涂林本事

不可計算的一生功業

作者：庫珀 S. Barry Cooper　譯者：周樹靜

作者簡介：庫珀是英國數學家與計算理論學家，現為英國里茲大學教授。他曾任 2012 涂林年的顧問委員會主席。

重點摘要：

▶涂林以涂林機模型的觀點掌握可計算性的意義，而涂林機最後走出另一條歷史別徑，發展成日後的電腦。實際製作電腦的馮諾曼將此歸功於涂林。

▶如同哥德爾不完備定理，涂林發現任何具有合理強度的數學理論都是不可判定的，亦即其中都包含了不可計算的定理，挫敗希爾伯特的樂觀思想。

▶涂林晚期仍深入思考現實世界的問題，發展型態發生學的理論，解釋型態突現的機轉。另外更發展體稟與人造智慧的想法，發明影響深遠的涂林測試．

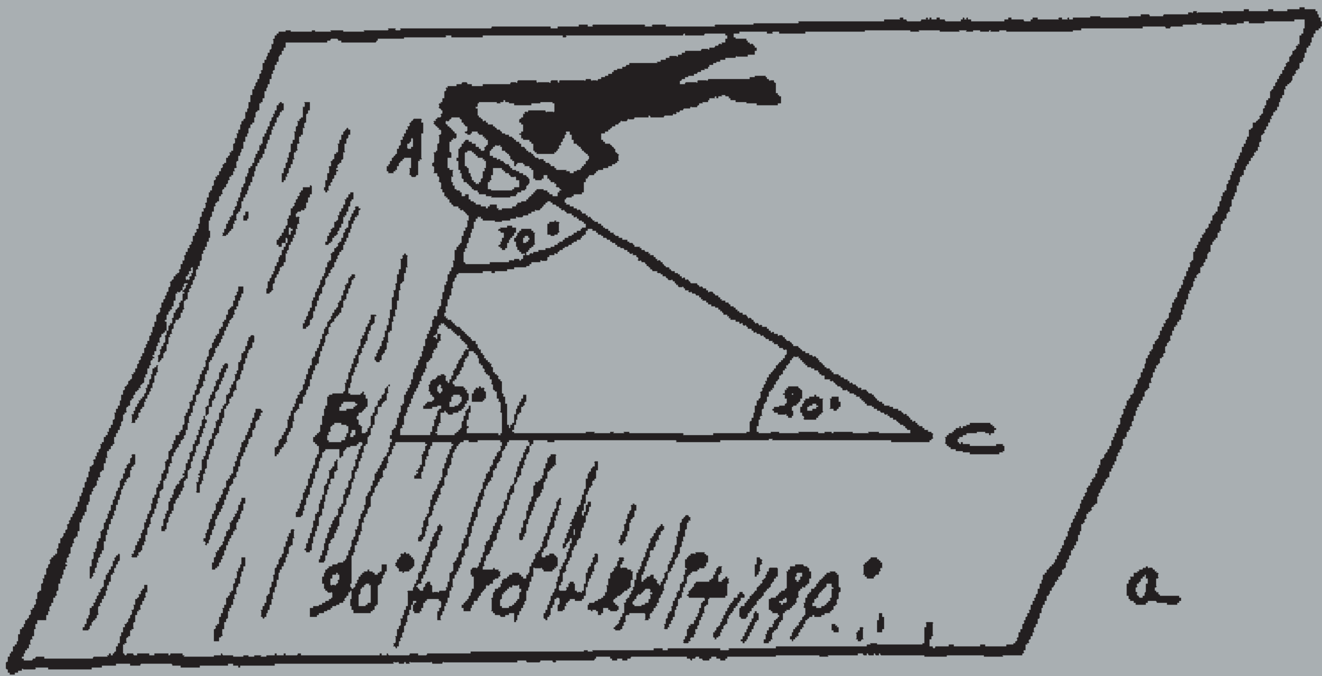
活在可計算的世界

年紀夠大的人，可能還記得當年著迷於閱讀加莫夫（George Gamow）寫的科普書，其中最有名的莫過於《1、2、3 到無限大》（*One, Two, Three⋯ Infinity*）。加莫夫要我們想像自己住在二維的氣球表面上，只有曲面的二維生活經驗。然後他讓我們理解，如何只透過純粹的二維觀察，偵測曲面的三維彎曲特質。圖 1 就是 1960 年版本 103 頁的插圖。

