我相信數學具有一種神祕的統一性

2005 年阿貝爾獎得主拉克斯訪談

訪談：勞森（Martin Raussen）
史考（Christian Skau）
譯者：趙學信

受訪者簡介：拉克斯（Peter Lax）1926 年生於布達佩斯，15 歲於二次大戰期間來美，被徵召服役後前往洛沙拉摩斯，1949 年獲紐約大學博士，1958 年成為紐約大學教授迄今。阿貝爾獎委員會稱譽他「在偏微分方程的理論、應用及其解的計算上有基礎的貢獻。」拉克斯的成就跨越許多重要貢獻：可積系統、流體力學、震波、孤子、雙曲守恆律、科學與數學計算等。拉克斯獲獎無數，尤其 1987 年獲沃爾夫獎，2005 年獲阿貝爾獎。

訪談者簡介：勞森目前任職於丹麥奧爾堡大學（Aalborg University, Denmark）數學科學系。

史考是挪威科技大學（Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway）數學系退休教授。

訪 首先謹代表挪威和丹麥數學學會，恭喜你獲得 2005 年的阿貝爾獎。你在 1941 年 15 歲時，從匈牙利來到美國，僅僅三年後的 1944 年就被徵召到陸軍服役。他們沒有把你派到海外的前線，而是在 1945 年把你送去洛沙拉摩斯（Los Alamos）參與建造第一顆原子彈的曼哈頓計畫。能夠參加如此重大的計畫，而且還能會見許多傳奇人物，例如費米（Enrico Fermi）、貝特（Hans Bethe）、西拉德（Leó Szilárd）、威格納（Eugene Wigner）、泰勒（Edward Teller）、費曼（Richard Feynman）等物理學家，還有馮諾曼（John von Neumann）、烏蘭（Stanislaw Ulam）等數學家，對一個年輕人來說，必定是很震撼的經驗。這段經歷如何塑造了你的數學觀，如何影響你選擇哪些數學研究領域？

事實上，我在 1949 年拿到博士學位後，又回洛沙拉摩斯待了一年，之後還有好幾個夏季在那兒擔任顧問。我在洛沙拉摩斯的第一次經歷，特別是後來那段期間，塑造了我的數學思路。首先，那是體驗如何成為科學團隊的一分子，團體的成員不只是數學家，而是有著不同視野的人，研究目的不是證明定理，而是做出產品。這是書本上學不到的，必須要親身參與，所以我鼓勵我的學生至少去洛沙拉摩斯訪問一個夏季。洛沙拉摩斯有一套非常活躍的訪問學人計畫。其次，早在 1950 年代，我在那裡體認到電腦運算對科學和數學的絕對重要性。受到馮諾曼的影響，洛沙拉摩斯在 1950 年代和 1960 年代早期，一度曾是全球計算科學領域無可質疑的領導者。

洛沙拉摩斯空拍圖。（洛沙拉摩斯國家實驗室提供）

研究貢獻

訪 我們可否稍後再回到電腦？先請教幾個關於你的主要數學研究貢獻的問題：你在非線性偏微分方程理論有著卓越的貢獻，對於守恆律雙曲系統（hyperbolic systems of conservation laws）的理論和數值解，你的貢獻是決定性的，更不用說你對理解不連續性的傳播（propagation of discontinuities），亦即震波（Shocks）的貢獻。能否簡單描述一下你如何能夠克服這個數學領域裡種種極難跨越的障礙與困難？

當開始著手研究時，我受到兩篇論文很大的影響。其中之一是霍普夫（Eberhard Hopf）關於伯格斯方程（Burgers' equation）的黏性極限（viscous limit），另一篇是馮諾曼和芮特邁爾（Robert Richtmyer）關於人工黏性（artificial viscosity）的論文。觀察這些個例，我能看出一般理論會是什麼樣子。

訪 夸斯柯爾（Martin Kruskal）和扎布斯基（Norman Zabusky）在 1960 年代發現孤子（soliton）在解 KdV 方程（Korteweg-de Vries equation，科特韋格 / 德弗里斯方程）時所扮演的角色，這項驚人的發現，以及之後同樣令人驚訝的、由數人提出的 KdV 方程完全可積的解釋，這兩者代表了非線性偏微分方程理論的革命性進展。你跨入這個領域時，提出了拉克斯對（Lax pair）這個極具原創性的觀點，使得我們能夠理解逆散射變換（inverse scattering transform）如何應用於 KdV 方程及數學物理學的其他重要方程，例如正弦戈登方程（sine-Gordon equation）和非線性薛丁格方程。能否談談你認為這個理論對於數學物理學、對於實際應用有多重要，以及你對這個領域未來發展的看法。

