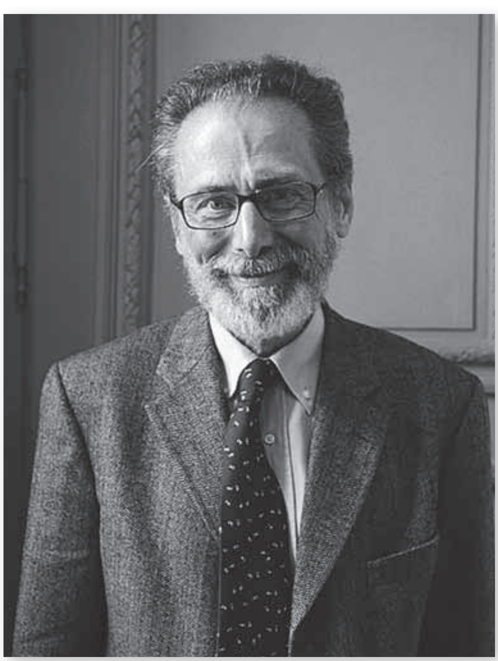
學生的成就是我數學生涯的真正意義

訪談：普松 Ulf Persson　譯者：周樹靜

2010 年高斯獎得主梅耶爾訪談

受訪者簡介：伊夫．梅耶爾（Yves Meyer）法國高等師範學校畢業，在無人指導的情況下，於法國史特拉斯堡完成博士論文，曾任職或訪問許多學校，現任職於法國卡尚高等師範學校。2010 年 8 月 19 日，在印度世界數學家大會上，梅耶爾獲頒第二屆高斯獎，頒獎委員會稱譽他「對數論、算子論、調和分析有基本貢獻，並在小波與多解析度分析的發展扮演關鍵角色。」梅耶爾所跨越的領域至少包含：準晶體、卡得隆 / 齊格曼綱領、小波、納維爾 / 史托克斯方程。

訪談者簡介：普松是瑞典查默斯科技大學（Chalmers tekniska högskola）與哥德堡大學（Göteborgs universitet）數學系教授，*Medlemsutskicket* 編輯。



梅耶爾（IMU 提供）

訪　法國有一個菁英教育系統，尤其是數學，請談談它的優缺點。

自有費爾茲獎以來，法國得獎者除了格羅騰迪克（Alexander Grothendieck）之外，全部出自巴黎高等師範學校（École Normale Supérieure，簡稱 ENS 或 ENS-Ulm）的畢業校友[1]，這是無法忽視的事實。在法國還有幾所高等師範（Écoles Normales），像我現在任職的卡尚高等師範學校（École normale supérieure de Cachan，簡稱 ENS-Cachan），就沒有巴黎高等師範那麼傑出，主要的數學研究方向是應用數學。在法國，應用數學地位不如純數學，科技不如科學。這項主題我們會通篇見到。

ENS-Ulm 和美國哈佛、普林斯頓之類學府的主

要差異，在於 ENS-Ulm 的入學考之前，你已經要受過兩年非常強力的數學和物理訓練。在 ENS-Ulm 中還有別的選擇像是生物或人文，不過他們的入學試題完全不一樣。這是和美國大學的主要差異，你在進校時，已經選擇了研究的知識領域。一旦進入 ENS-Ulm，你知道自己肯定必須放棄財富與權勢，這是人生的選擇，你這一生將奉獻於知識的取得與傳播。我 1947 年進入 ENS-Ulm 時，只有 40 位科學生與 37 位人文生取得入學許可。ENS-Ulm 的入學考試競爭非常激烈，我的許多同學被期許要成為高中教師，我後面會說明為何那個年代會認為當高中教師很值得。另外我們之中最聰明的幾位，則也參與研究工作。

窄門中的窄門。左為法國高等師範學校的烏姆路入口，右為法國綜合工科學校的巴黎路入口（維基提供）

1789 年之後，法國菁英教育系統很快就被設計出來以對抗法國貴族的豪奢特權，這正是法國大革命的目標。不過在描述法國的菁英系統之前，我得強調這只適用於高等教育極少的部份。法國的高中並沒有什麼競爭性，高中結束時有場考試稱為「會考」（baccalauréat），這項考試很簡單，因為大概 80% 的學生會通過。而且擁有會考證書的年輕人都可以進入他選擇的大學。不過最好的學生並不進大學，而是轉讀醫科或菁英學校的預備班。進大學不用繳學費，但是我們的免試入學系統其實很偽善，因為一半的大學生在大一就會退學離開。這種事在法國很典型，這個國家空有高貴的理想，管理卻很拙劣，沒人注意實務的細節。