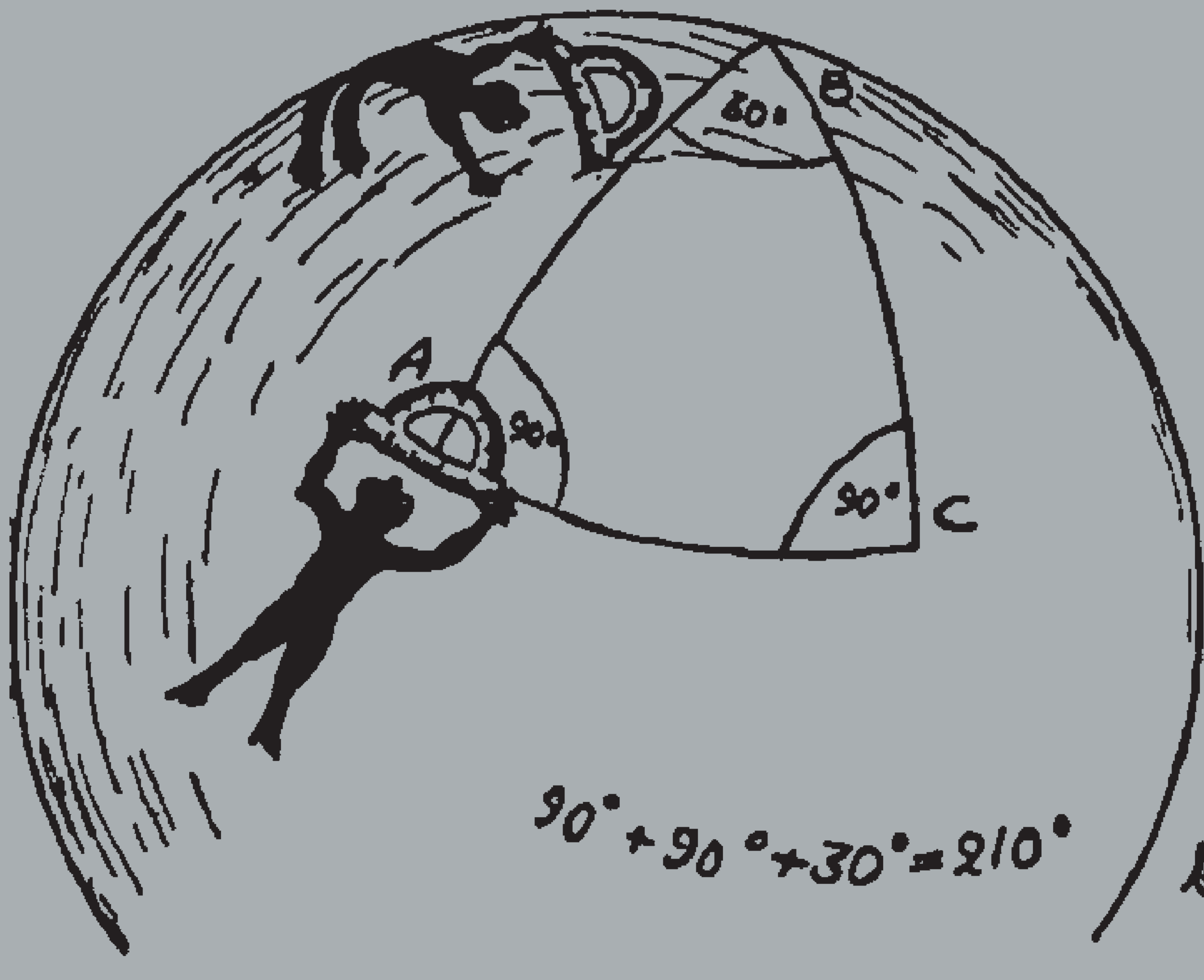
演算法縱橫於我們的四維時空，與人類同在大概已有數千年，提供我們掌控與理解所有日常生活各方面的程序。今天演算法化身為電腦程式，演算法或電腦程式可以說是自成一種因果維度，問題是另外是否還存在非演算法的因果維度？而且就算是存在，它的地位重要嗎？

注意到加莫夫的例子顯示，一方面，住在二維空間想要找到第三維度的證據不是易事；但另一方面，正因為我們能找到證據才真的十分重要。當然，如果我們運用附圖呈現的數學模型，似乎不存在的第三維度就看得一清二楚，這是因為從外鳥瞰的緣故。但是深入想想，儘管數學鳥瞰令人更理解彎曲空間的特性，卻不表示此模型和我們的（二

圖 1　平直世界與彎曲世界上的二維科學家各自檢驗關於三角形內角和的歐幾里得定理 [14]。



a



b

維）世界有關。我們**仍然**需要從所居的二維世界內部檢查三角形的性質，才能將現實和數學對應起來，也才能運用此模型的全部威力。

回顧 1930 年代，哥德爾（Kurt Gödel）、克里尼（Stephen Kleene）、丘奇（Alonzo Church）以及涂林（Alan Turing）的確建立了因果關係背後的可計算維度數學模型，這讓丘奇和涂林得以跨出這個維度，運用他們的模型，去探索不可計算性的全新維度。

在當時年齡 24 歲的涂林研究裡有一個特別重要的部分，就是以一種新穎的**類機器**模型為基礎去探討可計算概念的限度。這個涂林機（Turing machine）以無人能預料的方式讓他遠近馳名。涂林的想法是利用哥德爾的編碼法❶，將涂林機的程式轉化成可讓機器計算的資料，於是催生了所謂的通用涂林機（universal Turing machine）。這種機器可以將**任何**其他給定的機器編碼做為輸入資料，執行與該機器完全相同的計算。通用機可以儲存程式，這讓人們在尚未造出真正的機器之前，就得以理解現代內儲程式電腦（stored-program computer）的原理。

這個想法引出各式各樣的問題。正如加莫夫的例子所示，得到數學的鳥瞰容易，問題是要和現實相結合，這是有實際面的問題。在當時，連要造出這個抽象機器的玩具模型也十分困難。但是工程師終究找出聰明的解決方案，像是美國賓州的 EDVAC、英國曼徹斯特的「嬰兒」、威爾基斯（Maurice Wilkes）的 EDSAC，以及源自涂林自己想在英國國家物理實驗室（NPL）建造的電腦 Pilot ACE。不過到了今天，有些工程師認為很難歸功（甚至很難理解）為何涂林被譽為電腦之「父」，他們認為馮諾曼（John von Neumann）1945 年的 EDVAC 報告，在計算史上的衝擊比涂林的研究更大。儘管如此，1948 年馮諾曼自己在加州帕沙迪納的希克森學術會議演講中，把功勞歸於涂林 [37]。

更重要的是電腦改變了生活的全貌，並在可計算的世界裡，強化了人們的生活經驗。至於不可計算性，則變成一種數學奇物，成為不在意現實意義、喜好研究困難數學問題的研究者的遊戲場，他們擁有與眾不同的實在感。**當然**，他們會覺得這些東西實在，畢竟他們處理的是以可計算關係相連結的實數，有點類似常態科學處理的是以可計算因果關係所組織的資訊一樣。

不可計算性簡史

可計算性充斥在我們左右。宇宙充滿各種可計算性，可計算的自然律讓人們得以生存，生物與學習的演算法指引了動物或人類的行為，還有可計算的自然常數如 π 與 e。而可演算的內涵讓大自然的數學具備了無窮的特質，得以打開通往不可計算性的大門。儘管費曼（Richard Feynman）也許認為「但是真是如此，物理世界可以用離散化的方式來表示……我們將必須改寫物理定律。」[13] 但是在現實世界的數學中仍然持續運用實數。

懷疑人們能否了解因果關係的說法始終不斷，容許神意的介入或許能取得保證，卻又添加了它本身的不確定性。質疑可預測的因果界限的想法至少可以溯及 11 世紀波斯哲學家安薩里（Al-Ghazali）的《哲學家的矛盾》（*The Incoherence of the Philosophers*），一路經過休謨（David Hume）與柏克萊（George Berkeley），一直到達現代像是對突現（emergent）現象的興趣。

