

擇善固執 的曲面探險家

伊朗女數學家莫札卡尼

作者：寇拉萊克 Erica Klarreich 譯者：林奕君

作者簡介：寇拉萊克是美國紐約石溪大學數學博士，加州大學聖塔克魯茲分校科學傳播學程研究生。她從事數學與科學寫作十餘年，文章收入《2010 年最佳數學寫作選集》與《2011 年最佳數學寫作選集》。

瑪

揚·莫札卡尼 (Maryam Mirzakhani) 的里程碑研究，深刻的連結拓樸、幾何和動力系統。

在八歲的年紀，莫札卡尼經常為自己編織一個優秀女孩如何冒險犯難的故事，每晚的睡前時光，她的女主角也許變成市長、環遊世界，或是完成其他偉大的使命。

現在，37 歲的莫札卡尼是史丹福大學的數學教授，依舊在腦海中書寫著精巧複雜的故事。她的雄心壯志未曾改變，只是主要的角色不一樣了，變成雙曲面、模空間、動力系統。莫札卡尼認為從某方面來看，研究數學就像寫小說，「當中有很多角色，而且你會越來越了解他們，隨著劇情演變，當你回頭審視某個角色，他們早已和第一印象截然不同。」

這位來自伊朗的數學家恣意跟隨她的角色前行，

即使故事情節經常要好幾年才有進展。身材嬌小又不服輸的她，在數學界以擁有頑強毅力解決難題而聞名。她的博士指導教授哈佛大學的麥克穆蘭 (Curtis McMullen) 說：「只要是數學，莫札卡尼就擁有無懼的野心。」

擁有一雙沈著的灰藍色眼睛以及低沉的嗓音，莫札卡尼散發著堅毅的自信，同時卻又不失謙遜。當被要求描述自己在特定研究中的貢獻時，她笑了笑，遲疑了一下才回答：「說實話，我不認為自己有多大的貢獻。」當她在二月收到電郵，通知她獲得數學界最高榮譽的費爾茲獎 (2014 年在南韓舉行的世界數學家大會中頒獎)，莫札卡尼還認為寄信人的帳號被盜用了。

但是，其他數學家對莫札卡尼的研究讚譽有嘉。曾和莫札卡尼合作的芝加哥大學數學家艾司金 (Alex Eskin)，認為她的博士論文「極為傑出」，



Quanta 是西蒙斯基金會 (Simons Foundation) 為提高數學、物理與生命科學前沿研究進展的能見度，所出版但編輯獨立之網路科普雜誌 (<http://www.quantamagazine.org/>)。本文出自該雜誌 2014 年費爾茲獎與涅瓦里納獎之五篇系列報導之一：
<http://www.quantamagazine.org/20140812-a-tenacious-explorer-of-abstract-surfaces/>

本文史丹福大學部分由 Quanta 主編 Thomas Lin 採訪供稿。本刊感謝 Quanta 同意翻譯轉載，翻譯文責由本刊自負。

Why? Done! If you are



Different flowers!



莫札卡尼說她是用圖象來思考數學，經常在大紙上塗鴉她的想法。(Thomas Lin 攝, Quanta 提供)

這項研究探討如何在「雙曲」面上計數迴圈（loop）的數目^①。他說：「那是你一看就知道會被收錄在教科書上的數學成果。」

最近莫札卡尼的另一項重大突破是與艾司金合作的研究，探討抽象曲面上與撞球台有關的動力系統。也任職於芝加哥大學的數學家法布（Benson Farb）認為，在莫札卡尼身處的激烈競爭領域中，「這或許是十年僅見的重要定理。」

來自德黑蘭的女孩

自幼在德黑蘭長大，莫札卡尼小時候並沒有成為數學家的念頭。她主要的目標只是讀遍所有她找得到的書籍。她也會看介紹著名女性生平的電視節目，像是居禮夫人和海倫凱勒。後來她還曾讀過《梵谷傳》（*Lust for Life*），這是一本關於梵谷的小說。這些故事在她心中植入隱約的抱負，希望能在生命中做出一番偉大的事業，也許是成為一位作家。

莫札卡尼在兩伊戰爭快結束時從小學畢業，當時有心向學的學生多了許多學習的機會。她參

加考試進入德黑蘭的法桑尼根（Farzanegan）女中，這是由伊朗國家資優人才發展組織（National Organization for Development of Exceptional Talents）治理的菁英中學。莫札卡尼說：「我覺得自己算是幸運的一代，因為在我青少年時，社會狀況已經趨於穩定。」

