

3D 改變未來

泛談數學的 3D 應用

作者簡介：丘成桐為美國哈佛大學數學與物理教授，費爾茲獎、克拉福德獎、沃爾夫獎得主。為幾何分析學之大師，並出入於數學與物理之間。中央研究院院士。科普著作有《丘成桐談空間的內在形狀》。

很高興來到雲南西南聯大的舊址。早上參觀了西南聯大博物館，我深受鼓舞，在那段艱難的歲月裏，一批學者還能夠堅持科學研究和教育，這是了不起的事情。尤其聽了西南聯大的校歌，我更深受感動，相信海外的學者如果聽了也會有與我同樣的感覺。

這一百多年來，中國遇到的很多困難，一個主要的原因是科技發展沒有達到期望的水準。抗戰時，西南聯大培養了很多年輕人，他們畢業後無論在學術界或工業界，都影響整個中國近幾十年來的科技發展。可是，在西南聯大留下來的歷史和科技基礎上，我們還需要發揚光大，繼往開來。我們要問我們能夠做什麼事，中國科技的發展要走什麼路？中國的年輕人，在科技的發展道路上能夠走出自己的新方向嗎？

今天我講的這個題目，就是從這個觀點出發。

我從小就學習基礎科學，從純數學開始到現在，已經 40 多年了。我學習數學從微分幾何開始，再學微分方程，以後發展到物理的廣義相對論、高能物理和弦論。我學習這些學問，一貫帶著熱情，希望看到基礎科學的發展，能對人類有貢獻，對大自然有深入的了解。可是我也慢慢感覺到，基礎科學其實對工業技術和社會科學也有很重要的幫助。所

以這二十年來，我參與了很多工程科學的研究。我不單研究幾何在 3D 科技上的發展，也參與過控制論等應用理論的研究。我今天的演講將以 3D 科技為主。

這些年來，我很欣慰看見從前做的一些純數學研究，可以在實際應用上得到發展。可是我也看到不少讀工程和應用數學的學生，並不注重基礎科學，導致成果比不上從前的同行。其實基礎科學是應用科學之母，假如對基礎科學沒有很好的理解，在工業上就不可能發揮基礎科學的巨大潛力。

兩千多年來，中國人在科學上的重要貢獻主要還是應用科學。反觀西方從文藝復興以後，就特別注重基礎科學，所以他們的科技發展極為迅速。不幸的是，這四百年來中國人對基礎科學了解不夠，造成今天科技發展比不上歐美，我期望學工程和應用科學的中國年輕人，多花一點時間去注意基礎科學的發展。

2D 到 3D

今天我講的題目是應用科學中的一門，希望能從中看到基礎科學在應用科學的重要性。十多年來，我帶領一個團隊做 3D（三維的縮寫，2D 為二維，後同）的研究，我們見證了近代影像技術逐漸成



圖 | 1903 年 12 月 7 日，萊特兄弟首次成功駕駛著具動力且重於空氣的航空器飛行。（維基提供）

熟，已經由 2D 突破到 3D，對工業界來說，這是很重要的突破，它會改變未來的工業走向。

讓我們來反思一下，為什麼從 2D 科技發展到 3D 這麼重要。人類在地球上行走只有兩個自由度^①，因而受到不少的限制，直至發明了飛機，人們才獲得更多的自由度。一百多年前，人類開始用機器在空中飛翔，在當時這是很令人驚訝的事情。因為 19 世紀時，有些物理學家基於錯誤的流體力學計算，認為人類不可能用機器飛上天去。可是人類畢竟超越了這個錯誤的思維，成功的遨翔在天空。

自由度的增加，讓我們對本身的環境和遙遠的太空都有更深入的了解。進入太空以後，我們可以回首看自己生存的地球，比在地球上看到要清楚得多。從衛星看萬里長城，看北京城，看昆明，都比在地上看有更宏觀的感覺。

由三維空間產生的科學和經濟效益也是無可限量

的。自從萊特兄弟把飛機飛上天後，短短十年內，飛機居然可以用來載客和打仗。到了今天，飛機對商業、旅行和求學上的貢獻都是無與倫比的。可是無論汽車、輪船和飛機，都是從大工廠製造出來的，對個人來說，還是沒有太大的自由度，因為個人沒有能力製造這些大型機器，而運作這些大型機器的自由度又遠遠比不上個人電腦。

個人電腦的興起，改變了很多事情，包括通訊、計算和資料儲存，這是半個世紀前無法想像的事情，極少人預料到個人電腦可以有這麼大的儲存量，可以做這麼好的通訊，全世界的工業和經濟因此轉型。這個潮流是無法遏止的，世界上所有的國家，如果不能適應潮流，經濟很快就會陷入困境。

① 從二維空間到三維空間，就是增加一個自由度，一個自由度是一個維度，兩個自由度叫二維，三個自由度是三維。

1980年代時，IBM算是世界上最大的電腦製造公司，當時一台大型電腦價值超過千萬美元，大公司或大學校都需要購買IBM的電腦，他們一賺就是幾十億，所以並不想做個人電腦。但是IBM的生產線很快就受到個人電腦的衝擊，20年前差不多接近破產，假如當時他們轉型的不夠快，可能早就已經倒閉了。

再看另外一間公司，20多年前，照相的膠捲底片都由美國柯達（Kodak）公司壟斷，他們的膠捲通行全世界。最先發明數位相機的也是柯達，但是由於膠捲生意實在太好，據說有很長一段時間，柯達公司80%的生意都來自膠捲市場，所以他們不願意大力推銷數位相機。等到其他公司的數位相機控制了市場，柯達應變無方，最終以破產收場。IBM和柯達都是雄霸世界幾十年的大公司，卻都因為不能迅速轉型，遇到巨大的危機。