比起這個鬆垮的系統，醫科和工科在法國就很競爭。在法國有 200 多家工科學校，大部分都和大學沒有關係。醫科雖然是大學內的課程，但卻遵循完全不同的規則，有嚴格的人數限制。在第一年的考試後，約有 4,000 到 8,000 名學生可以進入醫科，人數依市場需求而變動。法國的菁英學校還包括國家行政學校（École Nationale d'Administration），以及一些商科或管理學校如高等商學研究學校（Hautes Études Commerciales）。能進入這些菁英學校的學生大概佔大學生的十分之一。想要進入菁英學校，你得願意忍受在會考之後還要密集訓練兩三年。這段訓練期稱為「高等學校預科班」（Classes de Préparation aux Grandes Écoles）。在預科班結束時，你得選擇一門考試，一旦通過，就可以進入相應的菁英學校。在科學方面，九成的預科生會進入工科學校。失敗的考生則可轉到大學，直接就讀大二或大三。

複製菁英

法國菁英系統是民主制，以嚴格的匿名筆試為其基礎。考生要編號，閱卷教授不知道考生的姓名。選拔有天分考生的過程絕對公平，不容任何偏袒介入。不過現在這個系統遭受許多批評，罪名是它造就了另一類菁英。這些評論是基於下面的事實，考

❶ 譯註：在烏姆路的巴黎高等師範學校（École Normale Supérieure de la rue d'Ulm），法國高等師範中最傑出的學校，不特別指明地點時即指本校。

生的家庭扮演了很重要的心理角色，協助考生接受進入菁英學校所需的密集訓練。不過法國菁英系統的批判者，搞混了社經地位與智識程度。當他們定義何謂菁英時，會將薪水微薄的小學老師也視為菁英階層，這當然很荒謬。如果有些父母對小孩要求很高，就會被目為具有優勢。

我要回頭談談法國高中的情況，讓我從數據開始。1957 年時，只有 9,500 位男女生通過科學會考，會考是高中畢業時的考試，也是進入大學的入場券。這個數量無法滿足已開發國家的需求，於是 1959 年戴高樂將軍（Général de Gaulle）下令重整法國的高中。戴高樂的改革成功了，因為現在這個數量高達 146,300 人，這很好，即使科學會考的程度大不如 1957 年時。1959 年之前，11 歲的孩子進高中必須考試，成功與否家庭扮演重要的角色。在今天，高中開始的時間延後到 15 歲，幾乎完全免試入學，這解釋為何通過科學會考的數字會從 9,500 提高到 146,300。

成功必須付出代價。壞消息是這樣的：進高中之前，所有 11 到 15 歲的法國小孩要接受完全一致的初中教育（Collège d'Enseignement Secondaire）。和德國或美國不同的是，法國人總是要建立完全平等主義制（egalitarian）的教育系統。法國初中教育由貝杜安（Jean Berthoin）擘建於 1959 年（戴高樂正好在 1958 年底就任法國總統），並在 1963 年與 1975 年修正過。初中教育的目標是為所有小孩提供基礎教育，讓他們最終可以決定未來的方向。在初中之後，這些青少年可以進入傳統的高中（普通教育）、職業高中，或開始職業訓練。不過初中教育是法國教育系統問題最嚴重的階段，到 15 歲都接受完全相同教育的小孩，事實上已經發展非常不同的興趣和技能。許多小孩只覺得課程太無聊，甚至產生暴力傾向。初中教育對「技術」不重視，在法國教育裡技術沒有受到值得的重視。

我要特別提及一項非凡的舉措，法國物理諾貝爾獎得主夏帕克（Georges Charpak）為促進小孩對科學和技術興趣，發起了「動手做」（la main à la pâte，直譯為「動手揉麵糰」）的計畫，試圖改革法國小學的科學教育，這項計畫受到法國科學院的支持。物理學家葛赫（Yves Quéré）這樣定義「動手做」：

> 整個想法奠基於一項簡單的優先考慮——用科學支持學生的智力發展。這表示要持續教導他們質疑的習慣、觀察的意識、智識的嚴格性、實際應用推理、面對事實的謙遜、分辨真假的能力、堅持於符合邏輯與精確的語言等等。瑞典學院（Swedish Academy）和其他機構都不約而同的走上類似的道路。

我要強調，「動手做」並不是教育的菁英路線。恰恰相反，事實上它是起源於芝加哥黑人社區的成功教學法。不過在「動手做」計畫裡並不包含數學，官方說法是法國的數學教學很注重細節與效率。

費爾茲獎得主拉弗格（Laurent Lafforgue）曾經仔細分析法國教育的缺失，結論是這得歸因於法國政府缺乏勇氣與野心。他論證說一個世紀前，法國學校系統對尚無準備進小學的小孩的成就還比較大，當時大部分小孩連法文都不會說。事實在 19 世紀早期，這個國家充斥著方言與其他語言。

