據美國憲法，聯邦政府不得干預各州的教育政策，那麼要如何達到「各州共同」的目標呢？聯邦政府只好運用各種手段威逼利誘，讓各州自願採用，到目前仍有四州在頑強抵抗中。

再者，根據中央大學單維彰在〈美國各州共同數學課程標準〉（《科學月刊》，44 卷第 11 期），CCSS 具體展現了比爾蓋茲的三字真言：少一點、清楚一點、高一點（Fewer, Clearer, Higher）的精神。但數學是最能顯現學生程度差異與學習成效的一門學科，就課程標準所要求的內容「高度」，在幅員遼闊、貧富差異甚大、社會資源分配不均的美國，他質疑真能讓美國各地學生皆能達到預設的學習目標。

我們需要數學嗎？需要教到什麼內容與程度？當許多教育改革專注於改進教學法時，另有一些人士從不同的角度看待數學教育議題的爭論。他們想直接從課程內容下手，認為美國目前高中與大學數學教育所教授的內容，既艱深又不必要，主張大幅刪

除現行的數學課程內容或以其他主題替代。

底下我們選了三篇知名人士的媒體文章，反映這些論點，課程改革議題本身的熱度藉由報紙或網路的普及性，讓反映更為激烈，自然又引來另一番新的論戰，各有各的立場，端看個人的信念。從美國數學戰爭由來已久的背景脈絡，審視文章中呈現的論點，以及眾多迴響反應中的意見，或許可對問題的癥結點看得更清楚，足以作為臺灣數學教育發展之借鏡。

費爾茲獎得主的意見

2011 年 8 月 15 日，《紐約時報》刊登了一篇名為〈如何修正我們的數學教育〉（How To Fix Our Math Education）的文章，由葛芬凱爾（Sol Garfunkel）與曼弗德（David Mumford）共同執筆。兩位作者中，葛芬凱爾為數學與其應用聯盟（Consortium for Mathematics and Its Application）的執行長，曼弗德則是布朗大學的數學榮譽教授，他在數學界地位崇高，獲獎無數（包括 1974 年的費爾茲獎），原先研究的是純數學的代數幾何，後來則轉入應用數學，研究視覺幾何與模式。

在這篇文章，作者針對美國人流傳已久，造成相當多人焦慮萬分的問題：學生數學成就低落，在國際數學競賽表現不良，提出所謂的替代方案。他們文章中的第一個論點為：

所有這樣的憂慮，都根基於一個假設：在為 21 世紀職業生涯準備時，存在一種每一個人人都必須知道的，單一與既定的整體數學技能。這個假設是錯誤的，事實是不同職業會使用不同的數學技能，我們的數學教育必須改變以反映這樣的事實。

他們認為 CCSS 只是承認現行的不恰當數學課程並加以編纂，

……為大多數高中學生的未來生活做準備，這個高度抽象的課程標根本就不是最佳的方式。

這個論點潛在的意思是，大多數職業不需要用到抽象數學，所以高中大部分學生並不需要學習這種數學課程。

他們的文章接著提出替代方案，用與生活情境相關的應用問題教學，取代傳統的數學內容，他們建議以金融、數據分析與基本工程的學習取代傳統的代數、幾何和微積分的學習順序。作者以一個世代前還要求學生學習的拉丁文做比喻，認為抽象數學推理在生活中無法即刻應用，所以現在的學生應該學習在生活中有實際用處的應用數學：

在數學上，我們需要的是「量化素養」(quantitative literacy)，也就是當生活上需要時，有做量化連結的能力……以及「數學建模」(mathematical modeling)，亦即具備在日常問題與其數學表述之間來回運用的實務能力。

數學課程要分階級嗎

這篇文章刊登後，報社網站湧入近 300 條讀者評論，也引發其他網路部落格의 回應，甚至還出現一個專門為這篇文章而開設的網路論壇 (Math is More)。如果在 google 上完整搜尋這篇文章的有效頁面，可以跑出 28 頁的評述或轉載頁面，可見這篇文章相當引起網友對這個議題的關心。