相機的數位化是很重要的事情，現在連手機都可以照相，而且品質相當不錯。由於電腦技術不斷革新，資料儲存量更大，計算速度也比從前快得多，現代工業界因此有了基礎性的變革。記得才十多年前，想要在電腦上看電影還很麻煩，可是現在連手機都可以播放電影，這都歸功於電腦技術這十多年來的快速發展。

現在的手機也可以看3D圖片，但解析度比較低。筆記型電腦可以處理一些3D資訊，可是也還不能運用自如。3D照相機和3D影像技術為什麼會遇到困難？一個主要的原因是，電腦在處理3D數據時有相當的技術困難。從2D到3D，除了硬體以外，還有很多軟體技術需要開發。這裏面有很多技術問題，都是工業界想做但還沒有達成的事情。

只要3D技術成熟，工業界就會進入重要的轉型期。現在電腦處理2D的技術已經達到幾乎完美的境地。20年前，處理2D圖片還很困難，可是到了今天，由於硬體和軟體技術的突破，處理2D的資訊技術已經沒有任何困難。

不遠的將來，工業界將會突破3D的門檻，正如飛機發明後，整個世界為之改觀一樣。2D的產業將被3D產業取代，這會是工業界一個很重要的變化，可是這個過程還沒有完成，這個突破應當會成為未來工業轉型的關鍵之一。我今日的講題是「3D改變未來」，就是想解釋這些相關的課題。

3D的未來與挑戰

從2D產業轉型到3D產業的一瞬間，我們不見得能看到3D產業的重要性。就好像海嘯來的時候，波浪在深海裏移動時，海面只增加不到一公尺的高度，但當波浪到達淺海岸邊，突然間會變成幾十公尺的大浪。我們現在採用2D技術，卻還沒有看到3D技術的普及，是因為我們正處於大海裏，還看不到大波浪的發生。可是一旦3D技術普及到整個工業界，我們就來不及追上這門技術，整個工業將會被其他國家壟斷。這就像柯達當年不願意推行他們的數位照相機，等到數位照相機風行全球，柯達已經沒有能力在市場上競爭了。

最近美國總統歐巴馬講了一句話，他宣稱3D技術會引起第三次工業革命。身為美國總統講這番話，當然是因為有專家幕僚提供意見，才敢大膽做出這個結論。所以，我認為發展3D技術很值得我們去思考、去探討。趁現在3D技術還沒有大量發展時，中國的年輕工程學家和科學家都應當注意這門技術。

就拿電影來說，迪士尼（Disney）的3D動畫電影，這七、八年來有出色的表現，標誌著整個動畫電影工業受到3D技術的影響。《阿凡達》開拍的時候，他們的技術顧問曾經邀請我們團隊去幫忙開發所需的3D技術。當時我不知道《阿凡達》是什麼東西，所以沒有答應，沒想後來會成為這麼成功的電影，打破世界的票房紀錄。因為3D技術更能逼真表現物像，很多人喜歡看。所以，3D技術對於電視、電影和動畫產業起著很大的作用。



圖 2 霍去病墓前石雕牛之 3D 圖像。

另外最近，大家對 3D 印表機有很大的興趣，3D 列印是 1990 年代就已經開始快速成型的技術。根據物品的 3D 資料，用材料累加的方法製成實物。如何做 3D 列印呢？第一步是做 3D 照相，照了相後，將資料放進電腦分析，再由電腦根據結果指揮機器將原料堆印起來。原料可以用塑膠或其他材料，慢慢地堆塑成原來物品的立體形像。

這裏有張很漂亮的圖片（圖 2），是複製立在霍去病墓前的石雕牛。我們先用自製的 3D 照相機對石雕拍照，再用 3D 印表機列印出來。我們可以用不同的材料，將它做成一個實物。除了好看的模型以外，我們也可以做零件或模具，這是一門由新型材料、生物控制等多種技術融合而成的技術，是多面向的、很重要的一門工業技術。

3D 印表機用的材料有金屬、陶瓷、塑膠、砂、石膏、蠟糖等，與電腦連接後，通過電腦控制把列印材料一層層疊印。印表機可以將 3D 照相機照下來的圖形表現出來，但也可以將物體本來的設計藍圖變成實物。

這機器有很多用途，舉例來說，如果看到一個小孩子很喜歡的玩具，卻不知去哪裡購買。如果你想做一個給小孩子玩，就可以用 3D 照相機把它拍照下來，然後用 3D 印表機把它製造出來。除了玩具外，3D 印表機也可以用來列印機器人之類的模型。所以，3D 列印技術可以應用在很多不同的領域，像是製造業、文物保護、建築、牙科、醫療、教育、文創、配件飾品等行業，都可以生產 3D 產品。

我們也可以用網路將藍圖傳送到遠端伺服器，讓遠方的朋友將我們希望製造的東西很快複製出來。這個技術顯然對醫療和軍事有很大的用途。人們希望通過多元結構完成一個新工業，3D 技術很快就會成為這個工業的基礎。

由於製造業面臨轉型，資訊化和工業化的深度融合，成了工業界一個很大的挑戰，但也帶來很大的機會。正如手機、筆記型電腦取代了桌上型電腦，進入普羅大眾的家庭一樣，3D 印表機也將會發揮同樣的功能。

但我們必須懂得如何處理 3D 資料，懂得如何做幾何計算和電腦技術，我們也要將硬體技術和軟體技術合併發展。記得在 12 年前，我們團隊想找實際的 3D 資料測試我們的軟體時，遇到很大的困難。當時一台 3D 照相機要價 75 萬美金，這不是普通人能負擔的，甚至實驗室想買一台也很困難。可是到了今天，價錢已經比從前便宜很多。