或許我應該先指出，孤子交互作用的驚人現象是經由數值計算發現的，正如馮諾曼在此之前數年所預言的，亦即計算將可揭露極為有趣的現象。因為我和夸斯柯爾很熟，我很早就知道他的發現，所以我開始思考。既然守恆量很明顯有無窮多，於是我自問：如何能夠一次就生成無窮多個守恆量？我想，假若有一個能夠保持算子譜（spectrum）的變換，那它就是我們想要的變換了，事後證明這是一個成果豐碩、應用範圍廣泛的想法。你問我有多重要？我想它非常重要。畢竟，從訊號傳輸科技的觀點來看，在跨洋傳輸時利用孤子來傳遞訊號是很具有未來潛力的重要技術。這是由貝爾實驗室（Bell Labs）的一位傑出工程師莫倫瑙爾（Linn Mollenauer）發展出來的。這項技術目前尚未實際應用，但總有一天會的。有趣的是，古典訊號理論是完全線性的，而孤子訊號傳輸的重點在於其方程是非線性的，這是它在實用方面的重要原因之一。

至於理論的重要性：KdV 方程是完全可積的，後來我們又發現數量驚人的完全可積系統（completely integrable system）。完全可積系統

是真的可解的，這裡說的「解」，真的就是一般人曉得的意思。當數學家說他解出問題時，往往指的是他知道有解存在，這固然極好，但也就僅此而已。

接下來的問題是：完全可積系統的解，是否只是不可積系統的例外，抑或其他系統也有類似的行為，只是我們無法分析它？在此，我們的嚮導很可能是科莫哥洛夫 / 阿諾德 / 牟瑟定理（Kolmogorov-Arnold-Moser theorem），根據這定理，近乎完全可積系統的行為就會如同它是完全可積的。現在，「近乎」指的是什麼，在你證明定理時是一回事，但在做實驗時又是另一回事了。這是數值試驗揭露事物的又一種面向。所以我真的認為研究完全可積系統，也可以為我們理解更廣義系統的行為帶來線索。1965 年時，誰能想到完全可積系統會變得如此重要？

訪 下一個問題是關於你在 1957 的開創性論文〈振盪初始值問題的漸近解〉（Asymptotic solutions of oscillating initial value problems），許多人認為它是傅立葉積分算子（Fourier Integral Operators）的發源地。這篇論文有哪些新觀點帶來了日後的豐碩成果？

它是對於發生之事的微觀 / 局部描述，它同時用大、小兩種尺度來看問題。同時結合兩種面向，這就是它的長處。微觀 / 局部觀點的數值實踐是藉由小波和類似的方法來達成的，這個想法在數值上非常有威力。

訪 你和菲利普斯（Ralph Phillips）合作研究散射理論（scattering theory），陸陸續續長達三十多年，將這理論應用到許多場合。能否評論一下你們的合作關係，以及你認為你們得到的最重要結果是什麼？

那是我生命中最愉快的時光！菲利普斯是這個時代最棒的分析學家之一，我們成了非常親密的好友。我們用一種新的方法來檢視散射過程，賦予它入射和出射的子空間。這麼說，我們從酉群（unitary group）中切割出某個半群（semi-group），其無窮小生成元（infinitesimal generator）幾乎包含關於散射過程的所有資訊。然後我們把它用到聲波和電磁波由於位勢和障礙物所造成的古典散射。循著法捷耶夫（Ludvig Faddeev）和帕夫洛夫（Boris Pavlov）的一項非常有趣的發現，我們研究自守函數（automorphic function）的譜理論。我們進一步發展理論，對於艾森斯坦級數（Eisenstein series）有了全新的方法，經由轉譯表現（translation representation）而得到譜表現。跟隨法捷耶夫和帕夫洛夫的腳步，我們甚至能揣想，或許走過轉角就能看見黎曼假說。


2005 年，拉克斯在 Hotel Continental 受訪。左起勞森、史考、拉克斯。（Knut Falch/Scanpix 攝，Det Norske Videnskaps-Akademi/Abelprisen 提供）

訪 那必定很令人興奮！

的確！把黎曼假說純粹表述成切除掉所有駐波的衰減訊號，再由此來證明，我覺得成功的機會不大。黎曼假說是非常縹渺的。你可能記得易卜生詩劇《皮爾金》（Peer Gynt）裡有個神祕角色，勃格（Bøyg），不管皮爾金怎麼走，都被勃格擋住去路。黎曼假說就像勃格！

訪 你現在對哪些領域或問題最感興趣？

我對零色散極限（zero dispersion limit）有一些想法。

純數學與應用數學

訪 我們想請教一個或許有爭議性的話題：純數學與應用數學。數學界裡偶爾會聽到這樣的說法：非線性偏微分方程理論雖然很深刻，而且也有很重要的應用，但卻充滿醜陋的定理和笨拙的論證。反觀在純數學裡，則是優雅和美學當道。英國數學家哈第（G. H. Hardy）是一個極端例子，但這種態度到了現代仍然可以遇到。你會如何回應？會覺得生氣嗎？