在這些回應裡，有不少贊成的論點，他們認為數學教育應該著重在文章所提的量化素養上，多教一些可以應用在生活上的數量分析技能，尤其是統計。例如：「我不了解為何統計不是基礎教育的一部分，在許多領域中都要處理複雜的訊息。」「生活中需要甚麼樣的技能，我的答案是量化事物的技巧，取得數據再比較數字」。

不過相對這些贊成的意見，批評或反對的意見反而佔大多數，反對的意見大略可以分成幾個面向。首先，針對文中以應用數學取代傳統抽象數學教學的論點，許多人持不同的意見：

應用數學是個讓學生思考與他們生活有關人事物

的方法，這是一種人性化數學教學的方式，但並不意味著你不應該學三角，它表示你應該將三角當成解決特定問題的工具來學習，表示你應該不只理解它的規則，還要知道何時適用不同的數學概念。

有一個高中生覺得在高中學習各種不同的數學是一件好事，這樣讓他有機會可以發掘是否喜歡幾何或三角。

另一面向的意見，則憂慮按照文章的提議，會將學生學習的數學分成帶有階級意識的兩類課程，一類學習標準數學，一類學習「不一樣」的數學，更有激進的網友認為這是將數學分成所謂「大眾數學」(math for the masses) 與「高手數學」(math for their masters)，他們認為文章的預設立場似乎是，一般民眾不理解、不需要也不想要數學。這樣的論點引出一個問題：你如何決定誰需要標準課程，誰不需要？如何區分出需要為日後職業生涯預備標準數學課程的學生？這種做法，實際上反而替學生關閉了需要大量仰賴數學與科學的工作機會。

另外還有一種意見認為問題出在教學現場，尤其是師資與老師的教學法。他們認為數學教育的問題，多半來自教師的教學不能讓學生掌握其意義，沒有啟發性，也無法建立與生活應用的連結。於是數學師資不夠專業，老師薪水太低等等，都是應該改善的現況。

政治學教授反對教代數

2012 年 7 月 28 日，《紐約時報》周日版的意見專欄刊登了一篇備受矚目的文章〈有必要學代數嗎？〉(Is Algebra Necessary?)，作者哈克 (Andrew Hacker) 是紐約市立大學皇后學院政治科學系的退休教授。

在這篇備受爭議的文章中，哈克用了許多數據，「證明」數學 (尤其是代數) 的難度是許多高中或大學生輟學或放棄學業的主要理由。同時因為許多職業並不需要數學精熟的能力，因此他強調在高中

或大學課程中並不需要學習現在訂定的標準且抽象推理的數學課程。

哈克在文章中首先從學生的表現出發，認為現在的數學課程阻止年輕人發揮潛能：

將數學當成必修課程，讓我們無法發現與發展年輕人的才能。為了保持嚴格性，實際上我們正在損耗我們的腦力資源。我以一個作者和社會科學家的身份發言，我的工作十分倚重數字的運用。我的目的不是要讓學生免除困難的學科，而是要提醒大家注意到，由於我們誤導了珍貴資源所造成的真正問題。

他舉出一些輟學以及未能通過畢業考的比率數據，而且根據他查訪的資料來源，代數的困難是課業上的首要因素：

……根據去年國家釋出的資料，在 2008-9 年裡，南卡羅來納州有 34% 的學生輟學，內華達州是 45%。我訪談的大部分教育者都提及，代數是主要的課業理由。

…畢業考大部分都包含代數。在奧克拉荷馬州去年有 33% 的學生沒有通過畢業考，而西維吉尼亞州則有 35%。

由於許多大學入學要求三年的數學成績，因此阻擋了許多有其他天分的申請者。但就算是在大學，惡夢還是沒有結束：

……一項針對兩年制學院的研究發現，在入學生必修的代數課程裡，僅有不到四分之一的學生能通過……

……許多進入高等教育的學生，只有 58% 取得學士學位，主要的畢業障礙是大一數學。而在我從 1971 年開始任教的紐約市立大學裡，有 57% 通不過必修的代數課程。