3D 硬體的技術已經大有進步，常常登上新聞媒體或網路的報導，可是 3D 印表機只是 3D 技術理論的一小部分，還有很多 3D 軟體問題需要解決。雖然近代電腦極為發達，很多困難的計算都已不成問題，但是 3D 軟體工程仍然還未成熟。

3D 計算的數學之路

下面我會談一談怎麼處理 3D 軟體。我們的團隊最開始是以顧險峰和張松為主。顧險峰是我在哈佛大學資訊科學系指導的博士生，張松是我指導的博士後。我和顧險峰用微分幾何的想法，發展出處理 3D 圖形的理論。

我們先用到的重要數學工具是保角幾何（conformal geometry）^① 的單值化理論（uniformization theory），這是龐卡赫（Henri Poincaré）推廣黎曼的想法所證明的理論。所謂保

① 譯註：「保角」或譯「共形」。

角指的是處理圖形時，用到的映射必須保持映射前後圖形角度不變。保角幾何是一門古典數學理論，到現在仍是純數學的重要分支，但我們發現它在應用數學尤其是 3D 影像的刻劃，有很重要的貢獻。

最近幾年，我們也開始研究如何以蒙日 / 安培方程 (Monge-Ampère equation) 來處理 3D 圖形，由它所得出的映射可以保持圖形局部面積不變。30 年前，鄭紹遠和我研究過這個重要方程，當時我們研究的原因只不過是因為它有很漂亮的理論，沒想到今天可以應用到 3D 計算方法上。

我們發展出處理 3D 圖像的軟體方法後，需要做實驗來驗證。但是想要得到 3D 資料必須先有 3D 照相機。當時 3D 照相機很貴，幸好張松進入我們的團隊，他是結構光原理的專家。於是我們自己研發 3D 照相機的技術，將成本從數十萬美金大大降低到幾千美金以內，同時一秒鐘可以取得超過 60 幀的 3D 影像。從前的昂貴 3D 照相機幾個鐘頭才能拍一幀照片；而目前其他公司製造的 3D 照相機，最快的也只有兩秒鐘一幀。

為什麼需要速度快的照相機？因為人的面部表情會不停改變，獵取面部表情時，如果照相機不夠快，就得不到最好的 3D 數據。尤其是想取得運動員動作的 3D 照片，不論跳水也好，跑步也好，這些動作都比面部表情變動速度更快，一秒鐘 60 幀還是不夠快。現在我們研發的 3D 照相機已經快達一秒鐘數百幀，只是造價稍嫌昂貴。



圖 3 龐卡赫。(維基提供)

優秀的照相軟體可以幫忙取得更多有用的數據。目前有很多出色的年輕博士參加我們的研究團隊，包括羅鋒、王亞霖、雷樂銘、林文偉等。在香港中文大學、北京清華大學、新竹交通大學和臺灣大學，都有很多傑出的數學家 and 計算數學家參與。我們的 3D 技術研究用到了現代的數學成果，包括泰希穆勒 (Teichmüller) 理論等高深的學問。另外我們也在醫學影像處理獲到突破，對人腦、肝臟、肺、腎的 3D 影像處理，得到很不錯的結果。

3D 與保角幾何

3D 照相機得到的資料其實是一大堆點的集合。這個點集是離散的空間，一點一點的可能有百萬點，我們需要將這麼多的點局部連結起來，才能找到幾何資訊。因此必須研究離散曲面上的數學，從離散點集計算出很多抽象的幾何概念，包括曲面的度量 (metric) 和曲率。

我們的計算理論有兩個不同方向，第一個方向是保角幾何和黎曼面的理論，用到了 150 年前黎曼發現的數學成果，第二個方向是最優運輸 (optimal transport) 理論，後者用到前述的蒙日 / 安培方程。

保角幾何的理論已經發展了一百多年。讓我先說明在 3D 圖形處理上使用保角幾何的幾個主要優點：首先是單值化。從數學知道任何複雜圖形



圖 4 蒙日 (左) 與安培 (右)。(維基提供)



圖 5 利用保角映射可以將平面上的棋盤格或小圓格映回（人臉）曲面上，仍然保持格線垂直或小圓的結構。

都可以保角變形到標準的曲面來處理，這些標準曲面包括單位球面、歐氏平面、雙曲面（hyperbolic surface）^①。

第二項優點是降低維度。當我們用單值化理論將三維人臉攤平到二維平面時，就可以從 2D 圖形來量度各種 3D 的資訊，並利用 2D 的成熟技術。

第三項優點是資訊保留。保角變形映射的過程保留了所有幾何資訊，因此可以倒過來，從處理完的 2D 圖形重新構造原始的 3D 圖形，不會遺漏任何資訊。如果人的臉部資訊可以存成 2D 圖形，比存成 3D 圖形要方便得多。

最後一項優點是普適性，因為所有圖片都用保角幾何的方法來表示和處理。

將所有的圖形放在一起甚至可以構造出各種不同的空間。譬如將全世界不同的臉孔資訊放在一起，就形成一個形狀空間。而且如果研究臉孔之間的映射空間，就可以解決臉孔的辨識問題。

我要強調保角幾何本身是純數學許多不同分支的匯流之處，包括複變分析、代數拓樸、黎曼面、代數曲線、泰希穆勒理論、微分幾何、偏微分方程。因此應用的潛力非常豐厚。例如很多數學理論在工業界很有用，像計算流體力學、計算空氣動力學、計算電磁學都可以用到保角映射這套方法。這些計算方法以前只有在平面上才能做出良好的結果，可是有了保角映射方法，就可以處理三維空間中曲面上的相應問題。譬如利用偏微分方程計算眼淚在人