我並不容易生氣。有次我對我們學校的某位院長發火，他是可惡的混蛋、搞破壞的說謊者。然後我還對佔領庫朗學院（Courant Institute），想要燒掉我們電腦的暴民很生氣❶。科學上的意見不同並不會惹我生氣，但我認為這個觀點絕對錯誤。我記得哈默斯（Paul Halmos）曾宣稱，應數即使不是壞的數學，至少也是醜陋的數學，但我可以向各位指出，阿貝爾委員會宣布的得獎事蹟正是在於我研究成果的優美。

再回到哈第。當他寫《一個數學家的辯白》（*Apology of a Mathematician*）時已是暮年，不但年歲已大，我記得還心臟病發作，心情很憂鬱。這是應當考慮到的。至於書本身：化學家索迪（Frederick Soddy）對本書有很嚴厲的批評，索迪是同位素的發現者之一，因為和拉塞福（Ernest Rutherford）合作的研究而獲得諾貝爾獎。他看到哈第為他的數學毫無用處而自豪，於是寫道：「他遠離塵世逍遙，無視這世界正在病中。」其實哈第人很好，這樣說他太苛刻了。

我的朋友凱勒（Joe Keller）是很傑出的應用數學家，他有次被問到應數的定義，而他的回答是：「純數是應數的一個分支。」你只要稍微多想一下就知道他是對的。試看，比方說牛頓以後的數學，其原始目的是要解決物理學中非常具體的問題。後來這些主題自行發展，才變成了純數的各個分支，但它們都是來自實用背景。誠如馮諾曼所云，一段時間之後，這些自行發展的純數分支需要藉由新的經驗材料以重獲活力，例如需要某些科學問題、實驗結果，尤其是數值證據。

訪 在數學史上，阿貝爾和迦羅瓦（Évariste Galois）兩位大師堪稱是最早的「純數學家」，他們對任何數學「應用」毫無興趣。然而，阿貝爾卻解決了日後所稱的「阿貝爾積分方程」，而且阿貝爾給出了明確解，附帶一提，這可能是數學史上積分方程第一次被表述和解決。有意思的是，只要經過簡單的重新表述即可看出，阿貝爾積分方程和拉東變換（Radon Transform）是等價的，而後者是現代醫學斷層掃描的數學基礎。像這樣純數結果和定理卻有著出乎意料實際用途的例子，在數學史上屢見不鮮——從迦羅瓦的研究所衍生出的群論是另一個顯例。你對這現象有何看法？深刻和重要的數學理論和定理，是否終究必有實際用途，例如應用到物理科學上？

正如你們所指出的，這經常發生，例如威格納把群論用於量子力學。因為太常發生了，所以絕不是巧合。儘管有人可能會說，那是因為沒有實際用途的理論和定理被人遺忘了，但這現象應該仍值得數學史家去探討。我真的相信數學具有一種神祕的統一性，可以將看似殊異的事物連繫起來，這是數學的榮耀之一。

訪 你曾說洛沙拉摩斯是計算動力學（computational dynamics）的誕生地，我想我們可以說，美國在 1940 年代的戰爭事業推進和加快了這項發展。高速電腦的出現如何改變了做數學的方

法？高速電腦又會對未來的數學扮演怎樣的角色？

電腦扮演了好幾重角色。其中之一我們已在夸斯柯爾和扎布斯基發現孤子的過程中看到，如果沒有數值計算的證據，是不可能發現孤子的。類似情形如費米 / 帕斯塔 / 烏蘭重現現象（Fermi-Pasta-Ulam phenomenon of recurrence）也是很特別的，如果沒有電腦或許就不會發現。這是第一重。

再來還有一重：以往若要得到數值結果，如果是用手算或只用簡單的計算機器，你必須做極大幅度的簡化。至於該做怎樣的極度簡化，則是大部分數學家都不具有的特殊天賦。現在的情形則完全不同了。在你實際做數值計算之前，你不需要把問題放上普洛克路斯特之床（Procrustean bed），把它截肢。我想這可以吸引更多的人到應用數值問題上——你真的可以運用整個理論。它活化了線性代數，否則以研究課題而論，線性代數在 1920 年代已經死了，但是突然之間，執行這些運算的實際演算法變得很重要。其中充滿驚奇，例如快速矩陣乘法（fast matrix multiplication）。在我寫的線性代數課本裡，新版會加入一章專談對稱矩陣固有值（eigenvalue）的數值計算。

