散射振幅

環圈與線的秘密

作者：狄克森 Lance Dixon 譯者：石恩

作者簡介：狄克森為理論粒子物理學家，現為史丹福大學線性加速器中心（SLAC）教授。與伯恩及寇索爾共同獲頒 2014 年櫻井理論粒子物理學獎。

本文撰寫於 2013 年 10 月櫻井理論粒子物理學獎公佈後不久，介紹作者與長期研究合作夥伴茲維．伯恩（Zvi Bern）和大衛．寇索爾（David Kosower）對於規範場論以及重力理論的散射振幅的研究。

簡單的說，我們研究原則上能以費曼圖進行的計算，但是改用某些通則取代費曼圖，藉以大幅提升計算的效率。從某個角度來看，由於這些通則存在已久，這種構想可能被當成「只是一種技巧」。但是反過來看，這些構想的結果卻足以提出規範場論與重力理論架構的新見解，對於大型強子對撞機（LHC）中的物理現象，也能得出他法無法提供的預測。

與費曼同時代的俄國大物理學家蘭道（Lev Landau）曾說過一句長久以來不斷激勵我的話：「方法比發現更重要，因為正確的方法會導致更重要的新發現。」

費曼圖的運用與限制

茲維、大衛與我長達二十年的合作一直圍繞在「散射振幅」的主題上。散射振幅是一個複數，取絕對值平方後，在量子力學中就是入射粒子散射成為射出粒子的機率。高能物理基本上就是在研究散射振幅，尤其是速度接近光速粒子的散射振幅。當兩個入射粒子在高能對撞機中相撞，它們的相對論性能量會產生許多新的射出粒子。在微擾理論中，散射振幅（原則上）可藉由畫出所有相應的費曼圖計算出來。微擾理論的第一階展開稱做樹狀階（tree level），因為對應的圖都沒有環圈（loops），看起來像樹枝。例如圖 1 代表一個夸克和一個膠子散射之後變成一個 W 玻色子（W boson，傳遞弱交互作用力的粒子）和一個夸克的樹狀圖。這個過程的樹狀圖有兩種，圖 1 是其中之一。

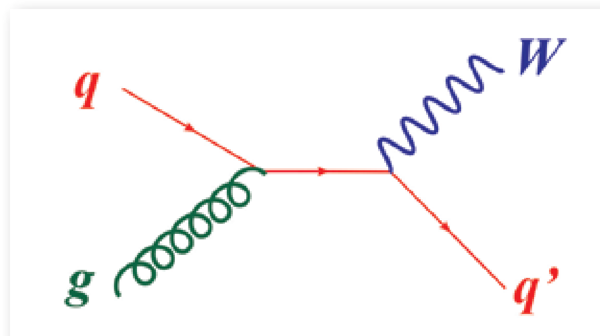

圖 1 $qg \rightarrow Wq$ 的樹狀費曼圖。

這個過程我們以 $qg \rightarrow Wq$ 表示。若要得到下一階近似（next leading order ，縮寫為 NLO），則需引入單環圈修正，亦即考慮所有含單環圈（one loop）的圖形。圖 2 是同一散射過程對應的 11 種