可怕的是，光是在高中成績及格還不夠，許多美國大學，不論是長春藤還是普通大學，要求的 SAT 數學成績高得離譜，只有 9% 的男生與 4% 的女生才能達到。

另外，哈克以許多例證說明課堂所學也與職業的

要求能力不盡相符，許多企業寧願推動在職進修適用的職業數學課程。另外他還引用喬治城大學教育與勞動力中心（Georgetown Center on Education and the Workforce）所做的報告，估計未來十年僅有 5% 的初階工作，需要代數或以上的精熟能力。

哈克並不是認為數學不重要。他說在這個公民要參與公共決策的時代，像是健保、環境法規、氣候變遷的影響，無不需要人民具有數量素養。只是數學課程搞錯方向了：

……我們需要的不是教科書中的公式，而是要能更理解各式各樣的數據來自何處，以及它們到底傳達了什麼。

沒有證據顯示，能夠證明下式可以導致更可信的政治意見或社會分析：

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$$

他更直言許多職業要求數學只是飾以嚴謹，抬高地位，他以獸醫及醫生為例，說明在治療病患時並不需要數學，因此不需要在求學過程中學習代數或微積分。他認為強調代數只會得到偏差的學生群體，對更好的目標並非必要。哈克說：

我想要以正面的註解來作結論。數學，不論是純數學還是應用數學，已經是我們文明不可或缺的一環……但是對大多數成年人來說，他們對數學的感覺更多是恐懼或崇敬，而不是理解。很明顯，要求每個人學代數，並不會增加他們對這個曾經被譽為「宇宙之詩歌」（the poetry of universe）的學科的欣賞。（有多少大學畢業生記得甚麼是費馬的兩難（Fermat's dilemma）呢？¹）

最後，哈克建議開始思考替代方案，提議諸如「公民統計」之類的課程，學習例如計算消費者物價指數。又或者廣開「數量推理」的課程，最好從幼稚園就開始。另外他甚至還建議數學系要開設數學史或數學哲學的課程。

錯置重點的謬誤

這篇文章收到的迴響更大，讀者回應湧進近 500 條評論，其中有些評論還收到上千人的推薦，網路上更有許多部落客發表自己的評論與意見，在 google 以文章名稱完整搜尋，可以跑出 54 頁的評述或轉載頁面。有線電視新聞網 CNN 更在週一節目的專欄中討論這篇文章所引起的爭議。

哈克認為傳統數學對大多數學生造成很大的挫折與恐懼，所以不應該要求必修，或是以數學成績當成畢業門檻或入學條件。但是在讀者反映的意見中，許多人認為不應該因為困難就放棄或要求：「如果因為學科太困難或沒有用就不要，那首先就要去掉讀與寫，因為也有太多學生不能通過這兩科的技能測驗，更何況目前社會到處充斥著影音，為何要浪費時間學習讀寫？」；更有人諷刺的說：「也許我們應該在智識上，限制那些有天份向科學與數學發展的學生，讓每個人都有相同的機會從高中與大學畢業！」

當然，在數學教育的議題上，師資與教學法始終不會缺席。「這個議題的重點不是代數，而是如何教代數」。很多人認為（美國）高中教師很少是數學本科出身，應該建立專門的師資培育學校。同時，也有許多人不認同哈克所提的以統計取代代數的看法，「你怎麼可能以統計解決問題，卻不理解代數操作」；「消費者物價指數只是加權平均的問題，加權平均不應該取代代數，這是七年級就應該學會處理的問題。」

針對哈克因為未來職業用不到所以不用學的觀點，許多人認為他對數學的認識太膚淺，學習數學的重點不在於結果而是過程，不是他所提的證明或反證一個等式，而是了解在甚麼樣的脈絡下等式成立或不成立：