因為電腦的速度變快，四十年前要花上一個月計算的問題，現在少則數秒、多則數分鐘就可以算完。許多人，至少是一般大眾，認為計算迅速是因為電腦變快了。但如果你仔細探究會發現，只有一半的原因是電腦變快，另一半則是由於聰明的演算法，而要發明聰明的演算法得靠數學家。所以數學家的參與很重要，而現在他們也確實參與進來了。

訪 可否就你個人的經驗，給我們幾個例子說明來自應用的問題與方法，激發了「純粹」數學的研究和結果？反過來說，你的非線性偏微分方程理論，特別是關於不連續性如何傳播的解釋，是否有商業應用的實例？尤其是石油探勘，這對挪威很重要！

是的，石油探勘是以爆炸產生訊號，訊號通過地層和油藏區域，再由遠處的監測站記錄。這是所謂的逆問題。如果知道物質的密度分布及其相關波速，那就可以計算出訊號是如何傳播的。它的逆問題則是，已經知道訊號如何傳播，然後要推導出物質的分布。因為訊號是不連續的，所以需要不連續性傳播的理論。除此之外，它和醫學成像問題有點類似，那也是逆問題，只不過訊號在此不是穿過地層，而是穿過人體，然而兩者是相似的。無疑你必須很瞭解正面問題，然後才能對付逆問題。

匈牙利數學

訪 再來是一些關於你個人的問題。第一個要問的是，對於你所稱的「輕數學」（Mathematics Light），你有著極大的興趣與天賦來解這類問題。試舉幾個例子，當你 17 歲時，對於一個由艾狄胥（Paul Erdös）所提出、關於早前伯恩斯坦（Sergei Bernstein）所證明的多項式不等式定理的猜想，你給出了一個優美的解答。多年之後，你研究所謂的波利亞函數（Pólya function），它將單位區間連續映入直角三角形，然後你發現了驚奇的可微性質。當你在匈牙利接受初期的數學教育時，解題（problem solving）是否是明確被鼓勵的？這又對你日後的學術生涯產生什麼作用？

是的，解題被認為是激發資優生潛能的君王之路，所以我很高興得知挪威這兒也有一項很成功的高中競試，而且就在今天上午頒獎給優勝者。但是過了一段時間後，你就不該拘泥在解題，而是要拓展出去。不過偶爾我還是會回到解題上。

再回到波利亞函數的可微性。我在 1946 年時上

---

❶ 1970 年 5 月，在肯特州立大學國民兵射殺學生事件之後兩三天，紐約大學一小群師生佔領庫朗學院，以 CDC6600 超級電腦為質，交換黑豹黨之保釋金，事件在幾天後落幕。佔領師生撤走後，拉克斯等人及時撲滅他們引燃的火苗。

布達佩斯鳥瞰。（Attila Terbócs 攝，維基提供）

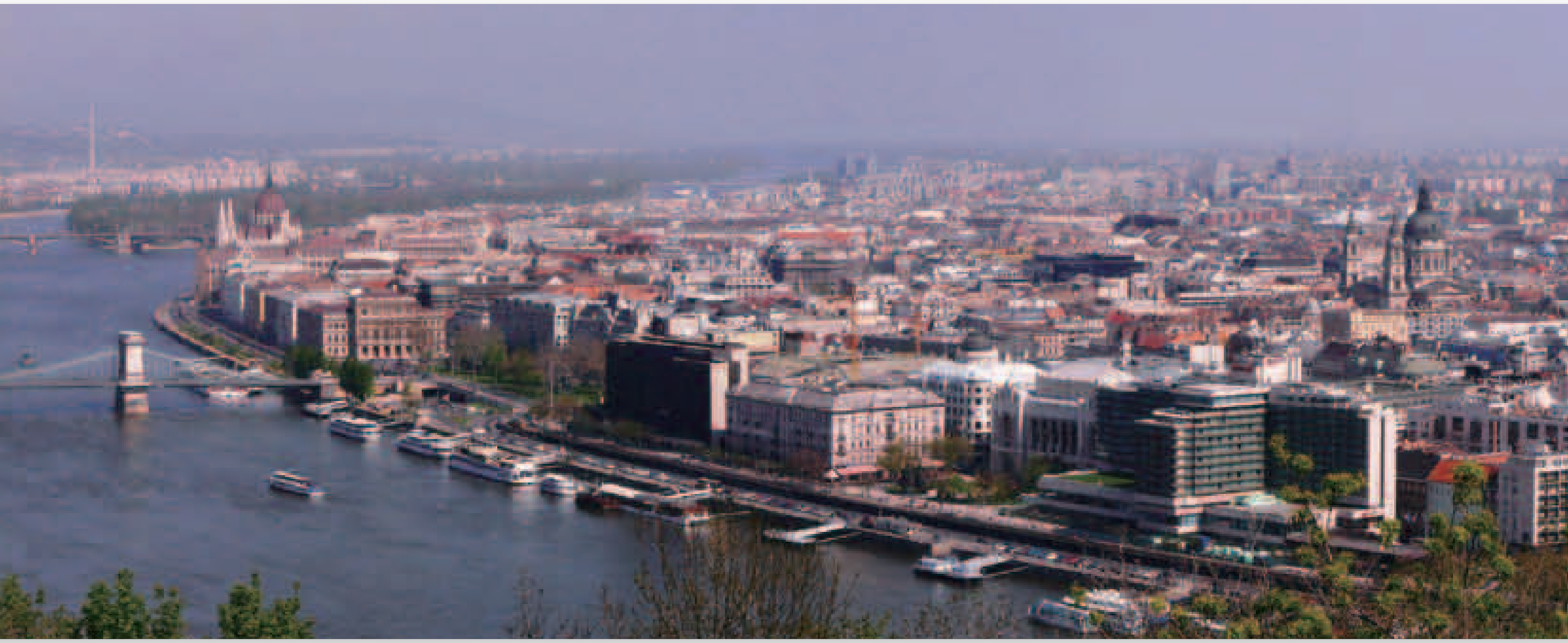
過波利亞（George Pólya）的暑期課程，所以我和他很熟。可微性問題是這麼來的：當時我正在教一門實變的課，我在課堂上舉波利亞的填滿面積曲線（area-filling curve）為例，然後出給學生的作業是證明它處處不可微。結果沒有學生做出來，於是我坐下來自己解，卻發現情形比我預料的更複雜。