臉上的流動就是一個例子。另外對於資訊科學，無論是計算幾何、計算圖學、電腦視覺、影像處理等，也都可以用到保角幾何。

我們的團隊在這方面發展了基礎理論、演算法，以及高效能軟體。可以計算度量曲面的保角不變量（conformal invariant），以及曲線間的保角映射。在處理圖形計算時，會用到許多保角不變量。計算這些量可以協助我們高效率處理 3D 圖像。譬如處理人臉圖形，如果要決定哪兩張圖形相同，可以計算這些不變量，就知道你的臉為什麼會跟其他人不同。反過來，也可以找出兩種形體最相近之處。有了這樣的辨識方法，就可以有效率的應用到工程及醫學上。

所謂保角映射是一種一對一的對應，同時保持角度不變。在這種映射下，長度和面積或許會改變，但夾角的角度保持相同。在我們的研究裏，用到一個很重要的基本事實：任何二維的曲面都有唯一的保角結構。

來看一下人臉的實際例子（見圖 5），如前述用單值化原理將它映射到圓盤上，也可以放在正方形上。假設在平面正方形上，有一組類似棋盤的方格，我們就可以反過來將方格映射回原來的人臉上，因此人臉上會出現一格格棋盤狀分布。仔細檢視，會發現雖然這些格面形狀彎曲，但是人臉上的格線卻都互相垂直的，宛如平面棋盤。這是因為我們使用的是保角映射。

再觀察最右邊的圖，平面上有一些排列整齊的小圓，這些圓映射回人臉後，仍然是圓，這也是保角映射的基本性質。為什麼要畫這些格點呢？因為我們可以針對每一個方格或圓，畫一些我們感興趣的圖樣，再映回人臉上，同時保證不會大幅改變原來的圖樣，這對動畫是很有用的技術。

① 譯註：這裡的雙曲面是曲率為常數 -1 的黎曼面，不是普通的二次曲面。

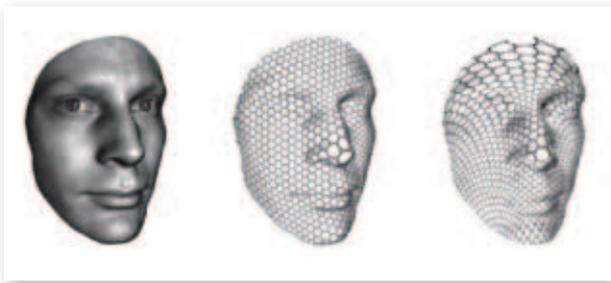


圖 6 沒有保角特性的映射，將小圓格映回人臉後只能呈現小橢圓格。

再看圖 6。中圖就是前述的保角映射，可以局部保持圓的形狀。可是右圖由於使用的是任意的微分同胚映射（diffeomorphism），得出來的就只是橢圓，而且還有大有小，不容易進行圖像處理。這是保角映射的優勝之處。

圖形的標準表示

前面說過，我們用到龐卡赫很出名的單值化定理。龐卡赫是十九世紀末的大數學家，他證明任何緊緻的二維度量曲面，都可以保角地映射到二維的常曲率曲面。圖 7 左方是兒童雕像的 3D 照片，可以保角映射到球面上。依據龐卡赫的重要

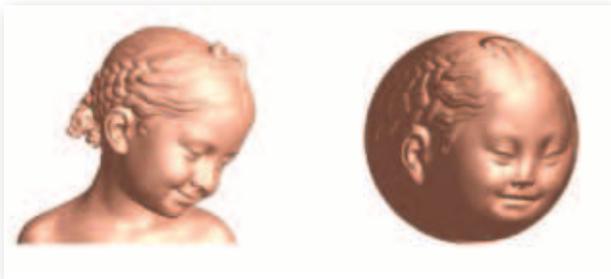


圖 7 依照單值化定理，任意虧格（genus）0 的曲面可以保角映射到曲率為 1 的單位球上。

定理，任何二維曲面的圖形，只要它和球面同胚（homeomorphic），就可以保角變換成圓球上的圖形（右圖）。

圖 8 左方是貓玩偶的 3D 照片，跟圖 7 不同的是它有一個柄，不能收縮成一個球。龐卡赫的定理說這樣的曲面可以保角變形成平坦的二維圖形，所以

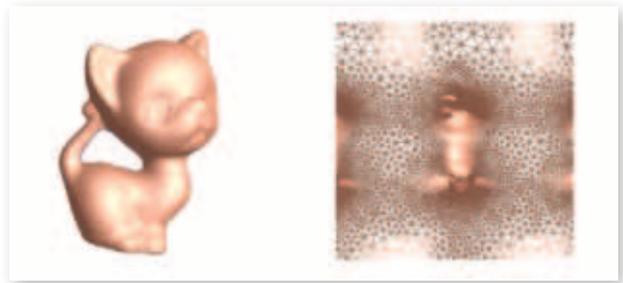


圖 8 依照單值化定理，任意虧格 1 的曲面可以保角映射到曲率為 0 的平面上。

這個圖形映射到右方的圖形。另外，拓樸型態更複雜的圖形，依照龐卡赫定理，則可以保角變形到雙曲面。

利用龐卡赫單值化定理，可以將看起來複雜的圖形一致變成比較簡單的圖形。其中實際的計算方法則來自球面調和映射（spherical harmonic map）。像圖 7 左邊是用 3D 照相機照出來的圖像，透過調和映射的計算法，可以近乎逐點的映射到右邊的球面上。

我們也發展了其他的圖形表示法，其中之一是利用赫吉（William Hodge）理論的調和形式（harmonic form），這是赫吉在 20 世紀初發現的，他的想法來自流體力學。這個幾何上的概念，竟然也可以運用到圖像處理。圖 9 就是利用赫吉調和一維形式的方法，我們發現用不同的一維形式，可以