據 1971 年版的《牛津英語辭典》，incomputable 這個詞有紀錄的使用可回推到 1606 年，比 computable 甚至還早了 40 年。但這個詞要到 1930 年代才取得明確的意義，當時出現幾種模型探討可計算的自然數函數的意含。正如前述，丘奇和涂林因此得以提出他們不可計算的物事，其中的關鍵觀點，是存在一個穩固而直觀的可計算性觀念，讓所

有相異的形式系統殊途同歸，這個觀點如今稱為丘奇 / 涂林論題（Church-Turing Thesis）。正是涂林以涂林機模型為基礎而小心論證的1936年論文（圖2），讓哥德爾相信這個論題的真確性。

根據哥德爾的朋友王浩敘述 [38，96 頁]：

這許多年來，哥德爾慣常評譽涂林 1936 年的論文是掌握 [可計算性] 直覺概念的拍板之作，在這方面他不曾提過丘奇或波斯特（Emil Post）。他一定是認為涂林是唯一給出有力論證顯示這個明確概念適用的人……尤其，他可能已經察覺丘奇為其『論題』提供的論證，並認定是不允當。很顯然，哥德爾和涂林對彼此有很高的讚譽，……

在數學領域，涂林的論文對希爾伯特的觀點是重重一擊，這項觀點的知名陳述是希爾伯特 1931 年 9 月 8 日的科尼斯堡演說（引自多森（John Dawson）1997 年的哥德爾傳記）：

數學家沒有不知道這回事，而且以我的看法，自然科學亦然……為何沒有人能找到不可解問題的真正原因，依我的看法，是根本不存在不可解的問題。

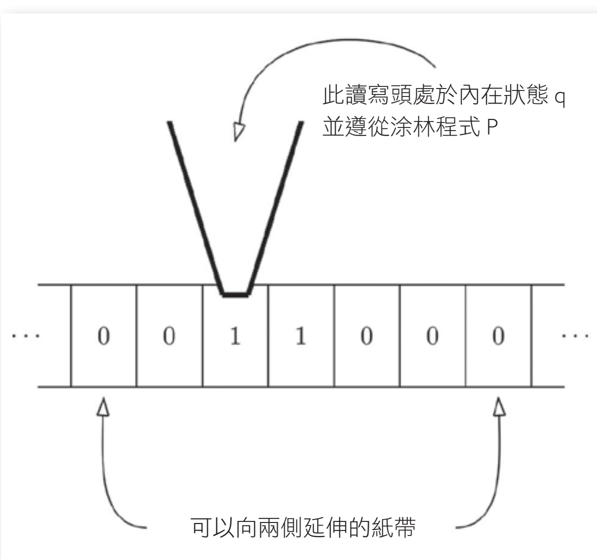


圖 2 庫珀（S. Barry Cooper）《可計算性理論》（*Computability Theory*）書中的涂林機。

相比於愚蠢的無知，我們的信念斷言：我們必須知道，我們終將知道。

涂林機的通用性意味著它必須執行許多錯誤的程式，有些程式導致無法停止的計算，一般來說我們也無法判斷，哪些輸入才會導致適當的計算。所謂**通用涂林機的終止問題**（The Halting Problem for the UTM）被證明是不可解的。能讓通用涂林機終止計算的所有輸入所成的集合是**計算可枚舉的**（computably enumerable），因為你可以條列出所有可能的計算，觀察哪些會算出結果，從而列舉出那些會終止計算的輸入。但是這個集合是**不可計算的**，因為你**永遠無法確定**還在進行的計算是否某天會停止。

更戲劇化的是，各種數學理論都對通用涂林機「有話說」。涂林用自然數為涂林機的動作編碼，他的想法來自哥德爾昔日的巧思，可以讓皮亞諾算術系統討論自己。涂林發現**任何**有合理強度的數學理論都是**不可判定的**（undecidable），亦即其中都會包含不可計算的定理集合。尤其涂林證明了後來稱為丘奇定理的敘述，亦即沒有電腦程式可以測試自然語言敘述的邏輯真確性，此後又發現了許多不可判定的理論。

這是個能夠證明許多自然的不可計算集合存在的強力技巧，它的缺點是不存在其他證明不可計算性的好方法。此外，麥熙爾（John Myhill）在 1955 年證明所有已知不可計算物件的自然範例，從計算觀點彼此都是一樣的 [24]，差別在於符號的轉譯。不過由於事實上，不可計算集合構成的所謂涂林宇宙（Turing universe）擁有非常豐富、數學挑戰性很高的結構，這造成一些難題。如果這些結構相當程度存在於現實世界，那麼這些實體化身的計算特

❶ 哥德爾在證明他知名的不完備定理時，運用了把邏輯符號或命題對應到自然數的編碼法，常稱為哥德爾數。

性，大部分將逃離我們的掌握。如果我們想解決一個正常且有意義的問題，一旦失敗了，我們或許將永遠無法知道，這是因為世界的這一小部分牽涉到異於終止問題的不可計算特質，還是僅止於一直沒找到恰當的程式來計算。

這個**指認**數學不可計算性的單純困難，可以用這個指認本身就是高度不可計算的問題來解釋。這裡具備了數學和現實關懷分道揚鑣的所有要素，涂林自己在令人驚訝的 1939 年論文裡，給出他在可計算性理論邏輯上最後而偉大的貢獻。在《涂林：成就與影響》（*Alan Turing*: *His Work and Impact*）[7] 合集中，西格（Wilfried Sieg）撰寫的〈益智遊戲的正規形式：涂林論題的變奏〉（Normal forms for puzzles: A variant of Turing's Thesis）是一篇極佳的評論，述及涂林對遊戲、群等領域中不可判定問題的持續興趣。當然最知名的不可判定結果是對希爾伯特第十問題的負面解答，這是戴維斯（Martin Davis）、馬提亞塞維奇（Yuri Matiyasevich）、羅賓遜（Julia Robinson）與普特南（Hilary Putnam）的貢獻。誰會想到，只是在平常高中算術命題前再添加一個存在量詞，就會導致任何電腦都無法解決的問題。