匈牙利有個傳統是追求最簡潔的證明。你們應該對艾狄胥「天書」（The Book）的概念很熟悉，那是上帝手中的一本書，記下了所有定理及其最佳的證明。艾狄胥對一個證明的最高讚美，就是說它是出自於那本書。但要小心別做過頭。我在拿到博士學位之後沒多久得知哈恩 / 巴拿赫定理（Hahn-Banach theorem），我想它可以用來證明格林函數（Green's function）的存在性。那是很簡潔的論證——我相信它是最簡潔的——所以它是天書裡的證明。我想我也有布勞爾不動點定理（Brouwer's Fixed Point Theorem）的證明，只用到微積分和變換變數而已。它或許是最簡潔的證明，因此也是天書裡的。我想這一切都是匈牙利傳統的一部分，但你絕對不要做過頭。

訪 匈牙利有相當多具有猶太背景的大物理學家和大數學家，因為法西斯主義、納粹主義和反猶主義在歐洲興起而逃難到美國。你如何解釋匈牙利這種獨特的優異文化，培育了眾多英才，例如像是德海韋西（George de Hevesy）、西拉德、威格納、泰勒、馮諾曼、艾狄胥、塞格（Gábor Szegö）、波利亞，以及你本人？

盧卡奇（John Lukacs）寫過一本很有意思的書，《布達佩斯 1900：一座城市及其文化的歷史畫像》（*Budapest 1900: A Historical Portrait of a City and its Culture*），它記錄了中產階級、商業、工業、科學、文學等的崛起。那是由許多因素促成的：長時期的和平，以猶太人為大宗、從東歐過來尋求發達機會的移民，智識的傳統。你知道，數學家波雅伊（János Bolyai）是匈牙利人的文化英雄，這是為什麼數學特別被視為是光榮的職業。

訪 是誰培育這些繁盛的人才，真是太獨特了？



功勞最大的或許是朱利烏斯・科尼格（Julius König），你們也許沒聽過他的名字。他是克羅涅可（Leopold Kronecker）的學生，但也學過康托（Georg Cantor）的集合論，並對集合論有些基本貢獻，他對數學培育有很大的影響。他的兒子是非常傑出的數學家狄奈許・科尼格（Dénes König），堪稱是現代圖論之父。再舉一例，黎奧波德・費耶爾（Leopold Fejér）的影響力也很巨大。匈牙利是個小國，容納不下那麼多人才，所以才必須移居海外。反猶主義當然也是原因之一。

關於費耶爾的聘任有一則逸聞。他是布達佩斯大學第一位提名的猶太裔教授，反對的聲浪不小。當時在神學院有一位非常傑出的神學家，伊納爵・費耶爾（Ignatius Fejér），他原姓懷斯（Weiss）[1]，所以有位很清楚他原姓氏的反對者尖刻地問道：「你們提名的這位黎奧波德・費耶爾教授，和我們傑出的同事伊納爵・費耶爾神父是親戚嗎？」極力促成此事的大物理學家艾特韋許（Loránd Eötvös）立刻回答：「私生子。」這話題就沒人敢再提。