在新學校的第一週，莫札卡尼認識了一輩子的好友貝荷西提（Roya Beheshti），她現在是聖路易華盛頓大學（Washington University in St. Louis）的數學教授。當時還是孩子的她們，總是喜歡在學校附近商圈成排的書店中探險。由於書店禁止閱讀，她們就隨機挑書購買，莫札卡尼說：「雖然現在聽起來很怪異，不過當時的書非常便宜，所以我們就直接買了」。

令莫札卡尼沮喪的是那年她的數學課表現很差，數學老師不認為她特別有天分，讓她逐漸喪失信心。莫札卡尼認為在那種年紀，「別人怎麼看你很重要，所以我失去了對數學的興趣。」

隔年，莫札卡尼遇到了比較會鼓勵人的老師，於是她的表現開始突飛猛進。貝荷西提說：「從第二年開始，她就是一顆明星」。

莫札卡尼繼續就讀法桑尼根女中的高中部，在那裡她和貝荷西提拿到了當年選拔參加國際資訊奧林匹亞競賽的國家比賽試題，國際資訊奧賽是一個每年舉辦的高中生程式競賽，選拔比賽將決定哪些高中生可以參賽。莫札卡尼和貝荷西提奮鬥了好幾天，嘗試解決六題中的三題。雖然正式參賽者的時限是三個小時，莫札卡尼還是很興奮她們能夠解決其中任何一題。

莫札卡尼和貝荷西提渴望發



莫札卡尼成長於伊朗，比起數學，她剛開始更熱衷於閱讀和寫小說。（Mirzakhani 和 Quanta 提供）

掘自己在類似競賽中的潛力，於是兩人要求校長仿照與該校並比的男子中學，安排開設數學解題班。莫札卡尼回憶說：「我們校長的個性很有魄力，如果我們真的非常渴望某樣事務，她就會讓它成真。」這位校長並不受伊朗國際數學奧賽隊伍從未有女子參加的前例所影響，莫札卡尼說：「她的思想非常正面而樂觀，『即便妳是第一個，妳也辦得到。』我覺得這對我的一生有重大的影響。」

1994年，17歲的莫札卡尼和貝荷西提成功進入伊朗數學奧賽國家代表隊，莫札卡尼的成績讓她贏得金牌。隔年，她再度參賽並獲得滿分。參加競賽讓莫札卡尼發現自己的潛能，產生了對數學更深摯的熱愛。她說：「你必須花上一番精力，才能看見數學之美。」

法國巴黎第七大學的佐立克（Anton Zorich）認為，即使到了今天，莫札卡尼依舊保有「對於身旁發生的所有數學興奮不已的17歲女孩形象。」

哈佛的博士生涯

根據麥克穆蘭的觀察，數學奧林匹亞的金牌並不一定能轉換成數學研究的成功。他說：「在競賽中，有人事先設計題目，讓它有絕妙的解答，但在數學研究裡，問題也許根本就沒有答案。」但他說莫札卡尼有別於許多奧林匹亞拿高分的選手，「她能夠創造自己的觀點。」

莫札卡尼在1999年取得德黑蘭沙里夫科技大學（Sharif University of Technology）的數學學士學位後，進入哈佛大學就讀研究所，並開始參加麥克穆蘭的專題討論班。起初莫札卡尼並不了解他所說的大部分內容，但卻對於雙曲幾何這個主題深感著迷。她開始到麥克穆蘭的研究室，連珠般的發問決疑，並用波斯文快速記下筆記。

麥克穆蘭是1998年費爾茲獎的得主，他回想說：「莫札卡尼具有大膽的想像力，她會對問題應該如何處理的過程，先在腦中形成一幅想像的圖象，然

後到研究室描述給我聽，最後轉身問我『這樣對嗎？』我總是很得意她以為我知道答案。」

莫札卡尼開始對雙曲面著迷。雙曲面是狀似甜甜圈、擁有兩個洞以上的曲面，它和標準的幾何不同，粗略的說，這類曲面上每一點的附近都類似鞍面。雙曲甜甜圈無法在日常空間中構造，而是以抽象的方式存在，曲面上的距離和角度是以一組特殊的方程來測量。如果受制於這組方程的曲面上有一種虛擬生物存活，它們會感受到曲面上的每一點都是鞍點。

事實是每一個多洞甜甜圈上都有無窮多種雙曲結構，就好像有胖、也有瘦的甜甜圈，或是兩者的任意結合一樣。自從發現雙曲面一個半世紀以來，這些曲面已經成為幾何學的中心主題之一，並連結到許多數學分支，甚至物理學。