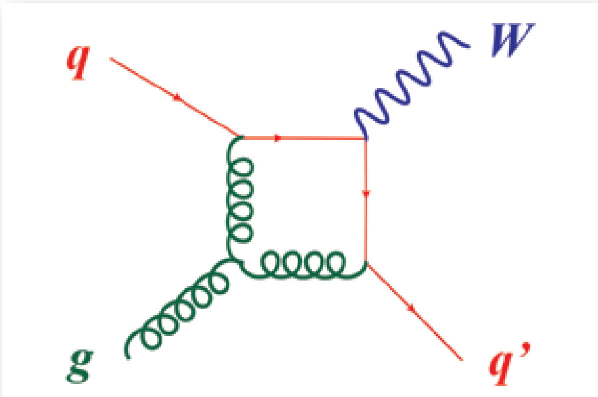

圖 2 $gg \to Wq$ 單環圈費曼圖的一例，這是 11 張圖的其中一張。

單環圈圖的一例。

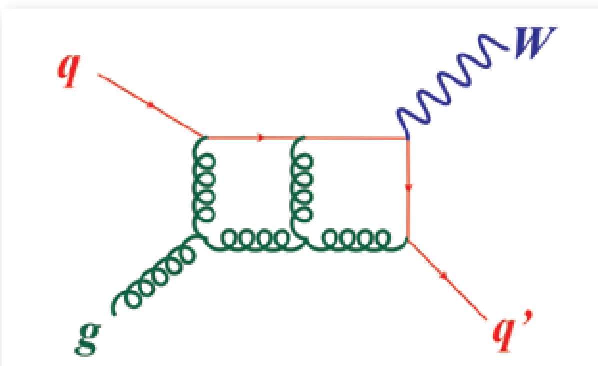

圖 3 $gg \to Wq$ 雙環圈費曼圖之一例，這個過程共有數百張雙環圈費曼圖。

接著再考慮雙環圈，如圖 3（這是數百種雙環圈圖的其中之一），以此類推。

粒子物理標準模型的作用力皆由名為**楊─米爾斯理論**（Yang-Mills theory）的規範場論所描述。將夸克和膠子結合留在質子裡的是「色」力，量子色動力學（QCD）就是描述這種作用力的理論。正負質子對撞機（Tevatron）和 LHC 之類的強子（hadron）對撞機中主要的物理皆屬於 QCD 的範疇。透過費曼 1940 年代的研究，每張費曼圖都對應到一個已知數學式的**費曼法則**現已廣為人知。雖然早在 1960 年代，大家就知道如何在 QCD 中運用費曼法則，然而計算 QCD 的散射振幅，對於理

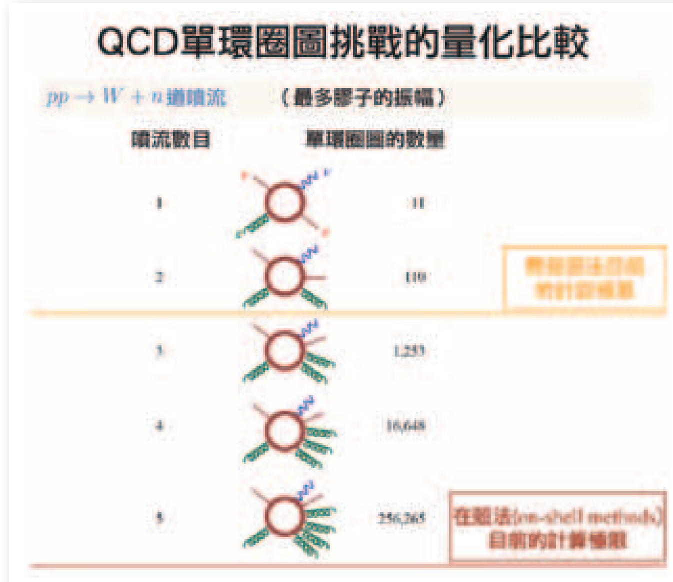

圖 4 夸克與膠子散射產生不同數目噴流時的單環圈費曼圖總數。

論學家一直是件艱鉅的任務。

回頭看 1990 年前後，最尖端的 QCD 散射振幅計算仍然停留在單環圈的程度，而且還只局限於「四外線」（兩個粒子進、兩個粒子出）的過程，例如 $gg \to gg$（兩個膠子進，兩個膠子出）。這個過程（或反應）會在正負質子對撞機或 LHC 中產生兩道高能強子噴流（jets），並且發生的機率很高，是我們對於微小尺度粒子行為最直接的探測方法。

1990 年代才算出來的單環圈過程還有 $gg \to Wq$（也就是前述的費曼圖）。這也是發生率很高的過程，是 LHC 背景事件的主角之一。不過這兩個過程只是巨大冰山的一角，實驗學家很容易就能觀測到六道噴流以上的 LHC 事件 [1~3]，每一道都是由高能夸克或膠子所產生。除此之外，實驗學家還得擔心各式各樣的複雜事件。

對於理論學家而言，一個很大的問題出在費曼圖的數量隨著環圈數與外線數而暴增。以線的數目來說，$gg \to Wq$ 只有 11 張對應的費曼圖，如果一天算一張，不到兩個禮拜就可以完成，沒有問