1939 年後，涂林的研究更明顯的根植於現實世界，而非早期那種包羅萬象的抽象體系。數學家已經有了終止問題及其各種變奏，在數學上無所不包又具標準代表性，只是這些對於特殊此世的日常生活來說，未免太過於人工矯飾。相反的，日常物事是無盡複雜卻又無法分類。這種理論沒有用處。

想要了解數學在這個遞迴理論時期❶，帶著孤立又喪失其在更廣闊世界中的責任感，可以參見索爾（Robert I. Soare）最近文章如 [29] 的說明。日後涂林在曼徹斯特大學關於人工智慧、聯結模型（connectionist model）與形態發生學（morphogenesis）的研究，將包含未來關於事物形態研究的啟發預示。

前往不可計算世界的數學階梯

1930 年代的不可解問題，可以給出不可計算事物的範例，但是其理論的抽象程度遠遠超出牛頓或愛因斯坦那種具體的數學。同時，源自現實世界那些深刻又艱難的問題，卻又很難只是依照邏輯來分析。涂林研究之所以重要，是因為他能從差異很大的現實世界謎團中，擷取出可計算性理論的精髓。涂林有種深入理解結構的本領，並以嶄新的方法發想其建構的精義。典型的涂林並不是在**應用**數學，而是從他所探索的脈絡裡將它**構造**起來。愛因斯坦曾說 [10，54 頁]：

> 當我們說我們理解一組自然現象時，意味著已經找到一個可以囊括這些現象的構造性理論。

涂林是逐字理解這段話的。數學是涂林生而知之的稟賦。涂林 1939 年的文章充滿讓很多人厭惡的抽象概念，但其主旨只是想理解哥德爾不完備定理在現實中可以如何發展。注意到哥德爾理論中不可證明的算術敘述並不難描述，但當我們擴張原來的理論將該敘述納入時，又會出現另一個類似的不可證明敘述。就涂林而言，這是一顆種子，一個可計算的迭代過程，足以讓理論不斷擴張。於是運用克里尼的可計算序數（ordinal），就可以超限的（transfinitely）擴張這個過程。日後，邏輯學家如費弗曼（Solomon Feferman）和拉思真（Michael Rathjen）將增益這個涂林階梯，進入不可計算與證明論的層次，遠遠超過涂林登及的高度。就某種意義來說，涂林已經找到他想知道的結果。隱藏在抽象巒峰之間的，是涂林研究一貫的坦率特質。他說 [33，134-5 頁]：

> 數學的推理可以視為……直覺與推演（intuition and ingenuity）❷……兩者結合的演練。在哥德爾之前，有人認為所有數學的直覺判斷都可以代之以有限幾條……法則，直覺的必要性於是完全被排除，但是

我們的討論走到另一個極端，被排除的不是直覺，而是推演。儘管如此，我們的目標仍是朝著相同的方向。

結果涂林完成一套出色的數學分析，去理解如何構造航路穿越一次相變（phase transition），並依路徑的特性提升一個不可計算的層次。攀爬者有一定的自由度可以選擇攀手與立足點，這讓攀爬過程遠超過演算法所能及。這個現象和一些人如普里戈金（Ilya Prigogine），在非常不同的脈絡提到的計算不可逆性若合符節。

對涂林從不可計算路徑得到可計算結果的分析，有些數學家特別感興趣。這項分析頗符合數學發現的經驗，從創造性的得出定理開始，接著發現演算法式的推演過程。我們所依賴的是證明中的「瀰因」（memetic）特性，在社群中散佈就好像病毒一樣。其中一項累積真確小敘述成為大定理的過程，宛如自然界具體因果性在邏輯之對應物的，就是數學歸納法。

對證明論者，歸納法扮演著關鍵的角色。他們依照證明使用到的歸納複雜度的層級將定理分類。大部分的定理從證明論的角度都很簡單，如今費馬最後定理已經證明，而邏輯學家麥金泰爾（Angus MacIntyre）已經能在一階算術中描述這個定理的證明。這種證明的觀點牽涉到真理簡單的逐步累積。當然證明的發現是完全不同的事，就像理解證明也一樣。

我們慢慢看到一個模式：簡單的規則、無止盡的迭代，以及突現的形式（形態），出現在可計算性的邊緣。這正是涂林日後在大自然中觀察到並試圖用數學來掌握的現象。

另一個探索不可計算性的龐大數學機器是神諭涂林機（oracle Turing machine），它以一頁的篇幅藏在涂林 1939 年的論文中，其中主要的想法是容許涂林機相對於某無論可計算與否的實數做計算。如果檢視運用此神諭機所計算的函數，這個函數便被列為以神諭實數為自變數來計算的函數，這樣基本上就可將這部機器的作用，視為從某些實數計算出另一個實數。這給出一種內部符合大自然基本可計算定律的計算模型，因為在我們大部分知識的背後正是大自然的運行。

再回到涂林 1936 年討論可計算數的文章，神諭機所做的計算是從**另外的**實數來計算某實數。我們可以容許機器相對於不同的神諭條件做計算，並承認這些更高類型的計算過程，我們稱呼由神諭機計算的映射為**涂林泛函**（Turing functional），這些在實數上作用的整體結構稱為**涂林宇宙**。

事實上，儘管涂林關心電腦的互動，但是他對神諭機的數學發展並不特別感興趣。這留給另一個重要人物波斯特來接手，他將實數分成可以從彼此互相計算的等價類，稱為**不可解度**（degrees of unsolvability）。然後波斯特再利用涂林泛函於實數序，得到不可解度的序（ordering），波斯特得到的結構後來簡稱為涂林度（Turing degree）。

觀察這個結構有三項關鍵心得，首先此結構非常複雜；其次，如果某科學領域可以用實數與以其為基礎的可計算定律來描述，那它可以被嵌置於涂林宇宙中，於是其中所對應的涂林宇宙限制，將告訴我們現實世界因果結構的訊息（也就是先前所述，加莫夫二維人的因果第三維度）；最後，這個模型可以成為各種計算座落其上的地域，其中資訊將取得首要角色，並賦予計算的形式某種結構，讓計算**再實體化**（reembodiment of computation）。