圖 9 左邊兩圖是用調和一維形式為基底所畫的圖形，右邊兩圖則是用全純一維形式（holomorphic 1-form）為基底。

得到很多不同的圖形，而且都是很漂亮的圖形，對 3D 動畫很有啟發。

這些方法都有很美妙的數學理論為基礎。到目前為止，能夠處理這種有複雜拓樸圖形計算工程的只有我們的團隊。

蒙日 / 安培方程

保角映射可以保持圖形的角度。保持角度的好處是微小的正方形還是對應到正方形，微小圓形還是對應到圓形，可以表現在人臉映射的處理上。可是我們還發現其他的重要方法，除了保角映射，也可以要求構造出局部面積不變的映射。

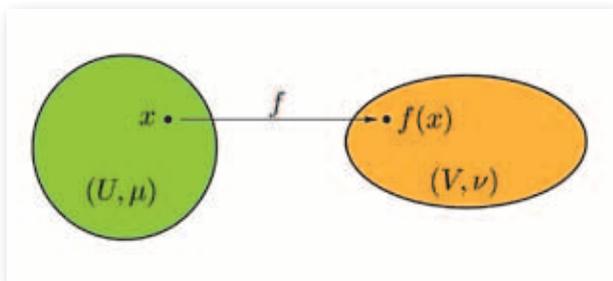


圖 10

圖 10 從左邊區域映到右邊區域的映射 f ，將這兩個區域一一對應起來，但面積局部要求保持不變。想構造這類映射時，需要解底下的蒙日 / 安培方程：

$$\det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \nu(\nabla u(\mathbf{x})) = \mu(\mathbf{x})$$

蒙日 / 安培方程經常出現在微分幾何，可以用來構造局部保面積的映射。解這個方程的一個重要方法，出自我和鄭紹遠當年的研究。目前我們團隊已經可以從電腦應用我和鄭紹遠的方法。這個方程也和所謂最優運輸問題有關，後面將會再談到。

實際的應用

我們研究的實例包括醫學影像與腫瘤診治、3D 人臉辨識、3D 動畫與電腦輔助設計

(CAD)、電腦圖學、3D 列印的幾何逼近論、網際網路 (internet) 上的黎曼幾何、雲端計算資源配置的傳輸理論等等，都用到上述這些技術。

醫學診斷

我們可以從醫學影像數據重建器官形狀，腦也好，心臟也好，都可以處理，得到影像以後再計算其幾何特徵。研究器官的變動是重要的問題。醫生替病人診斷，可能要觀察器官十天數月的變化，需要比較前後器官圖形的變化。假如有比較的好方法，醫生就可以比較容易的診斷病因，而我們的方法已經可以比較大腦在不同時期出現的影像

大腦表面很複雜，處理腦部的幾何形狀有一定的困難。我們可以將腦部皮層保角映射到單位球面（見圖 11）。由於球面上有像地球儀的經緯度，因此腦上任何一點都可以用經度和緯度來標定，就像船在大海航行，如果船長向陸地報告自己的位置是東經 20° 、北緯 18° ，就可以知道船的位置。有了保角映射，腦上任何一點都有經緯度。假如大腦長了腫瘤，只要知道它的經緯度，一個月過後，可以很容易觀察腫瘤的變化，這對醫療很有幫助。

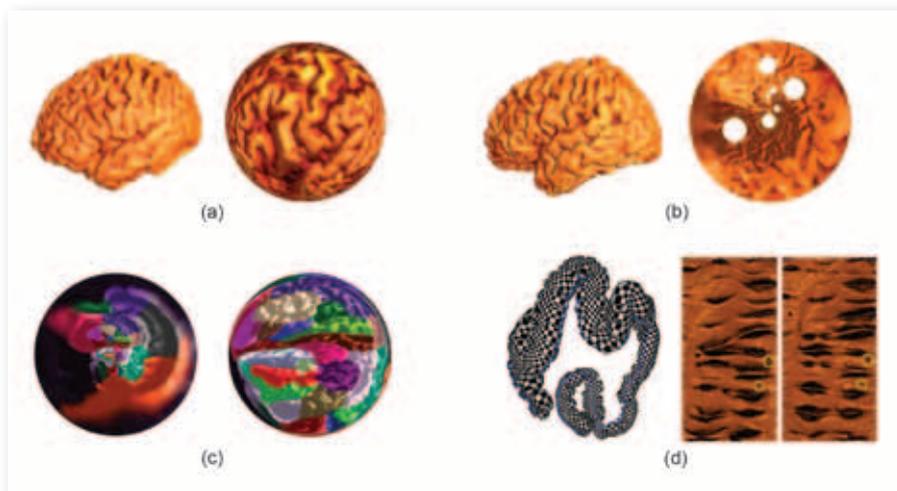


圖 11 (a) 大腦皮層曲面可以保角映射到單位球面，藉由單位球面的同胚，便可建立皮層曲面間的對應。利用球面的經緯坐標更可為皮層精確定位。(b) 將大腦皮層曲面沿主要的腦溝或腦回切開，再計算其保角模，即可檢查異常的變化。(c) 將大腦皮層曲面保面積映射到平面，測量腦功能區的面積變化，可以判斷其萎縮程度，協助診斷阿茲海默症。(d) 從 X 光和 MRI 數據可以重建虛擬大腸鏡，協助醫生診斷息肉或腫瘤的變化，減輕內視鏡侵入性檢查的風險。

研究大腦的形狀不只是表面，醫生也很重視腦褶紋間的曲線位置，從圖 11 (b) 可以看到右圖中幾個空心圓圈區域的圓周，就對應到左圖的褶紋線，因此可以很清楚的理解褶紋線的分布。