題。但如果考慮底下系列的過程：$qg \to Wqg$，$qg \to Wqgg$，$qg \to Wqggg$，$qg \to Wqgggg$，就得分別處理 110，1253，16,648，和 256,265 張費曼圖。這將耗上十年或更長的時間。（圖 4，實心環代表所有單環圈費曼圖的總合）

問題不止費曼圖的數目而已，許多帶有大量外接粒子（external particle）的圖，比 $qg \to Wq$ 的 11 張圖要雜亂多得多。加上這些雜亂圖通常數值也不穩定，當要計算精確數值時會造成麻煩。這項問題亟需新的解決方法。

為什麼要研究散射振幅呢？因為這些和其他許多過程的散射振幅，都是標準模型對於 LHC 實驗結果預測的一環。如果連「舊」標準模型物理都缺乏精確了解，理論學家要尋找可能的「新物理」將會更加困難。許多新物理模型都會產生多道噴流，因為較重的新粒子會迅速衰變成許多輕粒子，包括形成噴流的夸克和膠子。

新契機

再回頭看 1990 年，當時沒有人能想像如何計算 1000 張費曼圖的環圈振幅，更別說幾十萬張費曼圖了。茲維和大衛發現，藉由在超弦理論中取極限以去除不要的弦態，可以用比費曼圖更簡潔的方式重新整理微擾理論。幾年前才剛被艾里斯（Keith Ellis）與席克斯頓（James Sexton）用費曼圖法算出來的 $gg \to gg$ 單環圈振幅，茲維和大衛套用他們的方法得到相同的結果，並且還能將結果分解成幾個簡化的組成單元。 不過一個好方法要通過真正的考驗，就得去嘗試其他方法不曾做過的計算。於是茲維、大衛和我開始計算一個五外線的過程 $gg \to ggg$。

我們預期式子很有可能更複雜，因為答案取決於更多不同的能量和角度。四外線的過程只有兩個變數：總能量和散射角，但五外線的過程取決於五個變數。五個變數建構出來的解析函數比兩個變數複雜許多。即便如此，我們仍然算出 $gg \to ggg$ 的單環圈振幅，並且儘可能將結果簡化。