❶ 譯註：依照丘奇 / 涂林論題，遞迴和可計算可以交換使用。

❷ 譯註：根據涂林原文的用法，所謂 Ingenuity 相對於直覺，是「以命題的恰當安排，甚至加上幾何圖形或畫圖，來輔助直覺[的不足]。其目的是一旦這些都安排的十分妥當，那些直覺步驟的真確性就不可置疑。」接近嚴謹的推導過程，故不譯為「天才」或「原創」。

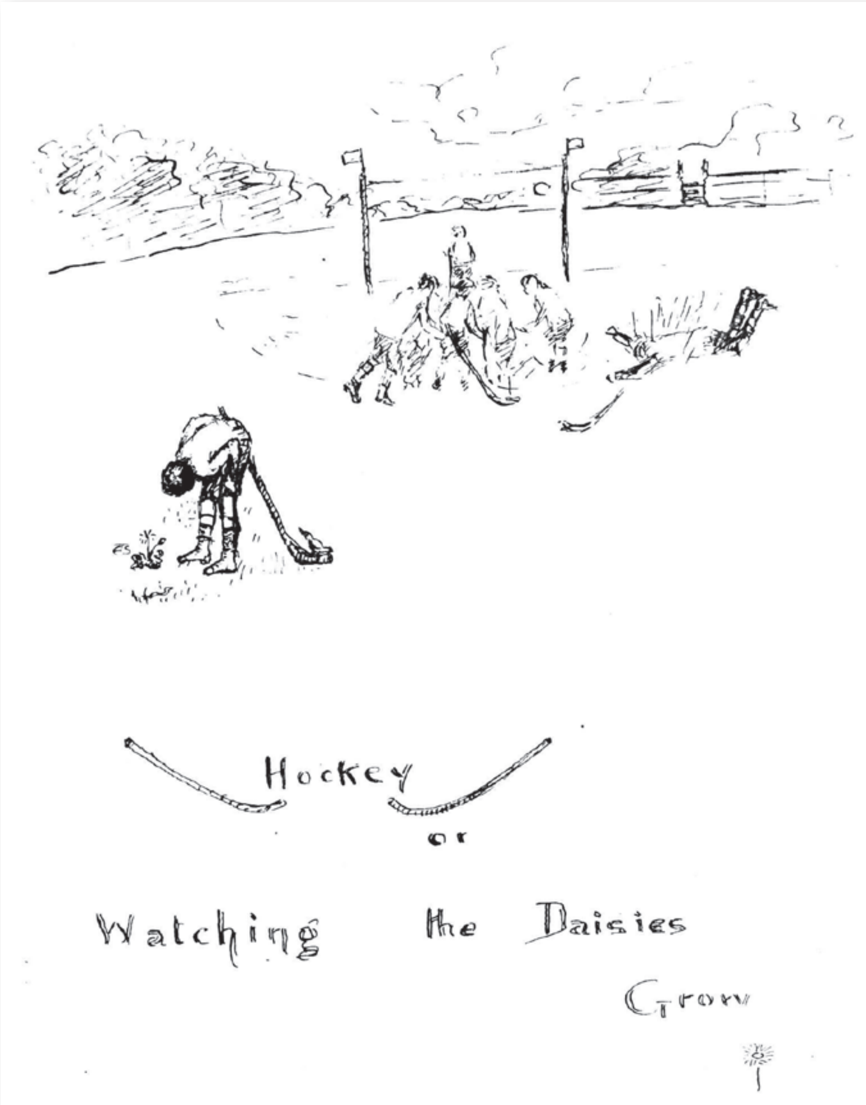


圖 3 涂林於薩塞克斯郡的小學，涂林母親 1923 年繪。（Sherborne School 提供）

重大的影響，有好幾門領域將功勞歸諸涂林研究的特定小品。2004 年，布崙（Lenore Blum）在〈實數的計算：當涂林遇見牛頓〉（Computing over the reals: Where Turing meets Newton）中，對「計算的兩個傳統」的二分法給出合宜的描述 [39]：

> 大致說來，計算的學說有兩個主要傳統，分別走在不相交的平行軌道上，一方是數值分析與科學計算，另一方是源自邏輯與電腦科學的計算論。

涂林 1948 年的〈矩陣運算的捨入誤差〉（Rounding-off errors in matrix processes）影響前者，而 1936 年的涂林機論文則影響後者。現在，我們已經日益領會這些相異貢獻中思路的一貫性。一方面，我們擁有一個可以掌控的計算世界，但是卻也必須與逼近和誤差共存。當我們將資訊類型的結構，從離散型資料提升到連續型，我們失去確定的立足點，卻在更高的層次找到突現的掌控機制。在更早之前，涂林在布萊徹利園（Bletchley Park）已經發展貝氏解碼法（Bayesian code breaking method），這是另一種調和現實世界、從複雜世界擷取形式的方法。

來自現實世界的消息

涂林在曼徹斯特的人生最後幾年，個人心業消蝕，卻也播下日後思想復興的種子，將來他的聲望日隆，科學影響日增。今日，涂林的聲譽呈現出紛雜的認可，對他曾做或未做的事，有太多的網頁和期刊文章提供誤導的資訊。但是，讓公眾注視到哥德爾和涂林這些數學家，對基礎科學有好處。就科學本身的進展來說，涂林的研究以零散的方式造成

涂林晚期的偉大貢獻是從兩種制高點，查考現實世界裡的相變中的計算意涵。從小學開始，涂林就對自然形態的突現很感興趣。圖 3 是涂林母親的手繪，題字顯示涂林「正在觀察雛菊的生長」。在

2013 年出版的《涂林：成就與影響》中，韶恩德斯（Peter Saunders）以短文討論涂林對形態發生學產生興趣的動機和背景書目 [7]：

對於［涂林的］〈形態發生的化學基礎〉（The Chemical Basis of Morphogenesis）[35]，最明顯的疑問是涂林為什麼要處理這個問題。生物學家或許會對模式的形成感興趣，但這並不像典型涂林會費神耗時研究的基礎問題。答案是涂林並不只是把它當作難題，而是一種他對他認為的生物學關鍵議題表達的方式。就像涂林對學生甘迪（Robin Gandy）所說的，他的目標是『擊敗設計論證』。