訪 他得到這職位了？

他得到了。

改變人類歷史的潦草塗寫

訪 數學家烏蘭曾參與曼哈頓計畫，也被認為是氫彈的催生者之一。他在自傳《一位數學家的經歷》（*Adventures of a Mathematician*）裡寫道：「看到在黑板或紙上的潦草塗寫竟然能夠改變人類歷史的發展途徑，即使至今我仍為此驚歎不已。」你是否也有這種感受？你對廣島和長崎的遭遇、對結束二次大戰的原子彈轟炸的罹難者有何感想？

容我先回答後一個問題。當時我在陸軍服役，而我們所有陸軍士兵預定都要被送去太平洋參加日本登陸戰。你記得諾曼地登陸所帶來的慘烈殺戮？如果登陸日本真的發生，諾曼地跟它相比會是小巫見大巫。你記得在沖繩和硫磺島的慘烈殺戮？日本人會戰至最後一兵一卒。原子彈終止了這一切，讓入

[1] Fejér 和 Weiss 分別是匈牙利文與德文的「白色」之意。

侵成為多餘。我不相信翻案派的歷史學者所說的：「日本已經戰敗了，不管怎樣他們都會投降。」我看不到任何支持的證據。還有一點是我曾向某位參與原子彈計畫的人提過的：若不是看到了那顆原子彈所造成的後果，我們的世界會不會發生核子大戰的慘劇？對日本投彈，使得後來全世界抗拒使用核子武器。我並不是說，就因為這一點就可以合理化這次行動，這絕不能構成使用原子彈的理由，但我認為這是一個歷史事實。

現在回到隨手塗寫卻改變歷史的問題：的確，如果沒有隨手的塗塗寫寫，我們很難想像狹義相對論或量子力學怎麼會出現。附帶一提，烏蘭是一位很有意思的數學家，他是充滿想法的人。大部分數學家喜歡把自己的想法貫徹到底，他則偏愛丟出想法。他的好友羅塔（Gian-Carlo Rota）甚至有種說法，認為他沒有自力完成的技術能力或耐性。倘若真是如此，那就是烏蘭能夠把缺點轉化為巨大優點的最佳範例。我從他那兒學到很多。

訪 一個 18 歲的移民在二次大戰期間，能參加一項列為最高機密的重大武器研發計畫，這實在很令人驚訝。

因為情勢緊急。曼哈頓計畫的許多領導者是外國人，所以外國人身分不是障礙。

合作研究、工作風格

訪 你一生主要的工作場所是紐約大學的庫朗數學科學學院（Courant Institute of Mathematical Sciences）。你在 1970 年代擔任院長一職達八年之久。你能否說說，這所由德國難民庫朗（Richard Courant）在 1930 年代創辦的學術機構，為什麼從一開始就是極特殊的研究場所，有著獨特的精神與氣氛？現在的庫朗學院是否仍然是一所有別於他者的學術機構？

烏蘭於 1945 年。（洛沙拉摩斯國家實驗室提供）

先回答你的第一個問題，庫朗的人格當然是決定性的。庫朗看數學的眼界非常廣闊，他對特殊分化抱持懷疑，他希望把範圍畫得愈大愈好，所以應用的課題會和純數學並列在一起探索，而且研究者還常常是同一批人。這使得庫朗學院在創建時就非常特別，而且在 40、50、60 年代依然是。在此之後，開始出現尊重並且願意研究應用數學的研究中心。我可以很高興地說，庫朗學院仍然保有原始的精神。我們研究的應用領域仍然很廣泛；氣象與氣候學由麥達（Andrew Majda）負責，固態和材料科學由孔恩（Robert Kohn）等人負責，還有流體力學。我們也做微分幾何和純數方面的偏微分方程，甚至還有代數。

我對庫朗學院的現況很滿意，它現在已是第三個世代，而當初庫朗所貫注的精神，亦即某種家庭感，也仍然活躍。我很樂於指出，有許多挪威數學家在庫朗學院接受訓練，後來成為各自領域的領導人物。

訪 你已經談過與菲利普斯的合作。整體而言，瀏覽你的著作表以及檢索由你與合作者所命名的定理和方法，明顯可見你和許多數學家合作過。對你而言，像這樣分享想法是否是一種特別成功、而且或許也很愉快的研究方式？

當然當然，數學畢竟是一種社會現象。合作研究是一種心理的、有趣的現象。我有個朋友，強 - 史坦納（Vera John-Steiner）寫了一本這方面的書《創造性合作》（*Creative Collaboration*）。不同的兩人各提供解答的一半，匯合起來就產生了奇妙的東西。