但是在莫札卡尼開始讀研究所時，有一些關於這類曲面最簡單的問題都還沒有答案。其中一些是關於雙曲面上的「直線」或稱為測地線（geodesic）的問題。就算是彎曲的曲面上也存在直線段的概念，也就是兩點間的最短路徑。在雙曲面上，有些測地線可以無限延長，就像普通平面上的直線一樣；但其他測地線則會形成封閉的迴圈，就像普通球面上的大圓一樣。

在雙曲面上，如果計數給定曲線長的封閉測地線數目，其數量會隨著測地線長度增加，呈現指數成長。這類測地線在最後平滑接合之前，大多都會自交許多次，但其中有一小部分的簡單測地線（simple geodesic）從未自交。法布說簡單測地線是「解開整個曲面幾何結構的關鍵概念。」

但數學家卻無法釐清，在給定長度時，一個雙曲面到底有幾條簡單測地線。在所有封閉測地線中，法布認為簡單測地線是「發生機率為零的奇蹟」。

① 本文的雙曲面（hyperbolic surface）蓋指曲率為-1的實曲面，不是一般微積分中的雙曲面。

因此，要精確計數簡單測地線的數目非常困難，他說：「只要有一絲差錯，答案就不對了。」

莫札卡尼在 2004 年完成的博士論文回答了這個問題，她發展了一個公式，能夠說明長度為 L 的簡單測地線數目，如何隨著 L 變大而增加。同時，她還連結了其他兩個重要的研究問題，並雙雙解決。其中之一是計算所謂模空間 (moduli space) 的體積公式，模空間是一個給定曲面之所有可能雙曲結構的集合。另一個是為一個舊猜想提出令人驚奇的新證明，她證明的是高等研究院物理學家韋頓提出的猜想，其中涉及與弦論有關的模空間上的某種拓樸量度。韋頓猜想非常困難，第一位證明它的是法國科學高等研究院 (IHÉS) 數學家孔策維奇 (Maxim Kontsevich)，他在 1998 年因此獲頒費爾茲獎。

法布認為解決這兩個問題任何之一「已經是重大成就，將兩個問題關聯起來也是重大成就。」而莫札卡尼兩者都辦到了。

莫札卡尼的博士論文產生三篇期刊論文，分別發表在三本頂尖的數學期刊上：《數學年刊》(Annals of Math)、《數學發明》(Inventiones Mathematicae)、《美國數學學會期刊》(Journal of the American Mathematical Society)，大部份的數學家永遠也達不到這樣的成就，法布說：「而她的博士論文就做到了。」

巨神級的成就

莫札卡尼認為自己是「慢」的人。和靈光一閃就能解決問題的數學家不同，莫札卡尼天生受深刻的問題吸引，可以反覆咀嚼多年。她說：「經年累月之下，你會看到問題極為不同的面向。」有些問題她已經思考了十年以上，「但它們還在那兒，我能做的仍然不多。」

能快速將問題一一擊倒的數學家對莫札卡尼並不構成威脅。她說：「我不容易失望，在某種意義上，

我相當有自信。」

莫札卡尼緩慢而穩重的態度，同樣可見於她生活中的其他領域。在哈佛讀研究所的某一天，莫札卡尼與她未來的丈夫馮德拉克 (Jan Vondrak) 一同慢跑，他因而體認到她的這項特質。馮德拉克回憶說：「她非常嬌小，而我體態良好，所以我自認會表現很好。一開始我的確跑在前頭，但她從不減慢速度，半小時之後我跑完了，而她卻依然以一樣的速度跑著。」馮德拉克當時是麻省理工學院的研究生，現在則是 IBM 聖荷西阿馬登研究中心 (Almaden Research Center) 的理論電腦科學家。

莫札卡尼思考數學時，喜歡持續塗鴉，描畫曲面或其他與研究相關的圖形。馮德拉克說：「她在地板上鋪上很大的紙張，花好幾個小時，不斷重複畫著對我而言都長得一樣的圖形。」他還說家中的研究室裡，書本和紙張凌亂的到處散落，「我不知道她這樣要如何工作，但她最後都完成了。」他猜想也許「她所面對的問題太抽象、太複雜了，所以她不能夠一步步的寫出邏輯步驟，必須大步的跳躍。」