接著我們「盯著看」結果。這是非常重要的一步，你也可以盯著它看看：

$$
\begin{aligned}
V^f &= -\frac{5}{2\epsilon} - \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{-s_{34}}\right) + \ln\left(\frac{\mu^2}{-s_{51}}\right)\right] - 2, \qquad V^s = -\frac{1}{3}V^f + \frac{2}{9} \\
F^f &= -\frac{\langle 1\,3\rangle^2\langle 4\,1\rangle[2\,4]^2}{\langle 4\,5\rangle\langle 5\,1\rangle}\frac{L_{s_1}\left(\frac{-s_{23}}{-s_{51}},\frac{-s_{34}}{-s_{51}}\right)}{s_{51}^2} + \frac{\langle 1\,3\rangle^2\langle 5\,3\rangle[2\,5]^2}{\langle 3\,4\rangle\langle 4\,5\rangle}\frac{L_{s_1}\left(\frac{-s_{12}}{-s_{34}},\frac{-s_{51}}{-s_{34}}\right)}{s_{34}^2} \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{\langle 1\,3\rangle^3(\langle 1\,5\rangle[5\,2]\langle 2\,3\rangle - \langle 3\,4\rangle[4\,2]\langle 2\,1\rangle)}{\langle 1\,2\rangle\langle 2\,3\rangle\langle 3\,4\rangle\langle 4\,5\rangle\langle 5\,1\rangle}\frac{L_0\left(\frac{-s_{34}}{-s_{51}}\right)}{s_{51}} \\
F^s &= -\frac{\langle 1\,2\rangle\langle 2\,3\rangle\langle 3\,4\rangle\langle 4\,1\rangle^2[2\,4]^2}{\langle 4\,5\rangle\langle 5\,1\rangle\langle 2\,4\rangle^2}\frac{2L_{s_1}\left(\frac{-s_{23}}{-s_{51}},\frac{-s_{34}}{-s_{51}}\right) + L_1\left(\frac{-s_{23}}{-s_{51}}\right) + L_1\left(\frac{-s_{34}}{-s_{51}}\right)}{s_{51}^2} \\
&\quad + \frac{\langle 3\,2\rangle\langle 2\,1\rangle\langle 1\,5\rangle\langle 5\,3\rangle^2[2\,5]^2}{\langle 5\,4\rangle\langle 4\,3\rangle\langle 2\,5\rangle^2}\frac{2L_{s_1}\left(\frac{-s_{12}}{-s_{34}},\frac{-s_{51}}{-s_{34}}\right) + L_1\left(\frac{-s_{12}}{-s_{34}}\right) + L_1\left(\frac{-s_{51}}{-s_{34}}\right)}{s_{34}^2} \\
&\quad + \frac{2}{3}\frac{\langle 2\,3\rangle^2\langle 4\,1\rangle^3[2\,4]^3}{\langle 4\,5\rangle\langle 5\,1\rangle\langle 2\,4\rangle}\frac{L_2\left(\frac{-s_{23}}{-s_{51}}\right)}{s_{51}^3} - \frac{2}{3}\frac{\langle 2\,1\rangle^2\langle 5\,3\rangle^3[2\,5]^3}{\langle 5\,4\rangle\langle 4\,3\rangle\langle 2\,5\rangle}\frac{L_2\left(\frac{-s_{12}}{-s_{34}}\right)}{s_{34}^3} \\
&\quad + \frac{L_2\left(\frac{-s_{34}}{-s_{51}}\right)}{s_{51}^3}\left(\frac{1}{3}\frac{\langle 1\,3\rangle[2\,4][2\,5](\langle 1\,5\rangle[5\,2]\langle 2\,3\rangle - \langle 3\,4\rangle[4\,2]\langle 2\,1\rangle)}{\langle 4\,5\rangle}\right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3}\frac{\langle 1\,2\rangle^2\langle 3\,4\rangle^2\langle 4\,1\rangle[2\,4]^3}{\langle 4\,5\rangle\langle 5\,1\rangle\langle 2\,4\rangle} - \frac{2}{3}\frac{\langle 3\,2\rangle^2\langle 1\,5\rangle^2\langle 5\,3\rangle[2\,5]^3}{\langle 5\,4\rangle\langle 4\,3\rangle\langle 2\,5\rangle}\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\frac{\langle 1\,3\rangle^3(\langle 1\,5\rangle[5\,2]\langle 2\,3\rangle - \langle 3\,4\rangle[4\,2]\langle 2\,1\rangle)}{\langle 1\,2\rangle\langle 2\,3\rangle\langle 3\,4\rangle\langle 4\,5\rangle\langle 5\,1\rangle}\frac{L_0\left(\frac{-s_{34}}{-s_{51}}\right)}{s_{51}} + \frac{1}{3}\frac{[2\,4]^2[2\,5]^2}{[1\,2][2\,3][3\,4]\langle 4\,5\rangle[5\,1]} \\
&\quad - \frac{1}{3}\frac{\langle 1\,2\rangle\langle 4\,1\rangle^2[2\,4]^3}{\langle 4\,5\rangle\langle 5\,1\rangle\langle 2\,4\rangle[2\,3][3\,4]s_{51}} + \frac{1}{3}\frac{\langle 3\,2\rangle\langle 5\,3\rangle^2[2\,5]^3}{\langle 5\,4\rangle\langle 4\,3\rangle\langle 2\,5\rangle[2\,1][1\,5]s_{34}} + \frac{1}{6}\frac{\langle 1\,3\rangle^2[2\,4][2\,5]}{s_{34}\langle 4\,5\rangle s_{51}}.
\end{aligned}
$$

雖然你看起來可能覺得像天書，但 $gg \to ggg$ 解析式中的每一項都傳達了一些訊息。每一項分母中的每個因子都告訴我們，當其中兩個膠子指向同一方向時，振幅將如何「簡併」（變大）。每個 L 和 L_s 函數也蘊含一些資訊，稍後就會說明。幸運的