訪 許多數學家在專心對付難題時會有非常特別的工作風格。你會怎麼描述你特有的思考、工作和寫作方式？是偏向嬉戲，或是偏向勤奮？抑或兩者兼而有之？

菲利普斯認為我很懶。他是大蕭條時代的產物，會給人施加某種嚴格的紀律。他認為我的努力還不夠，但我已經很努力了！

訪 有時候，數學洞見似乎得依賴突如其來的靈感，在你的生涯中是否有這類的例子？你認為這種天外靈感的背景是什麼？

這問題讓我想起一個關於德國數學家蕭特基（Friedrich Schottky）的故事。當他 70 或 80 歲時，他們為他辦了慶祝會，然後就像我們現在這樣，也做了一次訪問。他被問到：「你把你的創造力和生產力歸功於什麼？」這問題讓他極為困惑，最後他說：「各位先生，一個人如果一直思考數學，50 年下來一定會想出點東西吧！」

希爾伯特的故事又不一樣了，這是我從庫朗那兒聽來的。場合類似，在他的 70 歲壽宴，他們問他為何能有那麼高度的創造力和原創性。他立刻就回答：「這都是因為我的記憶力很糟糕。」因為記不住，他得把每樣東西都重新建構起來，造出來的又變成了不一樣的東西，而且還更好。我能說的大概就這些，我是介於兩種極端之間。附帶一提，我的記憶力很好。

教書

訪 你也曾參與微積分教學，例如你和夫人安娜莉（Anneli）合寫過一本微積分教科書。由於這個因緣，你曾對微積分的入門課程該怎麼教，表示過強烈的意見，能否請你在此詳談？

我們的微積分教科書非常失敗，儘管裡面有很多不錯的想法。失敗的部分原因是有些材料的呈現方式，不是學生能夠吸收的。微積分課本必須仔細微調，但我沒這個耐性。安娜莉會願意去做，但恐怕我對她太霸道。有時我會想重寫，因為其中以及之後的想法，都還是對的[1]。當然後來有了一場微積分改革運動，產生一些不錯的書，但我認為它們仍不是解答。首先，這些書都太厚了，往往超過 1000 頁。把這樣的書交到不疑有他的學生手中是不公平的，他們才勉強拿得動書而已，然後反應會是：「天啊！書裡面的東西我全都要學？」嗯，還有很多不在裡面呢！其次，如果你把它跟舊的標準本，比方說 Thomas[2]，相比較，差別其實不大——大概就主題和觀念的順序吧。

在我的微積分書裡，舉個例子，我教的不是點連續，而是一致連續（uniform continuity）。比起先定義在一點的連續，然後說函數是逐點連續，這樣解釋起來要簡單多了。點連續會讓學生聽不懂，它的量詞（quantifier）太多了。但是數學界非常保守：「連續是逐點定義的，所以就該這麼定義！」

紐約大學庫朗學院。（維基提供）

[1] 2014 年，拉克斯出版了第二版的 *Calculus With Applications*，只是合作者換成 Maria Terrell。

[2] Thoms 是大家對 MIT 數學教授 George B. Thomas, Jr. 知名的微積分教科書的簡稱，此書自從 1952 年發行第一版，到現在已經是第 13 版。

阿貝爾獎在奧斯陸大學禮堂（Aula）中頒獎，這是禮堂所在廣場前的大街，近景的旗幟是阿貝爾獎的標誌。（Eirik Furu Baardsen 攝，挪威科學與文學院提供）

另外還有些是我想強調的：這些新課本固然有應用實例，但應用應該要突顯出來。在我的書裡有幾章是專談應用的，本就應該如此，應用該被顯著強調才對。我還有很多別的想法，我仍想要重寫我的微積分課本，一直在尋找好的合作者。我最近遇到有人對原版本表示仰慕之意，所以如果體力允許，這個願望或許能實現。我還有些別的事要做，例如《線性代數》的第二版，還有修訂一些關於雙曲型方程（hyperbolic equation）的舊講義。但即使我能找到微積分課本的合作者，真的有人願意出版嗎？還很難說。1873 年時戴德金（Richard Dedekind）提出一個重要問題：「實數是什麼，而且它應該是什麼？」不幸的是對微積分學生而言，他給出的答案是錯的。正確答案是：無窮「小數」（infinidecimal）[1]。我不知道這個笑話會被怎麼寫進歷史。

掌理大型機構

訪 你有好幾次掌理大型組織的經歷，像是 1972-1980 年任庫朗學院的院長，1977-1980 年任美國數學學會主席，1980-1986 年擔任國家科學委員會（National Science Board）委員，期間主持所謂的拉克斯小組（Lax Panel）。能否告訴我們你在這些任期裡所做的重大決策？

數學學會主席只是個虛銜，主席的影響力在於指派委員會成員，廣闊的朋友圈和合理的判斷力會很有用。學會秘書皮徹爾（A. Everett Pitcher）對我的幫助極大。

