白臉：嘆息之後

作者：張海潮

作者簡介：台大數學系退休教授。

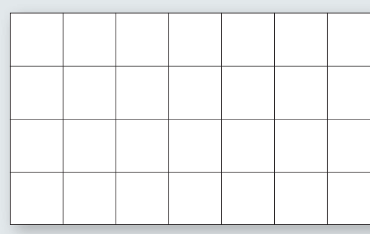
本文是筆者讀《一個數學家的嘆息》之後的回應，文中 L 代表原作者 Paul Lockhart 教授，H 代表本人。頁數是指自 L 書中引文的出處。

數學（藝術）的真與美

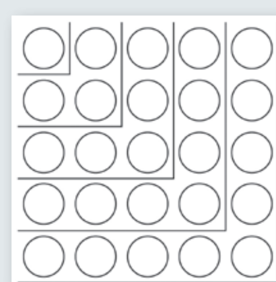
L：數學是一門藝術（正如音樂和繪畫，37 頁）

H：我完全同意，雖然制式的教育並不這麼認為。一般的看法是把數學當作一門工具，就像國文和英文，用以學習其他的學科，例如：物理、工程、資訊或金融管理。我們都同意國、英文的學習，在語言溝通的能力之外，本質上是文學和因為文學而自然承載的文化。不可否認，數學的本質，如 L 所說，正是真與美，屬於藝術的範疇。

小時候，我們家是一間日式的房子。午飯後，我經常在客廳的地板上午睡。躺在地板上，眼前是天花板，總共有 28 片，是一個 7×4 的排列：



我總是數一數（今天天花板還是 28 片嗎？）。在很小的時候，我就能在天花板上選擇不同的順序，從 1、2、……逐一數到 28。接著，不知道從什麼時候開始，我會用 2、4、6、8、10、……的辦法數到 28。再來，我嘗試用 3、6、9、…數到 27，剩下 1 片。我一直玩這個遊戲，有一天玩到四個七等於七個四，這個時候，我還沒有學九九乘法表，而事實上，我連除法原理都已經會了。對照 L 的書中有下面這個例子（124 頁）：



圖形告訴我們連續奇數的和總是一個完全平方數，圖形所呈現的是平方數的一種分解，這是平方數的「真」，而圖形的呈現方式正是數學（藝術）的美。

這和我小時候的經驗是吻合的，28 這個數有各種各樣的分解，這是美，但都是代表 28，這是真。很難想像，當我們離開了真與美，我們要怎樣尷尬的學習數學。

還有一件重要的事，對數學老師來說，如果他不能掌握或是無法相信數學（藝術）的真與美，他要如何持續他數十年一成不變的（公式考題）生涯呢？

就以 $ax^2+bx+c=0$ 的根是 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 來舉例說明好了。

這個公式一看就覺得十分醜陋，到底從何而來呢？首先，如果$ax^2+bx+c=0$有兩個根的話，那 ax^2+bx+c 就會等於 $a(x-\alpha)(x-\beta)$ ，這是 ax^2+bx+c 的「真」：

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

把等號在右邊乘開，比較一下，就會得到；

（1）$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

（2）$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

現在，我們想要解出 α 和 β 。但是，我們只知道 α 、β 的和與 α 、β 的積。在（1）和（2）兩個式子中，α 和 β 的角色是對稱的，它們被「綁」在一起，一時分不開。

但是我們理解，如果可以知道 $\alpha-\beta$ 的值，那就一定可以解出 α 和 β ，而事實上，如果能解出 α 和 β，也等於多知道了$\alpha-\beta$。經過了這樣的探索，我們知道必須想辦法算出$\alpha-\beta$。但是顯然，只能利用（1）和（2），我們回想

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ 以及

$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

而得到

（3）$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

換句話說，$\alpha-\beta$和 $\alpha+\beta$，可以透過各自的平方來聯繫，於是由（1）、（2）、（3）

$(\alpha-\beta)^2=(-\frac{b}{a})^2-4\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{a^2}$

暫時停在這裏；人人都說b^2-4ac 是判別式，到底判別什麼呢？其實它是判別α 和β是不是相等，而不是現在大家（老師）所說的，判別α、β 是不是實數。

所以 L 會說：

數學是說明的藝術（ the art of explanation ）。如果你不讓學生有機會參與這項活動──提出自己的問題、自己猜測與發現、嘗試錯誤、經歷創造性的挫折、產生靈感、拼湊出他們的解釋和證明──你就是不讓他們學習數學。所以，我不是在抱怨我們數學課堂上出現的事實與公式，我抱怨的是我們的數學課裏沒有數學。（44 頁）