是，這個式子複雜得恰到好處，既不會過度簡單也不會複雜到嚇死人，所以只要盯著它看，各個「流動的部分」便會開始透露自己與其他振幅如何組合起來的規則。

在不使用費曼圖，或甚至不用前述茲維與大衛基於弦論的圖形法則下，我們和丹巴爾（Dave Dunbar）發現，其實可以運用一種更通用而簡單的法則重新計算出散射振幅，這個法則就是么正性（unitarity）。粗略來說，么正性指的是各種可能性的機率總和是 1。對於散射振幅，么正性意味著將一條稱為**么正切割**（unitary cut）的直線兩側的樹狀振幅接合起來，便能得到環圈振幅。跨過切割線的各種粒子線需要加總起來，如同加總各種機率一般，見圖 5。

圖 5 顯示這個方法多麼「環保」（在加州這裡很重要），因為我們將樹回收成環圈。高效率的再利用在本文後面會扮演重要的角色。

要算出單環圈振幅，只要將么正切割線兩側，由跨越切割線兩線連接起來的兩個簡單樹狀振幅相乘即可。首先，這個法則解釋為什麼某些 L 和 L_s 函數不出現。更棒的是，我們發現經過一些簡單的計算就可以得到所有帶有 L 和 L_s 函數的項。至於所需的簡單樹狀振幅，我們則是引用 1980 年代帕克（Stephen Parke）、泰勒（Tom Taylor）、吳大峻（T.T. Wu）、貝倫茲（Fritz Berends）、吉勒（Walter Giele）、昆斯特（Zoltan Kunszt）、曼加諾（Michelangelo Mangano）、史特靈（James Stirling）、徐湛（Zhan Xu）、張達華（Da-Hua Zhang）等人的研究成果。值得一提的是，帕克與泰勒發現一個重要的樹狀振幅無窮級數，在我們的研究中派上用場。

么正法的出現

事實上有一個部份，我們一開始並無法簡單計算出來，也就是不含任何 L 和 L_s 的「有理部分」。

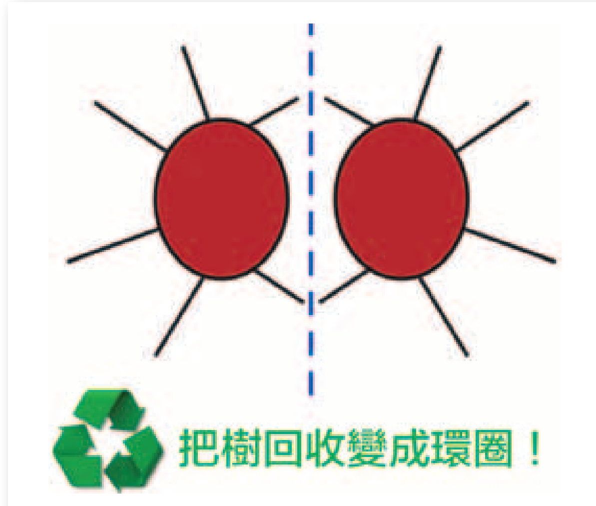

圖 5　根據么正性，么正切割兩側的樹狀振幅可以「回收再利用」，組合成環圈振幅。圖中虛線為么正切割。

因此就像訓練有素的理論物理學家，我們暫時改換到別的理論，迴避這個部分的影響。我們暫時放下 QCD 振幅，轉而研究最受高能理論學家喜愛的近親：$N = 4$ 超對稱楊—米爾斯理論（簡寫為 $N = 4$ SYM）。在這個規範場論裡，我們不僅能算出五外線過程，還能得到不限外接膠子數目的單環圈振幅（如果膠子的自旋方向排列得恰到好處的話）。這正是單環圈版的帕克—泰勒振幅，而且一樣只需要短短幾行就能算出所有結果。這就是「么正法」（unitary method）的開端。它融合了么正性的普遍法則以及微擾理論的特定架構（一種環圈積分的已知形式），得以決定「環圈被積函數」（loop integrand）。從簡單樹狀圖就能得到簡單環圈。