看起來，涂林希望為達爾文的學說增添一些計算的內涵，不讓上帝有任何介入處理的機會。在同一部合集中，麥尼（Philip Maini）描述了涂林如何從簡單的演算法素材發展出複雜結果。他說：

涂林的〈形態發生的化學基礎〉對一些領域影響深遠。在這篇論文裡，涂林提出生物的模式形成源自於對化學先期形式的回應，而這項化學機制又起自如今稱為**擴散不穩定性**（diffusion-driven instability）的過程（圖 4）。這項研究的天才之處在於，涂林先考慮沒有擴散因素的穩定系統，然後說明加入擴散因素後，即使在自然的穩定過程，實際上還是出現不穩性。因此在理解胚胎發育時，各部分的整合方式和各個部分一樣緊要，因為在各個部分的互動下才出現模式的突現或自組織（self-organized）的結果。想知道涂林領先時代有多遠，我們得提醒，只有到了系統生物學的後基因組時代的現在，大部分的科學社群才達到涂林 60 年前所做出的結論。

自 1952 年起理論持續發展，涂林的基本想法在這個領域持續有重要影響，但邏輯學家和電腦科學家這組人卻恍若未聞。

重要的是，涂林的範例指出突現現象背後的一般法則。涂林的青少年時期正當「英國突現學者」如布洛德（Charlie D. Broad）、亞歷山大（Samuel Alexander）、摩根（Conwy L. Morgan）名聲正旺的時候。布洛德和涂林在劍橋大學的時期重疊，他們似乎早有所知似的，經常在連結雜多的環境中，尋找以簡單規則得出複雜現象的例子。不幸的是，他們有些得自化學的突現範例可以用量子力學來解釋。不過涂林的微分方程式則提供嶄新的觀點，同時解釋突現的特徵與起源，並且指出如何以數學掌握突現的形態。

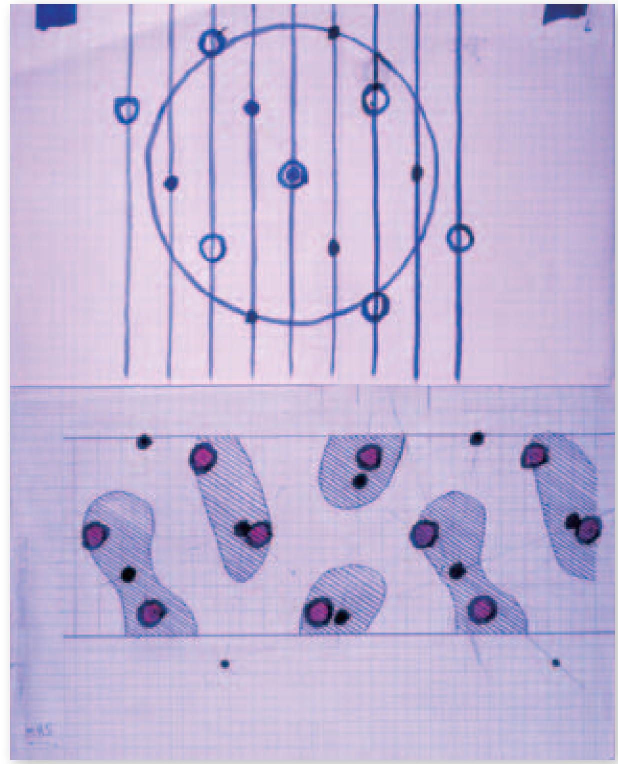


圖 4 顯示斑點模式與計算的有色圖案，這是涂林為形態發生學的研究所繪。（P.N. Furbank 提供）

涂林的方程也許有可計算的解，但是它指出的是如動物皮毛上的突現模式的原理，對應的是基本數學結構上可定義的關係。如果能定義出自然界的關係，它將具備某種穩固性，某種或許期望能觀測到的實質存在，就像涂林帶我們期待被觀察的突現現象可以找到描述方式一樣。如果這些描述至少和終止問題一般複雜，也許就會導致存在不可計算的集