依照拉弗格的觀點，法國教育是病入膏肓。現在法國所採用的廉價花招，是在初中教育的這個關鍵時期，將教育的水準調整到讓平均的小孩可以無痛苦學習，老師也不太過要求。影響所及，是高中教育的惡化，這種病症已經從初中逐漸傳播到高中。我們的初中教育根本無法達成它的野心目標，然後每四年新科教育部長上任，只會提個漂亮點子想要解決這些問題。在我們的強力中央集權組織裡，根本不允許學校針對就學學生的需求更動教學內容。

法國高中教育程度降低的結果就是，進入菁英學校所需的智識程度，比五十年前更加倚賴於家庭的培育。法國社會學家布赫迪厄（Pierre Bourdieu）

認為法國教育體系導致「複製菁英」的批評絕對公允。不過，做出如此批評的布赫迪厄的門徒，卻正是支持目前初中教育的人。這是一個惡性循環。

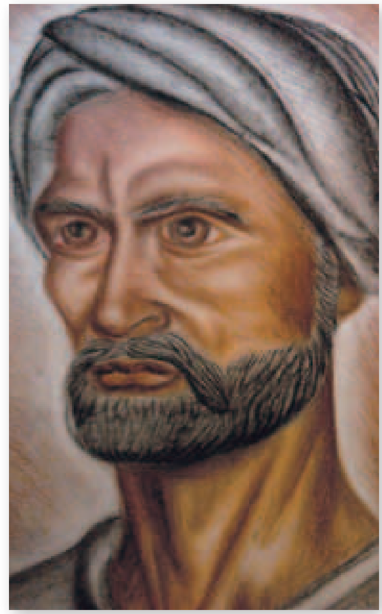
前述的問題並不只對法國有影響。就數學而言，一項聯合國教科文組織（UNESCO）的計畫已經針對小孩學校成就中「家蔭教育」（shadow education）[1] 的角色進行理解。家蔭教育指的是小孩從家庭所獲得的智識訓練，這個課題的專家是數學家阿達德（Georges Haddad，g.haddad@unesco.org）。

重建法國教育的文化基礎

這些嚴重的困難，不能只是為了平等主義去壓制 ENS-Ulm 而獲得解決。這就像是廢除哈佛大學或普林斯頓大學一樣的災難。在法國性別或種族的保障名額是非法的。有很長一段時間，高等師範學院曾分成男生部和女生部，但是現在兩者已經合併，結果女生的人數相較於 50 年前，已經掉到四分之一。這也很不幸。

法國教育倚賴某些智識與道德的傳統，就和所有國家一樣。如果你不接受蒙田的懷疑論、不懂笛卡兒的哲學、不理解伏爾泰在十八世紀針對宗教過高權力的對抗，你就不能完整了解法國。這些曾經形塑法國的道德與智識價值，到了 21 世紀對許多青少年已經沒有意義。更何況這些價值受到我們的一些新移民的質疑，他們不願意接受這些看似文化帝國主義的東西。

我們需要建立新人本主義，將法國的道德與智識價值，與猶太和伊斯蘭傳統結合起來。我在學校時期從未聽過杜魯瓦的拉什（Rachi de Troyes，1040-1105）[2]。我在突尼斯上中學時，從未聽過赫勒敦（Ibn Khaldoun），這真是令人遺憾，因為他 1332 年出生於突尼斯，是中世紀伊斯蘭主要的大學問家之一。法國已經準備承認拉什與赫勒敦賜與我們的恩澤了嗎？歐洲已經準備承認我們承繼了光輝的伊斯蘭文化了嗎？想要再造法國，這樣的和解是當務之急。



伊斯蘭大學問家赫勒敦。（維基提供）

法國菁英教育系統有非常嚴重的缺點，我在此舉一個例子。1976 年至 1986 年間，我在綜合工科學校（École Polytechnique）教書，這個學校是法國菁英學校的原型。大部分綜合工科學校的學生期待未來成為重要公司的老闆。1981 年，我在一堂課上，提起法國在科學與技術上將遭遇的挑戰，我將這項激切的訊息傳達給全班 460 位學生，結果他們大聲爆笑，讓我中斷講課，無語而尷尬。一位坐在第一排的學生站起來，告訴我：「如果我們在職涯中碰到技術上必須解決的困難，我們會從中央理工學校（École Centrale，排名稍落後的工科學校）聘一名工程師來處理。我們生來就是要命令別人的。」

我們又回到法國貴族那種荒謬的特權，法國工科學校之間的階層非常僵硬，這說明了綜合工科學校學生傲慢的態度。但這樣的階層也存在美國最好的大學之間， 而且自從上海交大的世界大學排名出現後，現在全世界大學也在分高低。但是在美國，

[1] 譯註：直譯為「蔭影教育」，指私人教育的各種授課方式，包括家教、補習。

[2] 譯註：拉什法文名為 Rabbi Shlomo ben Itzhak HaTzarfati，Rachi（英文作 Rashi）是他名字的縮寫。他是中世紀的拉比，生卒於法國杜魯瓦地區，因詳註《塔木德》與希伯來聖經《塔納赫》而影響遠及後世。