很多重要的疾病如 HIV 病毒會在大腦皮層上造成變化，我們可以通過保角變化的表示法，利用貝特拉米係數 (Beltrami coefficient) 來研究，找到病毒對腦部影響最大的地方。也就是從大腦的變化，找到愛滋病影響最嚴重的部位。

除了愛滋病，我們也可以在不同時間掃描腦部，找出皮層比較厚的地方，也可以區分大腦不同的功能區，找出它的變化。例如將大腦皮層用保持面積的映射，映射到平面上，測量每個功能區面積的變化，從而判斷各個腦區的萎縮程度，協助判斷是否為阿茲海默症。

除了大腦，這項技術也可以用到其他器官。眾所周知，做大腸鏡必須用管子侵入大腸去，透過內視鏡檢視有沒有腫瘤。可是，大腸鏡在大腸裏面移動往往會有風險，尤其是年齡大的老人，大腸鏡有把大腸戳破的危險。最近，我一個朋友做大腸鏡檢查，就因為這個疏失當天就發炎過世。

我們不用大腸鏡，改用 X 光和 MRI (核磁共振造影) 的技術，得到大腸局部的一張張圖片，然後用我們的方法重組成 3D 影像，透過 3D 影像檢視腸子中腫瘤的跡象和位置。這個方法不但有效率，還可以免去麻醉與直接接觸的危險。

我們已經完成了將腸壁曲面數

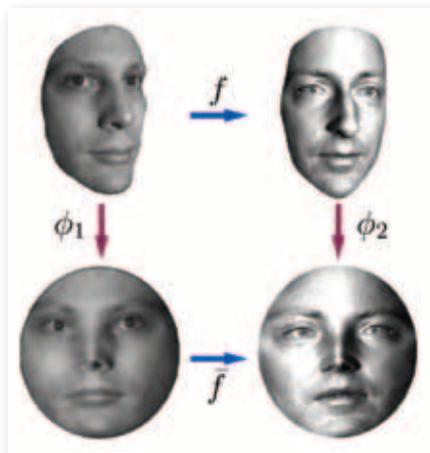


圖 12 不同人臉的圓盤表示。

據以保角映射攤平並從中尋找息肉跡象的軟體。西門子公司 (Siemens Inc.) 應用在他們的大機器上，效果很好。這樣就可以用典型的幾何映射去研究息肉的變化。我們從大腸的正面和背面做 X 光映射，再互相校正，得到效果很好的 3D 影像。

3D 人臉辨識

我們的人臉辨識方法跟一般方法不同，是因為使用了保角映射理論。圖 12 中有四張小圖，上方兩圖是用 3D 照相機照下來的，這兩個圖形是不同的人臉，當然我們也可以考慮同一個人的不同表情。下方兩圖是將上方的圖用保角映射映到圓盤上。人臉都表現在圓盤上就容易進行比較。注意上方的人臉是三維空間裏面真實的立體人臉，就好像你和弟弟兩個不同的人臉，我們將這些臉攤平在桌上，變成二維的平面圖形。保角映射所得到的像基本上是唯一的。因此進行人臉比對時，即使是不同人臉的表情，都可以更有效的在平面圖形上做比較分類。

同一個人的臉在不同場合會有不一樣的表情，有時帶著笑容，有時沒有。我們想判斷某張人臉是否你本人，無論是否帶著笑容，同時又要知道這不是你弟弟的臉，這就需要有很好的技術。同一個人的臉部表情有小變化時，如何找出共同之處是基本的問題。我們的方法是將 3D 圖形變成 2D 圖形，就像下方兩個圓盤的圖形。由於我們的 2D 圖形保留了所有 3D 資訊，所以 3D 圖像的辨識可以用 2D 技術來解決又不失真。

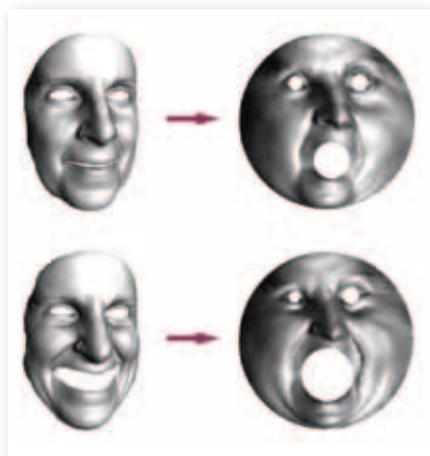


圖 13 不同表情之追蹤。

我們的方法也可應用於對電腦視覺。能夠同時計算幾何特徵、分析其形狀並進行分析比對，這對於曲面追蹤（tracking）的技術很重要。我們一樣將曲面投射在平面上，建立互相追蹤的方法。

一連串臉部變化的圖像，如圖 13 左上嘴巴微開的人臉，到左下嘴巴張開的人臉，右邊則是保角映射後得出的圖形。比較右邊這兩個圖形，利用影像處理模式和機器學習就可以實現人臉辨識。若能夠儲存在公共的 3D 人臉資料庫，效果會很好。

幾何建模與 3D 動畫 CAD

幾何建模的核心技術是計算曲面的仿射結構（affine structure），我們需要有效的控制特徵點或奇點。人臉圖像就有很多需要控制的特徵點。做動畫或玩具時，專家都希望能控制一些操控表情的特徵點，移動這些點能夠讓面部表情更豐富。我們團隊利用黎奇流（Ricci flow）和拓樸阻礙（topological obstruction）理論，發明了流形樣條（manifold spline）的理論和方法，可以實現整體

建模，減少特徵點的個數，控制特徵點的位置，並使特徵點更有效的控制表情（圖 14（a）的眼睛附近、嘴巴、鼻子的部位，都是重要的控制點，就是所謂的特徵點）。我們希望能控制特徵點的變化，使得往後能夠有效的處理電玩遊戲中的圖形或其他圖形的表現。