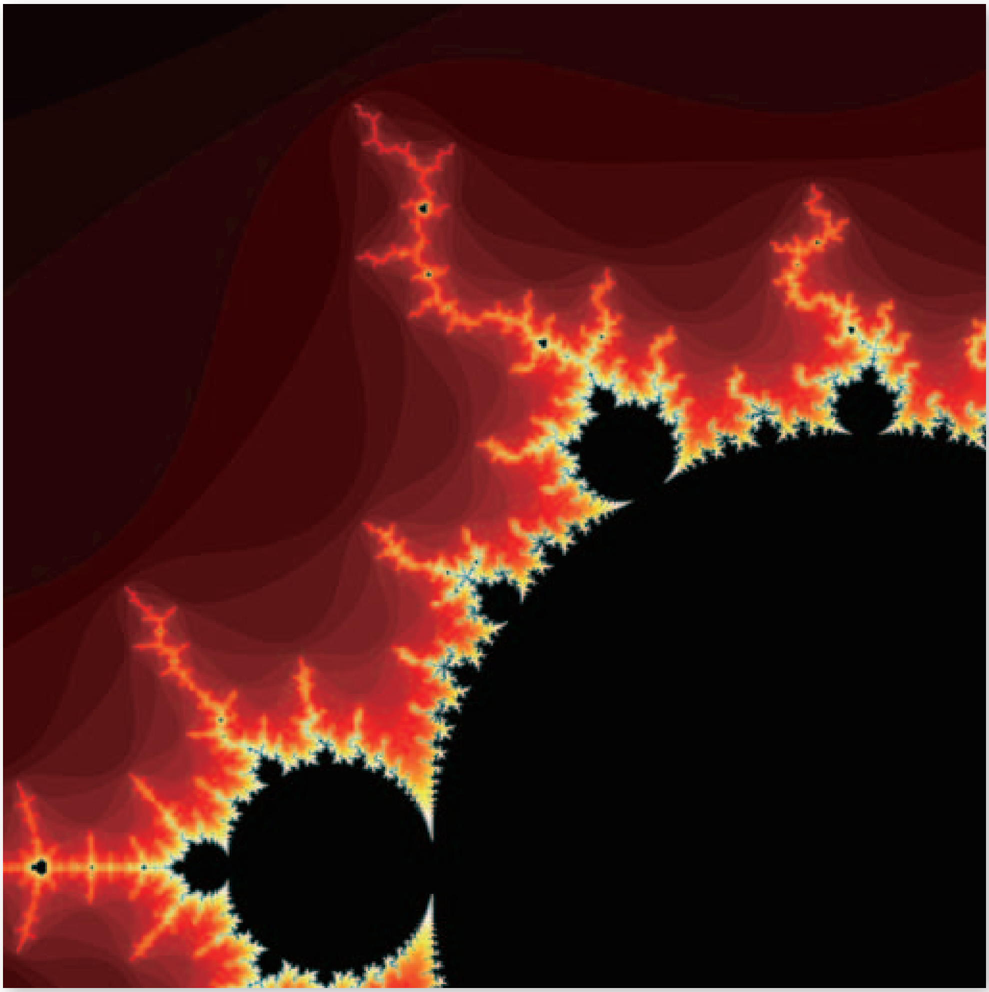


圖 5 曼德布洛特集（Niall Douglas 提供）

曼德布洛特集是用大家熟悉的簡單複數方程所定義的，而曼德布洛特集的補集（complement）的量詞形式，可以化約成類似通用涂林機的終止集合。利用這一點，就可以在電腦螢幕上做模擬，輕易的看到令人著迷的圖像。它具備終止問題缺乏的好處，也就是將自然現象予以視覺的實現。這也讓我們在這個無垠的驚人數學物件上不斷深入時，能見識到它更高度的複雜結構。在這個脈絡裡，何謂可計算性的概念更難確定，就可計算性的分析而言，曼德布洛特集的可計算性仍然是挑戰性十足的未解問題。

合。在通用涂林機結構井然的抽象與大自然神秘的突現之間的某處，存在碎形（fractal）的家族。雖然眾所周知碎形和突現現象頗相似，但它也具備良好定義的數學結構。基於多重原因，碎形中資訊最豐富的例子是曼德布洛特集（Mandelbrot set，圖 5）。就像潘洛斯（Roger Penrose）在他 1994 年出版的《皇帝新腦》（*The Emperor's New Mind*）中所說的 [26]：

> 我們現在目擊了……一個看起來十分複雜的集合，亦即曼德布洛特集。雖然定義它的規則很簡單，但這個集合本身呈現無窮變化的高度複雜結構。

比起涂林曾經參與的現實世界其他層次，突現在數學上來說似乎比較直接。我們對整體狀況具有客觀的看法，包含基本法則，以及突現的驚人特徵——驚訝正是判斷突現的標準之一，雖然還缺乏適當的定義。數學上，我們想要尋找基於基本運算的突現描述中是否具有量詞或非線性，因為這是真正的突現與類似終止問題的不可計算性之間的某種關聯特徵。至於在量子層次（這是涂林很感興趣，但因早逝而無法著手的領域），想要釐清基本的因果性並不容易。由上往下俯瞰，永遠無法確定是否掌握了整體的圖象。從量子曖昧性到熟悉的古典世

界過程中的相變，其中牽涉的似乎不只是可定義性的問題，而是從粒子物理層次變化到其他科學領域時，其中有種禁止同時定義個體的結構（模型論者熟悉的說法）消失了。有實驗證據顯示，這種可定義性的崩壞發生在人類心靈中。在這個脈絡裡，我們做為觀察者所遭逢的難題，並不是由上俯瞰而是內部的囚陷。儘管現代神經科學已經以大量的有用資訊，不斷提升人們對這項內在觀點的理解。

在涂林的最後幾年，他從兩個方向研究大腦的功能，一是為大腦的生理連結建立數學模型，二是他廣為人知的智慧思考論述。數學家尤其對後者感到特別的興趣，而且不只是因為與不可計算性有關。當涂林藉著對哥德爾定理界限的階序分析（hierarchical analysis）來思考「直覺與推演」時，數學家阿達瑪（Jacques Hadamard）也正從更社會學的角度來探討非常類似的課題。由於數學家的成果是以演算法般的證明來呈現，因此想要釐清「直覺 vs. 推演」的二分法，相關的數學家思考就是很好的個案研究。阿達瑪 1945 年出版的《數學領域的發明心理學》（*The Psychology of Invention in the Mathematical Field*）[16]，其中主要徵引的資料來源，是二十世紀早期龐卡赫（Henri Poincaré）在巴黎心理學會的系列演講。底下是阿達瑪報告的一個顯然非演算式思考的例子：

> 剛開始龐卡赫花了兩週無法解決［一個問題］，他想要證明某種函數不存在……［引自龐卡赫］：『到達庫唐斯（Coutances）後，我們準備搭公車到別的地方，就在我腳踩到車階時，靈感來了，這是從未出現在我之前的想法，卻似乎早就鋪好道路……我並沒有去驗證這個靈感……我繼續和別人已經開始的談話，但是我感受到完美的確定。當我回到康城（Caen），基於良心，我才悠閒的驗證這項結果。』

許多作者將焦點放在其中的驚奇以及與有意識的理性思考分離的狀況，令人也很驚訝的，還有龐卡赫經歷的「完美的確定」與涂林 1939 年論文之間的關聯。龐卡赫是當下在心裡即刻整理出所有的證明細節嗎？似乎不可能。我們從涂林的分析知道，這之中存在著定義的過程，同時也從中突現出一定程度的證明，龐卡赫回到康城則是從這些證明中摘取其一。

除了往前連結涂林 1939 年的論文，也可以往後連結他 1952 年的論文，也就是他定義自然形態突現的最後研究。自 1954 年起，神經科學就是研究人員將突現視為中心課題的領域之一。涂林在邏輯結構與物理脈絡的兩種可定義性所做的連結，已經非凡的預視到當今的思潮。