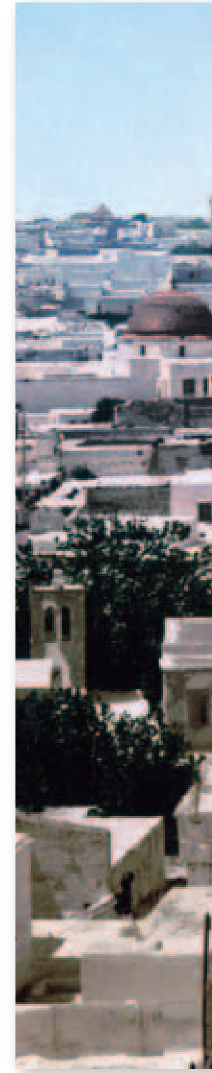
菁英態度很快就會被自己的工作評價所補償，並不仰仗你的大學學歷。不過在法國，你的職業會終生被你 20 歲的表現所宰制。在法國，你的人生很少有第二次機會。有些人試圖改變這種僵硬的態度。在今天，傳統的科學菁英學校階級已經受到偏重管理與金融的新學校所挑戰。這表示綜合工科學校可能終究會失去特權，被迫適應新環境。

訪 就我所知，你第一個職業是教師。職涯的開端不是受到高度期待的研究工作，對你而言這是項優點嗎？

想要了解我的職涯為何從教師開始，必須回顧 1950 年代晚期時我的國家的狀態。當時的阿爾及利亞，恐怖的戰爭正橫行無阻，法國軍隊用酷刑和汽油彈回應阿爾及利亞國家主義者的合法請求。所有的法國年青人都必須徵召入伍，除非你是研究生。也就是說，攻讀博士學位是迴避軍隊徵召最廉價的訣竅，不然你就會被迫參與一場殘忍又不義的戰爭。

我能夠宣稱我當時根本不存在的研究，重要到國家必須豁免我的義務嗎？不行，當然不行！為了迴避徵召去讀博士班，就像為了錢財和某個女人結婚一樣。我想和我的研究談戀愛，而不是取巧的利用研究謀求特權。所以我向軍方坦承我並沒有在準備博士論文，這項決定讓我覺得我和同年齡的同伴團結在一起。現在看起來還挺天真的。結果我被徵召了。我要求到軍校教書，這是受軍方鼓勵的決定，是一種服兵役的方式。

他們把我送到拉弗萊什軍事中學（Prytanée Militaire de La Flèche），拉弗萊什是位於巴黎西南方約兩百英里處的小城。這個學校曾經由耶穌會治理，法國哲學家笛卡兒曾在此就讀。現在這所高中隸屬於軍方，當時這所學校負責教育在阿爾及利亞與德國服役軍官的兒子。德國當時被分為四個佔領區，法國掌管其中一區。我在這所學校教了三年書，其中包含兩年的兵役。當然我沒額外受薪，這就是軍方喜歡這樣安排的原因。那時我 21 歲，我的學生約 17、18 歲，他們和家人分開，深獲我的同情，很多學生後來成為職業數學家，如今都是我的朋友。1962 年 6 月到 9 月間，我終究被短暫送往阿爾及利亞，幸好我抵達的地方戰事已經結束。這段期間是暑假，我的缺席對學生影響不大。



我的教學法曾經被真正有經驗的專家（總督學，Inspecteurs Généraux）評鑑過兩次，這些專家說我不是好老師，高中層級的好老師必須比我更講究教法、更有組織，這些總督學勸我申請大學。此外，我的教學還有別的問題，由於全班小孩幾乎總是錯，只有我永遠是對的，讓我終究覺得遺憾。就某種意義來說，我需要感受到我學生所忍受的學習痛苦。做研究意味著我大部分時間都是無知的，經常會犯下我批改學生作業時所批評那種錯誤。蘇格拉底說的很明白，他需要和朋友討論才能發現真理，真理對他而言從來不是天賜的禮物；真理需要透過集體的努力才能闡明。但這不是我當時教書的方式，而是日後我即將與研究生工作的方法。1963 年，我申請史特拉斯堡大學（Université de Strasbourg）的助教職。當時我 24 歲，在那裡完成了博士論文。

高中的教書經驗形塑了我的整個人生，讓我理解分享比擁有更令人快樂。如果我讀到一本好小說，會想和他人分享那份愉悅。而指導博士論文更幾乎總是收穫豐盛的經驗，這意味著我會給予博士生我最優秀的部分，我總是希望他或她最終會成為比我更好的數學家，我的 50 位博士生中有相當多這樣的例子，像波納米（Aline Bonami）就是我的第一個研究生。我和以前的學生保持非常深厚的聯繫，就像家人一樣。