代數是我們具備批判思考能力的基石，……雖然計算器能幫你解出方程式中的任一未知數，但是它沒辦

法幫你理解背後的原理，它不會告訴你，需要的是哪一個方程式或如何去表述一個等式，……代數教我們如何去思考。

更有人認為，如果因為大部分人在日常生活中用不到代數就不學，那麼，我們在日常生活中也很少用到化學、物理或歐洲史，甚至也很少有工作要求熟練的文學能力，那麼這些在高中是不是也不用學習，為何獨挑代數這一科？

最後在國際競爭力方面，有些人認為這樣做只會減弱競爭力，讓美國退回第三世界的水準，其他國家如中國、印度不改變，為何美國應該做這麼激烈的改變？

數學對科學研究必要嗎

2013 年 4 月 5 日，《華爾街日報》刊登了一篇哈佛大學生物學家威爾森 (E. O. Wilson) 的文章：〈偉大科學家 ≠ 數學厲害〉 (Great Scientist ≠ Good at Math)，這篇文章取自他的書《給青年科學家的信》 (Letters to a Young Scientist) ^①，同樣引起很多討論。

威爾森說他目睹許多很有潛力的大學生，因為害怕數學不夠好，放棄原先的科學研究興趣。他以自身的經驗為證，建議這些年輕學子，不必因為自身數學能力的不足而焦慮，科學家的數學能力不見得要很好，有需要時，再和數學家或統計學家一起合作即可。

威爾森的第一個意見，他說是來自身為職業科學家的專業秘密：

現今世界上最成功的科學家，許多人的數學程度都不過是半文盲 (semiliterate)。

① 在數學中並無「費馬的兩難」，或許是指費馬研究其費馬最後定理之著名評註：「我有一個對這個命題十分美妙的證明，這裡空白太小，寫不下。」

② 臺灣中譯本由王惟芬翻譯，聯經出版社 2014 年出版。

接著威爾森以自己的經驗為例，說明數學能力不用很好也可以成為好科學家，他認為除了少數領域，在其他學科最重要的是形成概念的能力，而「科學先驅者的發現絕少是從純數學提煉的想法。」

威爾森以他的研究與數學家的合作為例，提出所謂的威爾森第一原理：

……當遇到新問題，接下來的步驟通常需要數學或統計方法來進一步分析，如果這個步驟對發現者來說技術上太困難，可以邀數學家或統計學家加入成為合作者。

……威爾森第一原理：由科學家從數學家或統計學家獲得所需的合作，比數學家或統計學家找到科學家來應用他們的方程式要容易得多。

最後他建議想成為科學家的年輕人，要認識自己卓越的科學才能，不必因為數學能力不足而退縮：

對那些有抱負的科學家，關鍵的第一步就是找到令他們深感興趣的主題，並專注於此。在這個過程中，要熟記在心的是威爾森第二原理：對每個科學家，總是存在一個以他或她的數學能力程度足以達到卓越的專業領域。

受限於經驗的誤導

《華爾街日報》刊登這篇文章後，網站收到 200 多條讀者評論，以 google 搜尋，可以得到約 21 頁的網頁。各種意見中贊同威爾森的，大部分是真的沒怎麼用到數學的科學工作者，有一部份演變成「軟科學」(soft sciences) 與「硬科學」(hard sciences) 的傳統爭議。

在反對的意見中，許多人認為威爾森對數學的認知太狹隘或過時。例如參與 CCSS 制訂與推動的加州大學柏克萊分校的數學家傅倫科 (Edward Frenkel)，2013 年 4 月 9 日隨即在老牌網路雜誌《石板》(Slate) 上發表〈不要聽威爾森胡扯〉(Don't Listen to E. O. Wilson)，提出這樣的觀點