數學學習的焦點要放在哪裏

L：一門學科碰巧具有一些世俗上實際的用途，不代表我們必須將這個用途當作教導和學習的焦點（62 頁）。

H：我完全同意，但是不禁要問：教導和學習的焦點又要放在哪裏呢？事實上，所有的數學老師都會同意大部分中學學的數學基本上是沒有用的。就以從正弦、餘弦定理出發的測量問題來說好了，自從有雷射測距儀之後，誰還要用三角測量呢？所有對數學學習必要性的理解，就是升學考試罷了。於是在考完之後，忘掉數學就是一件再愜意不過的事，這是大部分人共同的經驗，在《中國時報》2014 年 6 月 5 日的短評〈數學之用〉中，提到：

對很多不擅長數字的學生來說，數學課宛如一場惡夢，在聽嘸與挫折中生不如死，除非大學念的科系或日後從事的工作與數學相關，否則很多人考完大學後，硬塞在腦子裡的三角函數、代數、

微積分便全部以光速飛去，消失得比青春小鳥還快，而且絕大多數人往後一輩子都不會再用到。

因此一直也有人質疑，要花那麼多時間在痛苦指數高、實用效益低、遺忘速度快的數學上，到底值不值得？

（全文見 http://www.chinatimes.com/newspapers/20140605000857-260109）

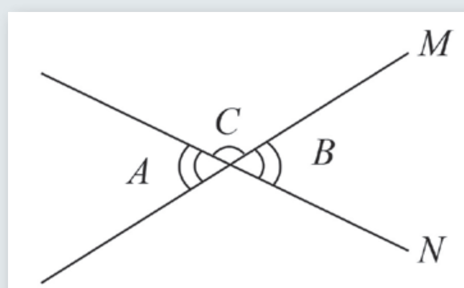
數學老師看了上文一定很挫折，如果沒有考試，例如，國中升高中就如小學升國中一樣，就近分發入學，那國中數學還有人學嗎？但是反過來想，小學升國中免試已經 40 幾年了，但是小學生還是規規矩矩的學數學。小學是包班制，導師負責教國文和數學，你只能說小學老師教的不見得好，卻不能說該教的沒有教吧！

總的來說，教的好和教的有趣是等價的，如果因為教的有趣而延緩了一些進度，所有的人都會覺得值得。只是為什麼在教學現場總是為了所謂的「進度」而搞得大家生不如死呢？關鍵就在考試，升學考試，所以為什麼不取消升學考試呢？可以想像，一旦取消國中升高中的升學考，真正的免試入高中，國中數學教育的現場一定充滿了創意和快樂。

什麼是數學證明？

L：證明，是數學論證，是一部小說，是一首詩。它的目的是在「滿足」（satisfy）。一個完美的證明應該是要說明，而且應該說明得清楚，巧妙且直截了當。一份完美、製作完善的論證，應該感覺像是醍醐灌頂，應該是指路的明燈——它應該要提振我們的精神、照亮我們的心靈，而且應該是有趣迷人的。（81 頁）

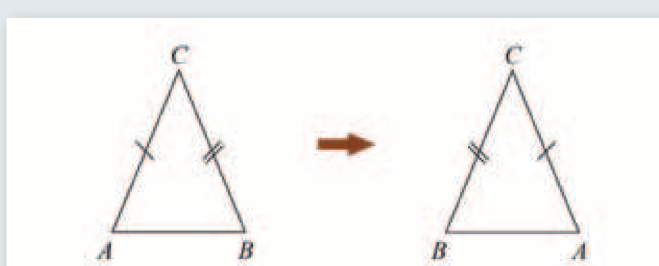
H：這一段話說得太好。L 舉了一個例子來說明一個不好的證明。（82 頁）



直線M和N相交，求證 $\angle A = \angle B$。傳統的證法是 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle C = 180°$，因此 $\angle A = \angle B$。但是 L 說：$\angle A$是M和N的交角，$\angle B$也是M和N的交角，$\angle A = \angle B$是自然而又明顯的現象，它的本質是上、下對稱也是左右對稱，為什麼要把$\angle C$牽拖進來呢？我同時也想到證明等腰三角形兩底角相等這件事：

如下左圖$\overline{AC} = \overline{BC}$，要證$\angle A = \angle B$。把三角形左右翻過來，得下右圖：

則由SAS全等，此二三角形全等，是以$\angle A = \angle B$、$\angle B = \angle A$，變成理所當然，還有必要作輔助線——分角線，中線，或是高嗎？



另一方面，為什麼不能在畫出等腰三角形後，由學生來討論 $\angle A = \angle B$ 的關係和提供解釋或證明呢？還有就算我們證明了等腰三角形兩底角相等，請問這個

定理要帶我們走向何方呢？就像 L 所說，指路的明燈，路到底在哪裏？

我曾經在國中數學老師研習的場合提問：在教學生 SAS 全等形判定之後，如果你只能教一個定理，你要教哪一個？大部份的老師會回答：「畢氏定理」。我接著問，如果你還能再教一個定理，你要教哪一個？