莫札卡尼說信手塗鴉能使她專心，在思考困難的數學問題時，「你不想寫下所有細節，但畫圖的過程使你在某種程度上保持連結。」莫札卡尼說她的三歲女兒安娜西塔 (Anahita)，在這位數學家母親塗鴉時常常大喊：「媽媽又在畫畫了！」莫札卡尼說：「也許她以為我是畫家。」

莫札卡尼的研究連結很多不同的數學領域，包括微分幾何、複分析、動力系統。她說：「我喜歡跨越不同領域之間想像的界線，感覺很新奇。」在她的研究領域裡，「有很多工具可用，但你不知道哪一個會成功。總之要保持樂觀，並嘗試建立它們之間的連結。」

麥克穆蘭認為，有時候莫札卡尼所構造的連結非常具有衝擊力。例如在 2006 年，她解決了雙曲面幾何結構如何依照類似平移斷層地震機制變化的問



到伊斯法罕的旅行，莫札卡尼與父母合影。（Mirzakhani 和 Quanta 提供）

題。麥克穆蘭說：「在她之前，這個問題完全無從下手。」但莫札卡尼只用了一行證明，「就構造了一座橋梁，為這個極為晦澀的理論和另一個完全清晰的理論之間建立連結。」

2006 年，莫札卡尼開始她和艾司金成果豐碩的合作。艾司金認為莫札卡尼是他最喜歡的合作夥伴之一。他說：「她非常樂觀，那很有感染力。當你和她共事，你會覺得自己有更大的機會，能夠解決

那些初看似乎沒有任何希望的問題。」

在數度合作之後，莫札卡尼和艾司金決定著手對付該領域最大的未解問題之一。這個問題探討撞球在撞球台上到處移動反彈的行為，其中撞球台的形狀為內角是有理數的多邊形。由於撞球台是根據給定規則隨時間演變的系統，因此提供了動力系統最簡單的例子之一，但是撞球的行為已知是出乎意料的難以清楚解析。

萊特（Alex Wright）是一位史丹福的博士後研究員，他說：「有理數撞球台問題開始於一個世紀之前，當初一群物理學家聚在一起說，『我們來理解撞球在三角形中反彈的情況。』他們以為這個題目一週就能解決，沒想到一百年後，我們還在思考這個問題。」

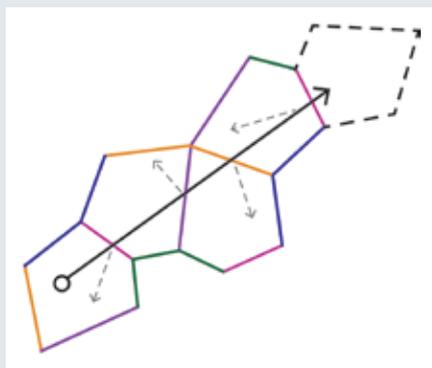
為了研究長度很長的撞球軌跡，一個有用的想法是想像將撞球台逐漸變形，向著軌跡的方向擠壓，這樣可以在給定時間內觀察到更多的撞球路徑。

這樣的變形把原來的撞球台逐漸變成一系列新球台，並在數學上所謂的模空間中形成一條路徑，其中這個模空間是在給定邊數下，所有可能的撞球台所構成的空間。如果將每個撞球台轉換成稱為「轉譯曲面」（translation surface）的抽象曲面，數學家能夠運用包含所有轉譯曲面的模空間來分析撞球台的動力學（billiard dynamics）。研究人員已經證明，理解特定轉譯曲面因為擠壓而在模空間中產

撞球的軌跡

若在撞球台邊放置鏡子，一顆在台邊反彈的球，看起來就像繼續向前滾入鏡中的世界。沿著這條筆直的軌跡，一直進入一處又一處的鏡中世界，球不斷撞擊撞球台邊，經過有限次的反射，最後會得到一個定向與原始撞球台相同的撞球台世界。

若把一連串有限的撞球台世界沿台邊黏起來，最後會得到一個多洞的甜甜圈曲面，這個曲面繼承了撞球台的平面幾何性質（除了撞球台的頂點）。原來撞球台上的撞球軌跡則對應到此曲面上的直線，因此這個曲面稱為轉譯曲面。數學家已經證明，理解轉譯曲面的模空間，是理解撞球台問題的關鍵。



生的移動軌道（orbit），能夠幫助解決許多關於原初撞球台的問題。

表面上，這個移動軌道可能極為複雜，例如碎形（fractal）。然而在 2003 年，麥克穆蘭證明當轉譯曲面是雙洞甜甜圈曲面，亦即虧格（genus）等於 2 時，情況並非如此。每一單一軌道不是占滿整個空間，就是占滿空間中稱為子流形（submanifold）的子集合。