1890 年的突尼西亞。（維基提供）

以高中老師作為職涯的開端不應該被視為典型，因為 60 年代早期的人力市場遠比現在開放，當我決定要轉換到大學時，馬上就找到講師的職位。

訪 你在數學的不同領域中來去自如，做數學有囚陷於狹窄子領域的危險或者像許多職業數學家困擾於失去靈感的問題嗎？

就像拉馬尚德朗（R. Ramachandran）所引用的，我曾說過：「只要你對某個理論已經遊刃有餘，就放棄它吧！」這話聽起來很傲慢，需要更審慎的解釋我轉換研究方向的過程。比起在數學中找到「家」的同僚，我並沒有比較聰明。我幾度轉換方向，總是像游牧民族一樣，我無法忍受待在一個數學系超過十年，我從史特拉斯堡轉到奧賽（Orsay，即巴黎第十一大學）、綜合工科學校、巴黎達芬尼大學（Paris-Dauphine，即巴黎第九大學），最後是卡尚高等師範學校。另外我也曾在南特大學（University of Nantes）待過兩年。我異動的原因，並不是因為和系主任處不好，也不是獲得更好的工作機會。我會移動是因為我停不下來，就好像某種病症一樣。我對大學沒有歸屬感，因而得忍受這種無法停駐的傾向。

我在突尼西亞的突尼斯長大。在 50 年代，突尼斯是一個可以和義大利的迪里耶斯提（Trieste，或譯的港）並比的城市。那是史維渥（Italo Svevo）、薩巴（Umberto Saba）、馬格里斯（Claudio Magris）的迪里耶斯提，也是魏斯（Eduardo Weiss）的迪里耶斯提 ❶，是一座奧地利的影響哺育了義大利文學的城市。我童年的突尼斯是一座熔爐，地中海周邊的人安適的流放地。義大利人、馬爾他人、賽法迪猶太人（Sephardim）、巴巴里人（Berbers）、阿拉伯人和法國人在此混居相安。我童年醉心於跨越這些不同種族的邊界，卻受限於對於突尼斯街上各種口說語言的無知。我十七歲時才回到法國，我並不算道地的法國人。由於無法容忍阿爾及利亞戰爭中法國的立場，大我一歲的姐姐畢業後就搬到摩洛哥去。本來合理的選擇是突尼斯，不過當時突尼西亞總統布爾吉巴（Habib Bourguiba）與法國戴哥樂總統，正為突尼西亞的海軍要港比塞大（Bizerte）爆發一場荒謬又血腥的衝突，雙方的合作協定因而取消。這就是我姐姐前往摩洛哥的原因，她終生留在那裡教書，說著阿拉伯語。

當我訪問西班牙時，我覺得自己像西班牙人，我理解他們的語言、文學，以及可怕的西班牙內戰史。當我在馬德里，我讀西班牙《國家報》（*El País*），在美國我就看《紐約時報》。在我的職涯中，我總是想要試圖跨越界線。當我轉移到新數學系時，人就很興奮，因為遷移可以認識新同事，我們可以一起進行嶄新的研究主題。例如當我任職於巴黎綜合工科學校時，古拉維齊（Charles Goulaouic）鼓勵我從調和分析（harmonic analysis）轉到偏微分方程。我在偏微分方程研究影響的副產品，就是 Jean-Michel Bony 發展的仿微分算子論（paradifferential operator）❷。

游牧般的研究遷徙

我任職於巴黎達芬尼大學時，開始與皮耶路易·黎翁（Pierre-Louis Lions）令人興奮的合作，我們證明了一個「散度 / 旋度引理」（div-curl lemma）。過程是這樣的，皮耶路易到我研究室問我這個敘述是否正確：假設向量場$B(x)$、$E(x)$屬於 $L^2(\mathbb{R}^n)$，如果$E(x)$無散度，$B(x)$無旋度，則其逐點內積 $E(x)\cdot B(x)$ 必屬於$\mathcal{H}^1$。我回答他，「不，不可能對，不然我早就知道了。」皮耶路易對我的傲慢很驚訝。於是我花了整晚思考這個問題，隔天早上就證明出來了。皮耶路易很有想法，我則用技術能力來配合。我和寇依夫曼（Ronald Coifman）、卡得隆（Alberto Calderón）的合作經驗也類似，他們有很美妙的看法，我像小孩一樣著迷，他們就像夜空中的星辰指引我，然後我就辛勤工作，證明他們夢想的結果。這些故事和我寫博士論文的方式矛盾，因為我並沒有論文指導老師。我這個人真是充滿矛盾。