在神經過程的底層是基本的物理功能性，而涂林在 1948 年英國國家物理實驗室未發表的報告〈智慧機器〉（Intelligent Machinery）中 [36]，做出他自己對大腦聯結模型的突破貢獻。涂林稱之為「無組織機器」的模型，在稍早之前，已經由麥卡洛克（Warren McCulloch）和皮茨（Walter Pitts）先提出，也就是如今知名的神經網路模型，參見陶舍（Christof Teuscher）的《涂林的聯結論》（*Turing's Connectionism*）[30]。底下是陶舍在《涂林：成就與影響》中評論〈智慧機器〉時，對這段歷史的看法 [31]：

> 涂林在論文中並沒有提及麥卡洛克和皮茨 1943 年的工作，反之，他們也沒有提到涂林的［無組織機器］。到底他們彼此有多少相互的影響尚屬未知，不過我們得假設他們至少意識到對方的想法。我們猜想，大家之所以對涂林研究這麼無知，一方面是時機不巧，另一方面是因為涂林神經元比較簡單而抽象。

打從涂林的時代，連結模型已經走了很長一段路。這些以物理仿效大腦的模型的確帶來一些好處。例如史莫崙斯基（Paul Smolensky）在他 1988 年的論文〈聯結論的妥適處理〉（On the proper

圖 6 作曲家瓦格史塔夫（Julian Wagstaff）2007 年推出室內歌劇「涂林測試」。（Julian Wagstaff 提供）

treatment of connectionism）[28] 中就指出這可能挑戰「丘奇論題的較強詮釋，亦即宣稱所有具備良好定義的計算概念，都已經被涂林機給窮盡了。」

當然，涂林 1950 年發表在哲學期刊《心靈》（*Mind*）的論文〈計算機器與智慧〉（Computing machinery and intelligence）[34]，才是他三篇最常被人引用的文章之一。文中針對智慧的所謂涂林測試（Turing Test）甚至進入流行文化，變身一齣歌劇（圖 6），還有來回的學生身上 T 恤寫著的：「我沒有通過涂林測試。」

這一切和數學的不可計算性有何關係？涂林將焦點擺在計算的邏輯結構，這種想法深深影響現代的思考方向。但是，從他的布萊徹利園時期開始，涂林就多方面涉及體稟計算（embodied computation）的想法。從體稟的角度隱約透露出一種認識：人類（或更一般的智慧機器）與資訊的互動方式（好像嵌入在資訊之中）和普通的計算不一樣，涂林認為這種互動是智慧的必要屬性。想要讓人工智慧再往前進的研究，都必須認真考慮這種延伸的、體稟的、肉體的、注重與資訊互動的未來模型。底下的看法節錄自布魯克斯（Rodney Brooks）在《涂林：成就與影響》中的文章〈體稟智慧〉（The Case for Embodied Intelligence）[4]：

> 對我而言，涂林 1948 年的〈智慧機器〉遠比他 1950 年的〈計算機器與智慧〉重要……我認為〈智慧機器〉中關鍵又嶄新的洞識有二，首先涂林區分了體稟智慧和非體稟智慧……現代研究人員正嚴肅的研究智慧的體稟方向，並重新發現與他人的互動是智慧的重要基礎。我個人過去 25 年的研究都基於這兩個想法❶。

超越涂林障礙

涂林的研究並不完整，他的人生結束得太早，起因於令人不自在的結合：演算法（當時的英國法律）與不可計算性（怪異的歷史曲折），沒有人能想像這發生在一個對數學和科學（以及他的國家）如此盡責服務的人物身上。有人質疑用「可計算性理論」來描述，涂林和當時其他明星如哥德爾、波斯特、丘奇、克里尼所一起創建的研究主題，因為這個領域主要的研究集中在不可計算性。

涂林是當代的卓絕數學家，從現實世界之內研究數學，試圖賦予物理與心靈過程以數學的實質意義。他提出一個我們所知的計算的基本模型。他將計算視為有機的整體，並藉由將哥德爾不完備定理做可定義性的延伸，進而發現不可計算性。涂林鼓勵我們將大自然看成做計算的物事，並接觸它所展現的特性；檢視他的終止問題在生物學與神經科學中的體稟類比。他熱愛真理，接受人們對他的懷疑的質疑。涂林認為如果機器永不出錯就不能擁有智慧，認為融入溝通環境的電腦將有所不同，並且關

圖 7 1928 年，涂林 16 歲。（Sherborne School 提供）

心量子論的計算神秘性。

涂林來不及欣賞克里尼的高階型可計算性（higher-type computability）的研究，不然他一定會建立數學理論，探討其中的不可計算性、可定義性，以及從而發展的計算。他也來不及見到隨機性數學理論的蓬勃發展。當然涂林也不知道他扮演創建角色的領域，日後將以他為名頒授年度的大獎。涂林永遠看不到成千的工作人員，整天談論「涂林」機與「涂林」測試。儘管「不可計算的實在界」（incomputable reality，最近《自然》（*Nature*）如此措辭 [6]）還危險不可居，但我們在 2012 年，還有很多事情要慶祝。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

本文出處

Notices 59（2012）6, AMS。這是 *Notices* 在涂林百年誕辰的兩篇紀念文章之一。本文成於作者在英國牛頓數學科學研究院訪問期間。

譯者簡介

周樹靜為臺灣數學科普譯者。

延伸閱讀

▶ 2012 年是涂林百年誕辰，本文作者時任「涂林年」活動之顧問委員會主席。這是當年建立的《涂林年網站》，相關資料非常豐富。

http://www.mathcomp.leeds.ac.uk/turing2012/

▶ Hodges, Andrew，*Alan Turing: the Enigma*（1983）。涂林知名的傳記。作者並為涂林設立一個非常有特色的網站，補足傳記的不足。

http://www.turing.org.uk

▶ Copeland, B. Jack（ed.）, *The Essential Turing*（2004）, Oxford。這本「精簡」的涂林文集有 600 頁，但比起本文作者庫珀為 2012 涂林年所編的 *Alan Turing: His Work and Impact* 的 900 多頁還是短一點，而且其中還有一些後者沒有的資料，如涂林與同仁致邱吉爾的信。

❶ 譯註：第二點是「文化探索」（culture search），亦即人是在自己存身的人群文化中學習。