麥克穆蘭的研究成果被譽為卓越的進展。但他回憶在論文發表前夕，當時還是研究生的莫札卡尼到他研究室問說：「為何你只探討虧格 2 的情況？」

麥克穆蘭說：「莫札卡尼就是這樣的人，被她看到一點線索，就想要全盤了解。」

經過幾年的研究，在 2012 和 2013 年，莫札卡尼和艾司金以及部分與德州大學奧斯汀分校的默罕馬迪（Amir Mohammadi）的合作，他們成功將麥克穆蘭的結果拓展至一般多洞甜甜圈曲面的情況。佐立克認為他們的分析是一項「巨大的成就」，並強調其應用遠超出撞球台問題。佐立克說模空間：

「在過去 30 年一直是學者熱切研究的主題，但我們還是不了解它的許多幾何性質。」

萊特認為莫札卡尼和艾司金的研究「開啟了新紀元」，他花了數個月研讀他們長達 172 頁的論文。萊特說：「打個比方，以前我們試著用小斧頭在紅杉林中伐木，但現在他們發明了電鋸。」他們的成

果已經被拿來應用，例如解決警衛在複合鏡室中的視線問題。

萊特在一封電郵中提到，在莫札卡尼和艾司金的論文裡，「每一層困難和概念之下，又藏著另一層的困難，層層相疊，當我抵達中心時，不得不驚訝於他們建立的龐大機器。」

莫札卡尼的樂觀態度和堅強的意志力，是兩人能堅持下去的關鍵。艾司金說：「有時我們會遭遇挫折，但她從不恐慌。」

現在回想起來，甚至連莫札卡尼也對當時兩人能支撐下去感到驚奇。她說：「如果我們知道事情會那麼複雜，我想我們可能已經放棄了。」她停頓了一下，接著說：「我不知道，真的，我不知道。我是不會輕易放棄的人。」

數學故事的新篇章

莫札卡尼是第一位獲得費爾茲獎的女性。數學界的性別比例失衡是長期而普遍的情況，特別是費爾茲獎，似乎和女性數學家的職業道路扞格。因為費爾茲獎只頒給 40 歲以下的年輕數學家，而就在這樣的年紀，許多女性必須為了生兒育女而暫停她們的職業。

但是莫札卡尼很確定，在未來會出現更多女性費爾茲獎得主。她說：「有很多偉大的女性數學家正在從事重要的研究。」



莫札卡尼攝於海邊。(Mirzakhani 和 Quanta 提供)

在她享受獲得費爾茲獎榮耀的同時，莫札卡尼說她並不想成為數學界的女性代表。她野心勃勃的青少年自我因為得獎而狂喜，但現在莫札卡尼渴望大家轉移對她成就的注意力，好讓她專心做研究。

莫札卡尼數學故事的下一個章節將有大計畫。她已開始和萊特嘗試發展出一份完整的清單，列出轉譯曲面軌道能夠填滿的所有集合種類。佐立克的文章寫道，這份分類清單將會是理解撞球台問題和轉譯曲面的「魔杖」。

這不是小型研究，但莫札卡尼多年下來已經學會大器思考。她說：「你必須忽略那些唾手可得的結果，這需要點技巧。其實我不確定這是不是做研究最好的方式，因為這樣會一路折磨自己。」但莫札卡尼很享受。「畢竟，人生本來就不該太容易。」



本文出處

Quanta 2013/8/12.

譯者簡介

林奕君為臺灣大學數學系大三學生。

延伸閱讀

► 2014 年費爾茲獎與涅瓦里納獎得主系列報導，*Quanta* 網路科普雜誌，8/13/2014 於首爾世界數學家大會頒獎時同日刊登，而且每篇網頁中還附有生動的短片介紹。系列文章第一篇網址為：

<https://www.quantamagazine.org/20140812-a-brazilian-wunderkind-who-calms-chaos/>

► 費爾茲獎的授獎單位國際數學聯盟 (International Mathematical Union) 對莫札卡尼數學成就的公眾描述：

http://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Prizes/2014/news_release_mirzakhani.pdf

► Zorich, A., The Magic Wand Theorem of A. Eskin and M. Mirzakhani, 佐立克應法國數學學會之邀，介紹莫札卡尼數學研究的數學普及文章。原刊登於 *Gazette des Mathématiciens*, 142 (2014)，底下是 2015 年 2 月 arxiv.org 刊出的英譯本

<http://arxiv.org/abs/1502.05654>