關於轉換方向，我還有一些滿懷回憶的例子。1972 年，我訪問以色列耶路薩冷的希伯來大學，本來我想合作的人是卡茲奈爾森（Yitzhak Katznelson），但當時他患有嚴重的頭疼，所以我換與班傑明·魏斯（Benjamin Weiss）討論。我們遵循歐恩斯坦（Donald Ornstein）所開創的研究路線，證明了里斯乘積（Riesz product）就是白努利移位（Bernoulli shift）。以 3 的冪次所構造的里斯乘積是圓群上的特別機率測度，對於映射 $x\mapsto 3x$ 是遍歷的（ergodic）。遍歷性很容易驗證，班傑明和我證明這個遍歷系統同構於白努利移位。當我剛開始這項工作時，對遍歷論幾乎一無所知。我們借用了卡茲奈爾森研究 n 維環面自同構（automorphism）的方法。班傑明和我沒有發表這項結果，我遺憾至今。這個例子顯示我研究方法的特性——深潛入水，不畏逆流而游。不過這樣做的

前提是，你必須和一位該領域的專家合作，絕對不要自己悶頭苦幹。不然，你能得到的最好結果就是「重新發明車輪」。在這項研究，我帶入調和分析的經驗，而他提供了對遍歷論的深刻理解。

類似的經驗發生在 1974 年 6 月，圭多．魏斯（Guido Weiss）邀我訪問美國密蘇里州的聖路易華盛頓大學，我本來期待和他工作，但是那時他正忙於華盛頓大學的困難決策。結果寇依夫曼在我到訪首日走進我研究室，說我們應該研究卡得隆猜想。我那時並不清楚何謂奇異積分算子（singular integral operator），也完全不知道卡得隆的研究綱領，但是我同意了。在我兩個月的訪問期間，我們日以繼夜的工作，最後終於證明第二交換子的有界性（boundedness of the second commutator）。這項引人注目的進展，費夫曼（Charles Fefferman）隨即就在該年溫哥華世界數學家大會（1974 年 8 月）的一小時大會演講中宣布。隨後我們再花了七年多，才完成整個卡得隆猜想的證明。

小波和流體方程

接下來，我要回到解決小波（wavelet）問題的經過，這是個很奇怪的故事。在我任教的綜合工科學校，數學家和數學物理學家共用一台影印機。有位物理學家拉司庫（Jean Lascoux）把收到的所有論文都要影印一份。如果你想影印，得等到他印完才行。我從未不耐煩，反而樂於趁他忙於影印那一大堆論文時和他討論。有一回，他說「依夫，我很確定這個預印本你會有興趣。」那就是葛羅斯曼 / 莫雷的第一篇小波論文。我馬上認出卡得隆的再生公式（reproducing identity），但我真不相信它和信號處理（signal processing）有關。我立即搭上前往馬賽的第一班火車，在那裡我結識了朵畢希（Ingrid Daubechies）、葛羅斯曼（Alex Grossmann）、莫雷（Jean Morlet）。這整件事很夢幻，那是 1984 年，我馬上愛上信號處理，覺得像是回到家鄉，這就是我一直想要做的事。

我轉而研究納維爾 / 史托克斯方程（Navier-Stokes equations）是十年後的事，起因於賈克路易．黎翁（Jacques-Louis Lions，皮耶路易的父親）的要求。當時我還在研究小波，費得布希（Paul Federbush）發表了一篇文章，挑釁的標題是〈當納維爾和史托克斯遇到小波〉（Navier and Stokes meet the wavelets）。納維爾 / 史托克斯方程是主導流體力學的方程，賈克路易對於這篇文章的標題和內容都感到迷惑和困擾，他詢問我關於小波與納維爾 / 史托克斯方程解法的相關性的意見。我對這個主題毫無經驗，幸好坎農（Marco Cannone）來訪，他是策奇納尼（Carlo Cercignani）的學生。坎農在米蘭受過非線性偏微分方程的訓練，在他的協助下，我開始理解費得布希在想什麼。

正如我想的，費得布希的文章和小波其實毫不相干，傳統的里特伍德 / 佩利（Littlewood-Paley）方法還更成功。我和坎農繼續研究，後來普隆夐（Fabrice Planchon）也加入。我們在有振盪的起始條件下，證明了加藤解（Kato solution）的存在。三維納維爾 / 史托克斯方程的加藤解，在時間方向是連續的，其值落在 $L^3(\mathbb{R}^3)$ 中。這個結果完全出乎意料，因為這表示只要初始速度有足夠的振盪性，任意大的初始速度都會有大域解，其中振盪性是用貝索夫範數（Besov norm）來量度，這比 L^3 範數要弱得多。前面提到的加藤，就是後面談到卡得隆猜想時還會提到的加藤敏夫（Tosio Kato）。這個問題在此方向上最好的結果，最後被寇克（Herbert Koch）與塔塔魯（Daniel Tataru）所解決，另外，勒馬利盧瑟（Pierre-Gilles Lemarié-