臉部表情的動態表現在動畫技術上非常重要。例如圖 14（c）的微笑的女子，我們捕捉她的表情，然後將表情自然的分割，就可以利用動畫技術加強其表現。從前製作人臉表情的動畫要靠手繪，得花幾天工夫，而我們的方法基本上是全自動的，很快就可以做出來。你看這些從左到右的人臉表情，可以映射到下方的圖像，得到效果良好的圖像追蹤。

我們甚至可以把表情變化轉移到動畫的虛擬人物上，可以用自己的臉部表情來驅動虛擬角色的表情，甚至驅動貓或狗等動物角色的表情。用人臉的表情來驅動，讓貓狗跟著笑或哭是很有趣的事情。這些技術在動畫電影上也看的到，但電影的影像是用手工繪製，我們卻是自動化的。我們將圖形恰當

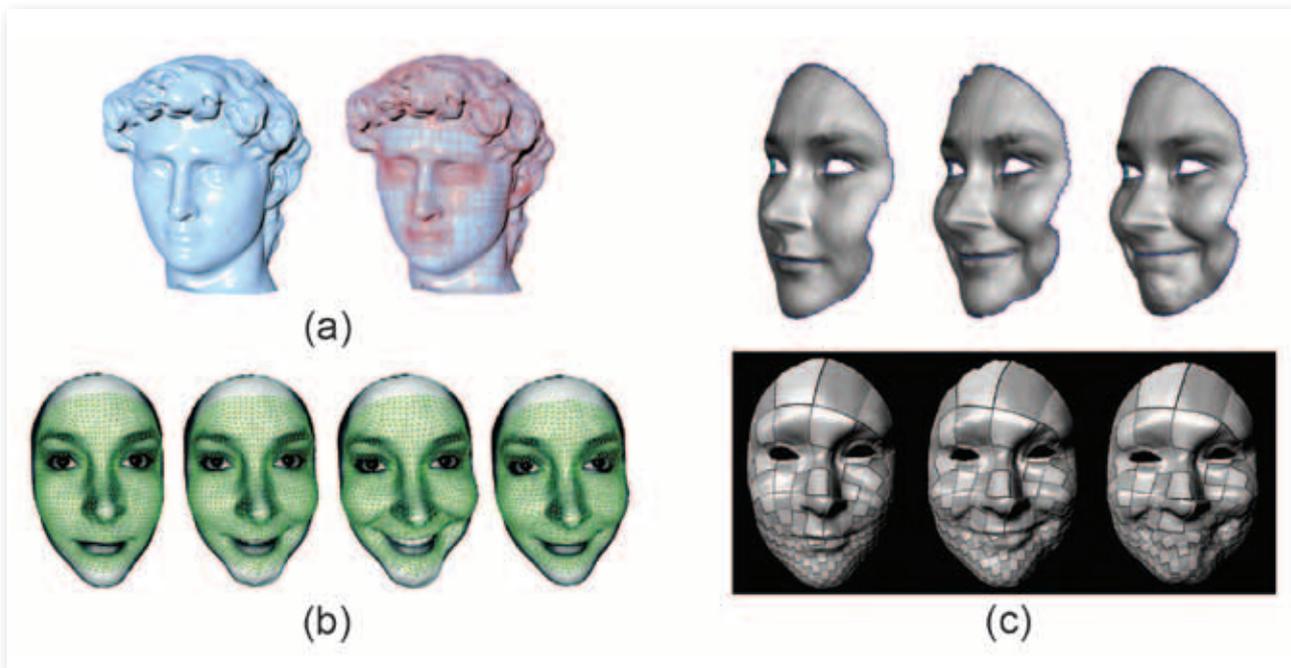


圖 14（a）幾何建模的核心是計算曲面的仿射結構，有效控制特徵點。我們的流形樣條法可以整體建模，減少並控制特徵點。（b）單網格（single mesh）法可以將表情轉移到動畫電影的虛擬人物。（c）捕捉人臉動態表情後，再將表情分割並以動畫技術強化。

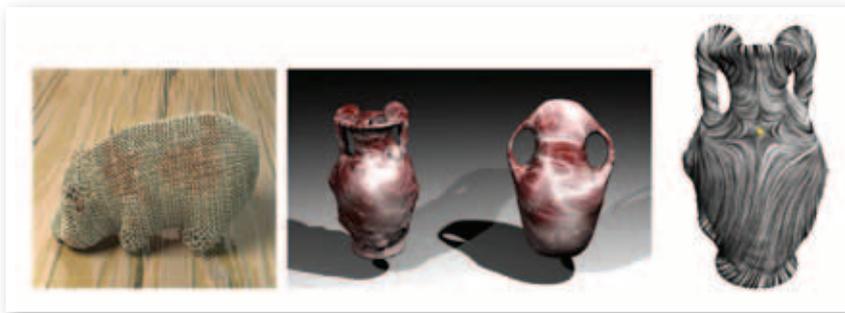


圖 15 用我們的方法可以協助模擬畫作、時尚設計、曲面編織、轉移紋理。圖中衣服上的黃色點就是特徵點。

建立連結，再驅動它變化，這種將 3D 轉成 2D 來自動化處理的方法很有效率，效果也很好。

電腦圖學

電腦圖學有很多不同的問題都可以運用我們的方法來解決。無論是曲面參數化、紋理貼圖（texture mapping）、紋理合成和轉移、向量場設計等等，我們的方法都提供了重要的協助。將圖形保角投影到平面區域，減少它的變化，可以很快的採用不同的紋理將圖形重新表現出來，或者將某曲面的紋理轉貼到其他曲面上。