(見 90 頁的全文翻譯)。

第二類反對意見認為威爾森犯了邏輯錯誤。好科學家確實不見得需要優秀的數學能力，但是如果有良好數學能力，顯然能夠協助科學家在研究領域做得更好，以不同角度看待問題：

好科學家不見得要是好數學家，就好像好歷史學家不必是得獎的小說家一樣，但是他們確實需要能好好的、清楚的寫作。

有人認為優秀的科學家與數學家至少都需要抽象思考的能力，「發展數學技能就是發展抽象思考能力的方法，……只要能夠進行優秀的抽象思考，就能在任何領域獲得成功。」

第三類反對意見集中在數學與科學的現況。以威爾森研究的領域為例，「生物學使用的策略就像其他科學領域一樣，已經從幾十年前缺乏數學 / 電腦的應用，轉變成豐富的數學 / 電腦應用了」；「代數、微積分、統計與離散數學的專門知識將會慢慢變得基本」；「否認數學以漸增的重要性，變成跟語言一樣的一般工具，就是對現實視而不見。」

其中還有人敏銳的以威爾森 2010 年在《自然》的爭議性文章，質疑他的合作策略。跨領域合作牽涉到專業語言的有效整合，容易因為誤解而導致錯誤，因此如果能有基本或進一步的數學素養，才能夠順利的和數學家或統計學家合作。

最後一類意見，反對威爾森勸告想成為科學家的青年學子，數學不好就算了，還是可以找到適合自己的領域。傅倫科認為威爾森將對數學的恐懼正當化；也有意見認為威爾森這是給學生虛假的希望，很容易在未來失敗，整個科學界也會因為這樣的觀點而進步趨緩。

無解的爭辯

因為 CCSS 的爭議，讓數學教育的議題再度成為美國媒體的焦點，但這些問題都不是新問題，關於數學該如何呈現在教學中？國民基本數學教育該涵

蓋的是哪些題材？數學真的有那麼重要嗎？幾乎是所有國家數學教育論戰的重要問題。

臺灣的數學教育自從建構數學的爭議之後，也同樣面臨類似的討論，今年上路的十二年國教，勢必對高中數學教育造成衝擊。在課程綱要的不斷調整之下，數學教師需要在短短的教學時數中，顧及逐漸擴大的學生差異化，還要面對家長對升學要求的壓力，試圖提升整體學生的表現，這些都是高中數學教師面臨的大難關。

這一、二年來，數學教師半自願、半被迫的參加了不少有關差異化教學、有效教學與評量的研習，參與許多為了優質化與領先計畫設計的教學方案，規劃為學校招生而開設的特色課程，這種種努力，能否為臺灣學生應付未來生活與各種職業所需的數學技能做好準備？

臺灣對數學教育議題的關心與討論表面上不如美國熱烈，但是美國數學教育所面臨的問題與爭議，我們卻無法避免。學生對數學的恐懼以及數學成就

低落似乎是全球性的問題，在看到美國長久以來面對這些議題提出的討論與改變，想想臺灣的數學教育現況。不管政策與學校提出多少要求與計畫，數學教育改革的核心永遠都是教師。只有教師教學的信念與方法改變，才有可能落實到學生的學習上，也才能在未來形成改變。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉<http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php>

延伸閱讀

► Garfunkel, S. & Mumford, D., How To Fix Our Math Education, Aug. 15, 2011, *New York Times*.

網址：http://www.nytimes.com/2011/08/25/opinion/how-to-fix-our-math-education.html?_r=0

► *Math is more*, <http://www.mathismore.net>

► Hacker, A., Is Algebra Necessary?, Jul. 28, 2012, *New York Times*.

網址：<http://www.nytimes.com/2012/07/29/opinion/sunday/is-algebra-necessary.html?pagewanted=all>

► Wilson, E. O., Great Scientist ≠ Good at Math, Apr. 15, 2013, *Wall Street Journal*.

網址：<http://online.wsj.com/articles/SB10001424127887323611604578398943650327184>