---

❶ 譯註：前三位是義大利文學家，後者是佛洛伊德的再傳弟子，義大利精神分析學家。他們都出生於迪里耶斯提。

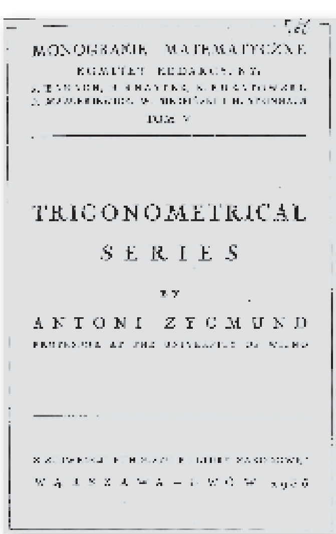
❷ 見陶哲軒部落格 http://terrytao.wordpress.com/2010/08/20/spielman-meyer-nirenberg/

Rieusset）則證明了加藤解的唯一性。這次我不是和專家一起研究納維爾 / 史托克斯方程，而是為了回答賈克路易．黎翁的問題。在這兒我要特別感謝布尼（Jean-Michel Bony）、舍曼（Jean-Yves Chemin）、傑哈德（Patrick Gérard）、梅蒂維埃（Guy Métivier），還有其他細心照顧我、容忍我的人。

齊格曼與卡得隆猜想

我後面還會再談到，在數學中經常發生這樣的事，一個問題在他原先表述的領域無法解答，必須經過重造，置入一群全新的想法中，然後解答才會慢慢浮現。我會在回顧齊格曼（Antoni Zygmund）之後再回來談這一點。

在見到齊格曼之前，我已經歡喜萬分的讀過他的《三角級數》（*Trigonometric Series*）。這本書的第一版印行於 1935 年，是我在史特拉斯堡數學圖書館唯一能借到的書（至於第二版則讓我有些失望）。這發生在 1964 年我準備博士論文時。對於習慣布巴基（Bourbaki）風格的人，閱讀齊格曼的書令人神清氣爽，就像放棄沙特（Jean-Paul Sartre）的《存在與虛無》（*L'Être et le Néant*），改讀托爾斯泰的《安娜．卡列尼娜》（*Anna Karenina*）一樣。齊格曼的著作對我早期科學方向的選擇有決定性的影響。《三角級數》集合了許多關於傅立葉級數展開的優美問題，我是真心喜愛齊格曼的數學風格。


TRIGONOMETRICAL SERIES

BY

ANTONI ZYGMUND

齊格曼 1935 年版《三角級數》。（臺大圖書館提供）

我 30 歲時，第一次見到齊格曼。他待我如同仍需忠告的小孩，我喜愛這樣的態度。他告訴我，一個問題永遠要用最簡潔與盡可能精確的方式表述。只要可能，齊格曼建議在著手一般的問題前，一定要先處理輔助性的範例。這種態度在布巴基絕對禁止，取而代之的，布巴基學派要求在處理問題前，必須將問題提升到最一般與抽象的表述方式。例如德利涅（Pierre Deligne）證明拉曼努真猜想（Ramanujan's conjecture），研究 τ 函數的泰勒展開係數的增長時，他所採用的是威伊（André Weil）的重新表述。

現在我知道還有第三種態度，只可惜不能系統性的描述。第三種理路是將問題轉譯成完全不同數學分支的語言。我就是以這個方法解決利普席茨（Lipschitz）曲線的柯西核（Cauchy kernel）有界性的問題，這是卡得隆在 60 年代晚期提出的問題，本來表述的語言是複分析，更精確的說，是單變數全純（holomorphic）函數。1974 年我訪問華盛頓大學時，寇依夫曼鼓勵我研究這個問題。麥金托許（Alan McIntosh）發現卡得隆問題可以在加藤敏夫提出的抽象算子理論綱領中重新表述，更明白說，加藤要做的是添增算子（accretive operator）的符號演算（symbolic calculus）。麥金托許知道兩個基本事實。他發現加藤的猜想在本來敘述方式的一般層級時不可能是對的。而在單變數微分算子的具體架構中，麥金托許證明卡得隆問題和加藤猜想是等價的。這個看法導致對卡得隆猜想的全新思考，所以我才能解決這些猜想。

我和麥金托許結識的故事很奇特。1980 年他獲得一年休假，到奧賽（巴黎第十一大學）來訪問。那時我在綜合工科學校任職，並在奧賽兼一門研究所課程。1980 年，我奧賽的同事正因為模糊的政治因素拒上研究所課，而綜合工科學校當時還未設研究所。麥金托許在教室後面默默坐著，我很好奇，因為他顯然不是學生，所以我邀他一起午餐，然後他告訴我他的想法。