這種方法可以用來做服裝設計，用戶可以決定特徵點的位置和指數，模擬創作者的畫作或者衣服的底色。如果你看到喜歡的雕塑，想找出製作方式，也可以透過我們的方法來計算。我們也可以讓曲面變成編織的形體，做出漂亮的藝術品。這些全都是用保角映射或保面積映射來處理的。

另外我們的流形樣條法還可以解決機床的設計問題。我們可以將 3D 掃描的資料，轉換為曲面的樣條，這在工業上有許多應用，其中之一是製造機器，譬如可以將機器重新複製成一個山寨機器。我們的三維映射，可以一體的重製。另外，對於將立體形體轉換成多面體網格，我們的樣條曲面法可以做出各種不同的成果。

這些成果對工業、動畫、電影都很重要。

3D 列印

現在來看一些相機取得的圖像（圖 16）。左圖的雕像頭像是用 3D 照相機照下來的圖。3D 照相機列印技術要靠幾何逼近論：因為相機照下來的只不過是一個點集的

資料，有時候照不清楚的部分，就必須將其中的雜訊去掉，再用我們的軟體去做後製處理。最後的目標是得到一個很均勻、很漂亮的網絡，方法是用三角剖分法（triangulation method）將左邊漂亮光滑的圖上的點和線恰當的連起來。

製造良好的三角剖分是很重要的問題，3D 列印技術需要良好控制曲面的三角剖分，使影像更清楚，三角形的長度和角度都在持續變化，我們希望將適當的點用直線連起來，形成一堆勻稱而接近正三角形的剖分。三角形的勻稱對計算很重要，因為可以提高數值穩定性。

例如人臉上可以放一百萬個點，如果將 3D 人曲面以保角映射攤平到平面區域，再用狄勞尼（Boris Delaunay）方法計算三角剖分，映回人臉，這時得到的三角形接近正三角形。我們的三角剖分法在數值收斂時，效果非常好。而且理論可以證明這種方法的離散曲率會收斂到連續曲率。

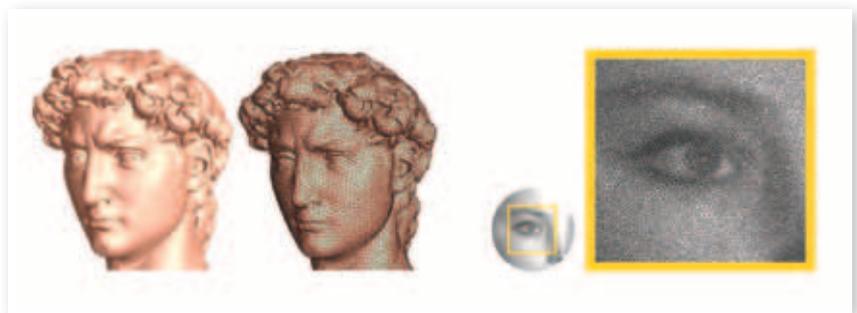


圖 13 3D 照相數據三角剖分的兩個例子。

網際網路——離散黎曼幾何

大規模網際網路的拓樸和幾何是網絡（network）領域的基本問題。古典黎曼幾何假定我們的臉是光滑的，黎曼度量、聯絡（connection）和曲率的概念都是從光滑的微分結構推導出來的。我們將古典調和分析推廣到網絡圖上，再利用曲率 / 維度不等式可以定義網絡的離散黎奇曲率。我們發現網絡曲率可以決定網絡結構的重要特性，譬如網絡核心的擁擠、網絡傳輸的穩定性，都可以通過這些想法來釐清。

我們用這個方法研究現在網際網路實際數據的網絡幾何，結果發現網際網路的整體結構可以透過幾何方法來分析，負曲率的部分是主幹，連接許多正曲率的局部叢集。網絡擁擠的地方和負曲率很有相關。網絡上負曲率區域的測地線比較穩定，網絡結構的局部擾動影響不大。但是透過冪次律（power law）隨機產生的網絡圖，雖然曲率分佈類似，卻沒有這些特性。可以看出這些數學觀念對網際網路的研究將會產生很大的作用。

雲端計算資源配置

在網際網路上設置計算中心，並恰當的分配計算的任務，這是一般大量的生產者和消費者的配置問題。圖 10 可以想成兩個測度空間（measure space）：一個是消費者的空間，一個是生產者的空間，其中 μ 是生產率， ν 是消費率。我們要考慮保證生產 / 消費平衡（即保局部面積）的映射 f ，並希望 f 能夠極小化運輸的成本，這就是所謂的最優運輸問題。

如前述，這個問題可以用蒙日 / 安培方程來幫忙。我和鄭紹遠 30 年前研究凸幾何時的工作，現在正好可以用在雲端計算上。我們覺得很高興，因為我們根本沒想到，當年看來漂亮的幾何問題竟然會有實際的用途。

結論

科技的發展為數學提供了挑戰，不單推動數學發展，也推動了工程和醫學等領域種種基本技術的發展。今天介紹的計算保角幾何與離散最優運輸理論，就是結合純數學的理論與先進的電腦設備和演算法。這種數學與應用結合的成功，希望能讓大家更重視基礎科學的成就，以及它在工業應用的重要潛力。謝謝。∞

本文出處

本文改寫自作者 2014 年 5 月在雲南師範大學（原西南聯大）之講辭，演講後之問答部分已刪除。

延伸閱讀

► Gu, Xiangfeng & Yau, Shing-Tung *Computational Conformal Geometry* (2008), International Press. 顧險峰和丘成桐合著的《計算保角幾何》。

► 顧險峰石溪大學（紐約州立大學石溪分校）個人網頁中的講義頁，有許多講義或教材可供下載瀏覽。

<http://www3.cs.stonybrook.edu/~gu/tutorial/index.html>



各種曲面的流形樣條圖形。
(作者：丘成桐、賀恩、顧險峰)