後來茲維、大衛和我終於明白如何使么正法變得更有效率，以及如何決定更多 QCD 過程中所缺的有理部分，比方說我們在 1997 年計算過的 $qg \to Wqg$ 過程。在這個例子中，我們已經盡可能簡化整個計算，然而仍有數十頁令人眼花撩亂、頭昏腦脹的式子。這時我們體認到，如果想更進一步，就必須發展出一套能夠自動化和電腦化的算則。我們亟需工業化，但身邊卻只有手工工具。於是我們決定暫時停止這個研究方向。

會「流動」的散射振幅

2003 年，韋頓在 1960 年代潘洛斯（Roger Penrose）以及 1988 年奈爾（Parameswaran Nair）所建立的基礎上，發明了扭量弦論（twistor string theory）。簡而言之，扭量弦論是一種不需要取任何極限，就能從弦論直接得到 QCD 的方法。於是，許多才華洋溢的年輕物理學家再度造訪原本已經荒蕪的「振幅」國度，包括布瑞托（Ruth Britto）、卡夏佐（Freddy Cachazo）、馮波（Bo Feng）、羅易班（Radu Roiban）、史普拉德林（Mark Spradlin）以及瓦洛維奇（Anastasia Volovich）等人。他們為環圈被積函數的解析結構帶來新的洞見，例如四重切割的重要性。其中前三位與韋頓發現了 BCFW 遞迴關係 [4,5]。這些關係雖然僅適用於樹狀振幅，但它們卻具體包含了振幅應該是可塑、可變形、可流動物理量的構想，直到分割成更小的單元之前都能不斷變形；至於如何精確分割成更小單元的知識，則可用於遞迴建構樹狀振幅。

就某方面來說，費曼圖像是沙粒。如果欲探討的過程只需幾張費曼圖就能計算，它們就是有用的建構單元，而且每個單元都具有物裡意義。但是一旦過程中有成千上萬的費曼圖，相變就出現了——單獨的圖不再具有意義，振幅變成連續流動的物理量，就像從掌心流過指縫的沙一樣。

這種「流體觀點」也受到弦論的啟發。在弦論中，每一階環圈展開的所有費曼圖都被單一曲面取而代之，你可以想像這個曲面能隨著粒子能量與角度變化而連續變形。

QCD 的 NLO 革命

茲維、大衛和我發現，導出 BCFW 遞迴關係的類似概念也能將單環圈問題的計算自動化，不僅可以系統性的劃出么正切割，還能找出欠缺的有理部分。一些優秀的博士後加入我們的工作，包括伯格（Carola Berger）、戴安納（Giovanni Diana）、柯戴羅（Fernando Cordero）、佛德（Darren Forde）、格萊斯堡（Tanju Gleisberg）、伊塔（Harald Ita）和梅特（Daniel Maitre），以及最近加入的賀許（Stefan Hoeche）。如果沒有這些人，我們可能無法將概念發展成適合自動化計算的形式，最終打造出用於計算 LHC 中 QCD 振幅的「黑帽」程式（BlackHat）。

如今不止我們在這個方向上努力，歐索拉（Giovanni Ossola）、帕帕多普洛斯（Costas Papadopoulos）以及皮陶（Roberto Pittau）[6,7] 也發展出類似的想法和演算法。此外還有艾里斯、吉勒、昆斯特、梅尼可夫（Kirill Melnikov）和詹德里基（Giulia Zanderighi）[8~10]，以及爾後的許多研究人員。這是 2007 到 2010 年間「NLO 革命」的開端。受到實驗學家「願望清單」的啟發以及休士頓（Joey Huston）的持續鼓吹，科學家們探討的範圍從 LHC 裡少數幾個 $2 \to 3$ 的 NLO 過程，擴展到各式各樣的 $2 \to 4$，甚至還涵蓋了幾個 $2 \to 5$ 與 $2 \to 6$ 過程。其中一些新方法不完全基於么正性，但大部分都極為相似。在他們打造出來的自動化程式中，快速計算散射振幅並產生可靠數據的關鍵，在於對於較簡單構成單元的回收利用能力。（某些理論的誤差是統計性的，只能透過在各種粒子能量和角度下，對同一個量進行多次計算來弭平）。快速的計算方法固然不可或缺，大量的計算機資源又何嘗不是！