至於庫朗學院院長，我上任的時間是紐約大學最糟的時刻。他們剛關掉了工學院，所以工學院的數學家得要轉到庫朗學院，當時史瓦茲（Jack Schwartz）才剛在庫朗成立計算機科學系。有一群工程師想要做資訊學（informatics），那是工程師對計算機科學的稱呼。身為院長，我很努力阻止此事發生，我覺得一所學校有兩個計算機系是很不好的事——對我們的計算機科學系必然會很糟糕。其他的事：在丘靈（Alexander Chorin）的推薦下，我極力促成了學院聘請佩斯金（Charlie Peskin），同樣在孔恩的推薦下，聘請了卡佩爾（Sylvain Cappell），兩者都很成功。至於我的失敗？或許在計算機科學系成立時，我該堅持很高的聘用標準。當時我們需要有人來教課，但如今回顧，我們在招人時應該更節制。我們是有機會成為排名第一的計算機科學系的。現在的素質已大幅改善，我們有一位很棒的系主任——萊特（Margaret Wright）。

在國家科學委員會的期間是我最愉快的行政

經驗。它是國家科學基金會（National Science Foundation, NSF）的決策組織，所以我學到制定政策是怎麼回事。大多數時間你只要點頭表示「可」，少數幾次說「不可」。然後有時則會出現機會窗口，拉克斯小組就是抓住這種機會的產物。瞧，從我自己以及對大型運算有興趣的朋友的經驗中，我注意大學運算資源的匱乏，特別是賈加畢迪恩（Paul Garabedian）常抱怨學校的計算機科學家沒辦法使用超級電腦。只有政府才有足夠經費購買超級電腦，但從某個時間點開始，政府不再把超級電腦放在大學校園，而是放到國家實驗室或是工業實驗室。除非你剛好有個合作做研究的朋友在那些單位，否則你無從使用超級電腦。從推動計算科學發展的觀點在看，這非常糟糕，因為天分最好的人是在大學裡。幸好當時有 ARPANET，也就是網際網路的前身，於是有了從遠端存取和計算的能力。所以我成立的研究小組強烈建議國科會建立多所計算機中心，他們照做了。要評述我們的成就，請容我改寫愛默生（Ralph W. Emerson）的一句話：「遲到十年的理念，其威力是無人能阻擋的。」

訪 美國的許多數學研究是由國防部、能源部、原子能委員會、國家安全局資助的。這種依賴關係是否是互利的？是否有潛在危險？

恐怕我們現在的領導人再也不能察覺科學活力與技術精巧之間微妙但緊密的連繫。

個人嗜好

訪 可否談一談你在數學之外的興趣和嗜好？

我愛詩歌。匈牙利詩歌分外優美，但英詩或許更美。我也喜歡打網球，不過現在我的膝蓋不太穩，再也跑不動了，或許可以換成人工關節，但我還沒走到這一步。我的兒子和三個孫子也都熱愛網球，所以我可以跟他們玩雙打。我喜歡閱讀，我有寫作天分，可惜如今我寫的都是追悼文——話說回來，寫追悼文總比被寫好。

訪 你還寫俳句？

對的。這想法來自史東（Marshall Stone）的一篇好文章——我已經忘了明確出處——他在文章裡說，數學語言是高度精煉的語言，就像俳句。於是我想，或許我還可以更進一步，真的用俳句來表達數學概念。

訪 拉克斯教授，非常感謝你接受訪問，我們代表挪威、丹麥和歐洲數學學會向你致謝！

我也謝謝你們。∞

本文出處

訪談時間是 2005 年 5 月 23 日阿貝爾獎慶祝儀式之前，地點為挪威奧斯陸。本文刊登於歐洲數學學會 *EMS Newsletter*, Sep.（2005）；也曾刊登於丹麥數學學會會報 *Matilde*, Apr.（2006）。

譯者簡介

趙學信，網路工程師，專事翻譯、寫作。

延伸閱讀

▶ 2005 阿貝爾獎得主網頁。該年活動，包括本次訪談的錄影：

http://www.abelprize.no/c57575/seksjon/vis.html?tid=58729

得獎者之事蹟與研究介紹：

http://www.abelprize.no/c53864/seksjon/vis.html?tid=53872

▶ 拉克斯口述史網頁。這是工業與應用數學學會（SIAM）的「數值分析與科學計算網頁」計畫的口述史訪談，和本文側重點不同，可相互參考。

http://history.siam.org/oralhistories/lax.htm

▶ “Science Lives: Peter Lax”，西蒙斯基金會專題網頁。包括 2010 年 Robert Kohn 訪談的錄影，以及 2014 年 Reuben Hersh 的介紹文章。

https://www.simonsfoundation.org/science_lives_video/peter-lax/

▶ Hersh, R, *Peter Lax: Mathematician: An Illustrated Memoir*（2015）AMS。

❶ infinidecimal 是以文字開 infinitesimal（無窮小）的玩笑。要理解實數只要無窮小數就夠了，而不是詰屈聱牙的無窮小語言。