通常的回答是「沈默」。

當我們回頭看歐幾里得的《幾何原本》時，我們發現第一個問題的答案不是「畢氏定理」，而是「等腰三角形兩底角相等」，這是歐幾里得《幾何原本》的命題 5。（命題 1 是求作等邊三角形，命題 2 是以已知點為端點求作一線段等於已知線段，命題 3 是在一線上截取一線段等於已知線段，命題 4 是SAS判定）。歐幾里得為何作此安排？

如果你同意前述 L 對證明的要求，再從真與美的角度思索，你就會同意歐幾里得。事實上，畢氏定理是《幾何原本》的命題 47。

類似的問題可以一直問下去，最後的答案應該是 L 的：

一位好的老師也可以引導討論及問題的走向，使得學生能自己發現及發明數學。真正的問題是，行政官僚體制不容許個別教師做這樣的事。因為要遵循一套課程綱要，老師無法主導教學內容。標準還有課綱都是不應該存在的。應該讓老師做他們覺得對他們的學生最好的事。（94 頁）

到此，不只讀者，連作者 L 都覺得自己「完全瘋了」

是的，不再有考試，因此也無「進度」可言，老師自己決定如何照顧班上的同學。如同美術這門課，學生自由在紙上展現自己的心靈，老師只需從旁觀察，適當提問，協助學生完成自己。（93 頁）

如果數學課可以這樣進行，那肯定會讓所有的老師發瘋。

回到現實

L：人們將數學當作是創造力的反面事物而遠離它，這是多麼諷刺的事呀。他們錯過了這門比任何書藉都古老、比任何詩都深刻，比任何抽象畫都抽象的藝術形式。而這正是學校做的好事！無辜的老師對無辜的學生造成傷害，這是多麼可悲的無間輪迴。我們全部的人，原本可以享有多少的樂趣呀。（100 頁）

H：人們將天然的存在當成落後而遠離它，這是多諷刺的事呀。本來，就像當年實施九年國教一樣，所謂的十二年國教，不就是蓋好學校，找好老師，就近入學嗎？這樣的做法一如數學的本質，真與美。我們做真誠的事，我們用最美的辦法，真與美必能洗滌我們長久被污染的心靈。現在，不是這樣，所有的措施都一再污染我們的心，我們被迫在夾縫中找生路，只好無所不用其極。

無辜的老師必須在早上 7 點 15 分發考卷，書商必須供應考卷。國中生在四點放學之後，到補習班報到，在那裏吃便當，補習到九點回家。這就是 L 所說的「可悲的無間輪迴」。

有人擔心而對我說「L 太理想，他的說法是空中樓閣」。我的回應是「現實實在太醜陋，誰也無法在這樣虛假而又醜陋的現實中活下去，請給我們一條活路，請給我真與美」。

下面附上一位臺大文學院學生讀《嘆息》的讀後感部分摘錄：

我非常討厭數學，討厭到甚至是只要一講到「數學」兩個字，就會開始掉眼淚。但是這本書，卻讓我能敞開心房，去接受數學。原來，三角形面積公式：底乘高除以二，竟然只是這麼簡單的概念；原來，半圓裏的三角形，它的頂點無論在圓周的哪裏，都是直角，也是如此易懂的概念！以前我看到那些證明、公式，總認為他們是妖魔鬼怪，原來他們也可以這麼純粹、充滿創意！

這本書，可以說是數學教育的烏托邦。雖然我也知道，這套教育理念要實現，可能真的有它的難度存在。但是我仍希望，這樣的想法能夠在臺灣的教育界流行，讓數學老師發現僵化的數學教育並不可行。目前的方法——背誦大量公式、作大量困難的習題，只會讓學生更討厭數學、更不願意敞開心胸去接納數學。若老師能重視帶領學生思考問題的過程，才可能引發學生學習的興趣。

其實閱讀這本書，是讓人難過的。因為想到自己的青春歲月，就這樣因為不適合的教育方式，而無法好好的發揮自己的想法、無法盡情揮灑創意。把數學只是變成冷冰冰而死板的公式。最終，無法在這樣的體制下存活的腦袋，只能選擇關機、放棄。原本，在高中畢業之後，我就發誓這輩子再也不和數學產生任何瓜葛。但是在閱讀完這本書後，我改觀了！數學應該是一個好玩的遊戲，作數學不需要上課或讀書，只需要充滿想像力，對世界充滿好奇心。未來，我想我會重新面對數學，不會再認為數學差是因為自己太笨了！

最後我引書中 L 的自剖做結

我唯一感興趣的是用數學來度過美好時光，以及幫別人也做到這一點。對我的人生而言，除此之外我想像不出更有價值的目標。我們全部的人，出生到這個世界，到了時候都會死掉，這就是人生。在這段時間，讓我們好好享受我們的心智，以及應用我們的心智創造出來的奇妙又好玩的事物吧。（116 頁）∞