$N = 4$ 超對稱楊—米爾斯散射振幅

在預測實驗結果之外，這些方法還有更多應用。茲維、大衛和我對高度超對稱理論方面的應用特別感興趣，包括 $N = 4$ 超對稱楊—米爾斯理論（最為超對稱的規範場論），以及 $N = 8$ 超重力（最為超對稱的重力理論）。超對稱使我們更容易找出散射振幅中蘊藏的規則模式，並且探討比現行

QCD 高出許多階的環圈計算。到這裡讀者想必已經有點累了，所以我簡要說明一下就好。

雖然 $N=4$ SYM 理論很特別，但當色荷的數目極大時會變得更特別，因為在這個極限下，連結強耦合場論與重力的「AdS/CFT 對偶」最能清晰呈現。阿納斯塔修（Babis Anastasiou）、茲維、大衛與我在 2003 年，用么正性檢視 $N=4$ SYM 理論中的雙環圈振幅，發現它具有特殊的迭代性質。2005 年，茲維、史密諾夫（Volodya Smirnov）與我靠著么正法和史密諾夫的環圈積分絕技，將計算推廣到三環圈。我們根據三環圈所展現的型態，做了一個更大膽的猜想：振幅會遵循完美的指數模式。我們的猜想有點過於大膽，其實只有四外線和五外線的振幅遵守這個規則。我們後來得知，這些振幅之所以會遵循我們的猜想，是因為具有隱性的「對偶保角對稱」（dual conformal symmetry）的緣故。這個對稱性的發現，最早可回溯至於 1990 年代布羅赫茲（David Broadhurst）以及李帕多夫（Lev Lipatov）的研究。2006 年時卓蒙德（James Drummond）、漢恩（Johannes Henn）、索卡契夫（Emery Sokatchev）和史密諾夫在 $N=4$ 環圈被積函數中也發現這種對稱性的存在。

茲維和我說服 AdS/CFT 對偶的發明者之一馬爾達西納（Juan Maldacena），用 AdS/CFT 對偶來計算強耦合極限下的 $N=4$ 散射振幅，以便驗證我們的猜想。他與阿爾代（Fernando Alday）首度算出四膠子振幅，結果發現跟我們的猜想完全吻合。其中振幅發散部分（也就是所謂的「尖點異常因次」cusp anomalous dimension），他們引用了拜瑟特（Niklas Beisert）、伊登（Burkhardt Eden）與史道達哈（Matthias Staudacher）（合稱 BES）的精確解。阿爾代與馬爾達西納闡釋了對偶保角對稱出現的原因，也提供不少有助於理解弱耦合（微擾）理論的線索。

我們如今有望精確解出這個理論所有的散射振幅。這種期待一部分是寄望於阿爾卡尼哈米德（Nima Arkani-Hamed）及合作者對於多環圈被積函數的新表述，例如所謂的**振幅多面體**（amplituhedron）（這裡先不解釋！）。另一部分（對我來說），則是寄望於巴索（Benjamin Basso）、西弗（Amit Sever）與維艾拉（Pedro Vieira）最近的研究成果，將 $N=4$ 振幅的一些特定極限（透過多邊形威爾遜環圈，不過這是另一個故事了）連結到某種二維理論的精確散射矩陣。他們的方法和處理發散部分的 BES 架構緊密相關，並且運用了一些大膽的猜想。然而在與卓蒙德、杜爾（Claude Duhr）、馮希伯（Matt von Hippel）以及潘寧頓（Jeff Pennington）的合作研究中，我們透過三環圈與四環圈檢驗他們的預測，到目前為止每個預測都完美過關。

$N=8$ 超重力的新發展

最後，讓我提一下 $N=8$ 超重力。這理論是在 1970 年代晚期由克雷莫（Eugene Cremmer）與朱利亞維斯（Bernard Juliawith）發明的，此外德維特（Bernard deWit）、尼可萊（Hermann Nicolai）、謝爾克（Joel Scherk）等人也做出重要貢獻。1984 年發生超弦理論革命後，$N=8$ 超重力很快就被判死刑。因為弦論完全沒有紫外發散，哪有其他的點粒子理論敢打這種包票？然而它卻從來沒被好好安葬過。

當時普遍認為 $N=8$ 超重力展開到三環圈就會發散，但是卻沒有人能做單環圈之外的完整計算。透過么正法，我們在 1998 年算出雙環圈（與茲維、丹巴爾、裴洛斯坦（Maxim Perelstein）和羅佐斯基（Joel Rozowsky）合作），2007 年算出三環圈（與茲維、大衛、卡拉斯柯（John Joseph Carrasco）、約翰生（Henrik Johansson）和羅易班合作），並在 2009 達到四環圈。我們至今仍未發現 $N=8$ 超重力的發散現象，儘管一般看法已

經從「三環圈就發散」退守到「七或八環圈時才發散」。茲維、約瑟夫（John Joseph）、約翰生和羅易班正在向五環圈推進中，五環圈的結果會提供關於七環圈的重要資訊。假使真的到了七環圈才發散，那也將是人類已知最「小」的無限大。

在這個過程中，茲維、約瑟夫和約翰生受惠於歷史悠久的老方法，「盯著看」么正性所產生的環圈被積函數，無意間發現規範場論振幅的新性質，與重力緊密相關。他們發現規範場論振幅可以寫成一種新形式，運動學（kinematic）部分遵守一種類似李代數中雅可比恆等式的關係。這叫做「色—動力學對偶」。當這種對偶性滿足時，某些重力理論的振幅就可以透過簡易的「對開法」（double copy）來計算：將規範場論振幅的色因子拿掉，再將運動項分子因子平方，就可得到重力振幅。大致上說來，一個重力子可以看成兩個膠子疊合在一起。如果你曾經算過重力的費曼法則，將會為這麼簡單的方法竟然可行而大吃一驚，但是事實就是如此。雖然原則上不需透過么正性衍生的方法，就能發現這些關係式，然而么正法的威力在於能夠導出簡單的表式，引導大家找出基本的法則，並且能在其他例子中輕易驗證，建立信心。

結語

如今「振幅」的研究蔚為風潮，許多人致力於理解散射振幅的解析行為與令人驚艷的結構，並將成果轉化成新的方法。我們有年度「振幅」會議，還有許多相關的工作坊。蘭道的格言在這個領域中反覆出現，而且能夠遞迴運用——新方法導致新發現，再導致更新的方法，再導致更新的發現，無窮無盡。散射振幅有著不可思議的豐富性和美感，雖然每位研究人員的感受不盡相同，但都受到吸引一起來探索這個領域。

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

本文出處

本文出自物理學家卡洛爾（Sean Carroll）網誌的邀稿文章，Guest Post: Lance Dixon on Calculating Amplitudes。

http://www.preposterousuniverse.com/blog/2013/10/03/guest-post-lance-dixon-on-calculating-amplitudes/

譯者簡介

石恩為臺大物理研究所碩士班學生，研究主題為楊—米爾斯理論及重力理論中的散射幅度。指導教授為黃宇廷教授。

延伸閱讀

▶伯恩、狄克森、寇索爾〈超越費曼圖〉，《科學人》124 期，2012 年 6 月號。

http://sa.ylib.com/MagCont.aspx?PageIdx=1&Unit=featurearticles&Cate=&id=1986&year=

▶伯恩、狄克森、寇索爾因本篇文章所介紹的研究獲頒 2014 年櫻井理論粒子物理學獎，獲獎理由為「在微擾性散射振幅的計算方面具有開創性貢獻，為量子場論帶來更深刻的了解，並且創造出計算 QCD 過程的高效率新工具」。底下為美國物理學會的頒獎網頁：

http://www.aps.org/programs/honors/prizes/prizerecipient.cfm?last_nm=Dixon&first_nm=Lance&year=2014

▶ Wolchover, Natalie, A Jewel at the Heart of Quantum Physics, *Quanta* 科普雜誌網站 9/17/2013，介紹文中提到的「振幅多面體」

https://www.quantamagazine.org/20130917-a-jewel-at-the-heart-of-quantum-physics/