就像前面說的，麥金托許發現卡得隆問題是加藤猜想的推論。所以我們走上正確的道路，六個月後，我得到最後的結果，並在訪問耶魯大學和寇依夫曼做了一些重要討論後將它完成。加藤和卡得隆彼此都沒有意識到對方的工作。後來加藤在 n 實變數添增二階微分算子的平方根的全面猜想，可以用一些改進的實變數工具給解決，這是歐雪（Pascal Auscher）和其他合作同僚的成就。遺憾的是歐雪完成時，卡得隆過世了。

另外一個可以說明我的看法的例子，就是德利涅對 τ 函數拉曼努真猜想的證明，他的方法源自代數幾何，並採用了格羅騰迪克的綱領，而拉曼努真猜想本來被許多數學家認為是解析數論的問題。透過新數學語言的重述來解決問題，總是給我莫大的喜悅，這樣不同文化的人們就能夠相互溝通和理解。在小波研究裡，當我理解我的卡得隆 / 齊格曼技術在信號處理中得以應用時，我也享受到類似的樂趣，一種驚喜。

當我從奇異積分算子領域轉換到小波時，我的學生大衛（Guy David）和卓尼（Jean-Lin Journé）並沒有跟我轉到信號處理。反而，他們以知名的 $T(1)$定理在奇異積分算子的理論上有重大突破。隨後，大衛和托薩（Xavier Tolsa）解決了知名的班勒維（Painlevé）問題。班勒維想要刻畫一種複數平面上的緊緻集 K，使得所有在 $\Omega=\mathbb{C}\backslash K$ 上的有界全純函數 F 必然是常數函數（相當於 Ω 上的里歐維勒（Liouville）定理）。類似的，當我放棄小波轉攻納維爾 / 史托克斯方程，我的小波研究也有人完成，朵畢希了不起的發現了緊緻支集（support）小波的單範正交基底（orthonormal basis），另外還有科恩（Albert Cohen）的非凡成就。他們好像在說：「別擔心，好好去旅行，家裡我們會照顧。」相對於我學生的成就，我所做的數學大可被忽略，這句話是我的數學生涯的真正意義。

應用數學與純數學

我要回顧一段永存的回憶。1984 年，在我朋友古拉維齊不幸慘亡之後，我沮喪到根本無法做數學。當時我負責古拉維齊 / 史瓦茲共同討論班，這是古拉維齊和史瓦茲（Laurent Schwartz）在綜合工科學校發起的討論班。賈克路易．黎翁當時是法國國家太空研究中心（CNES）主任，他同意到古拉維齊 / 史瓦茲討論班來演講。他的主題是某種危險振盪的控制與穩定化，這種振盪可能發生在當時還在建造的太空實驗站中，預期的可能控制方法，是發射已經裝設在實驗站某些預定位置的小火箭。黎翁有種神奇的能力，將這個控制問題轉譯成純數學的問題。一個星期後我解決了這個問題，黎翁極為高興。

我這一生中第一次知道，我在純數學的研究可以用到應用數學。直到當時，我都認為純數學和應用數學是距離遙遠而孤立的大陸。我不敢相信我竟然可以和應用數學家交流，黎翁告訴我事實如此。我很感謝他，他在我這一生的關鍵時刻幫了我。一年後，我轉到信號處理的領域，接著發現了屬於史瓦茲類的單範正交小波基底的存在性。

訪 有沒有給年輕數學家的什麼忠告（或警惕）？

當我正在準備博士論文時，史特拉斯堡大學有位老師叫加百利耶（Peter Gabriel），他現在是瑞士蘇黎世大學的退休教授。加百利耶告訴我：「伊夫，你應該放棄古典分析，轉到代數幾何去。代數幾何的語言已經被格羅騰迪克整個翻轉過來，現在 40 歲以上的人都搞不懂了。在這個領域裡，年輕人可以自由研究，不必受到老一代的挑戰。在古典分析內，你得對付所有老行家，他們已經匯集了一身的訓練與經驗。」

我沒有聽加百利耶的忠告，結果如他預測的，我的博士研究馬上被史坦（Elias Stein）所挫敗，他

和我同時研究相同的問題，但是卻配備了更具威力的工具。史坦用到卡得隆的研究結果，卡得隆證明了哈第空間 $\mathcal{H}^1$ 中的全純函數 F，其平方函數 [1] 的 L^1 範與 F 的 L^1 範等價，這樣史坦就可以將哈第（Godfrey Hardy）、里特伍德、馬欽克維奇（Józef Marcinkiewicz）在 L^p 空間脈絡使用的工具應用於哈第空間的算子論，而我對這部分的數學並不那麼熟悉。

順帶提一下，我的論文並沒有教授指導。研究哈第空間 $\mathcal{H}^1$ 的算子論是我自己的決定，當我把論文寫到第 11 章而且我太太打完文稿後，我才將論文帶去給卡昂（Jean-Pierre Kahane）看。我的博士論文可以說是成敗參半。失敗是因為我沒做出想證明的結果，不過我對調和分析未來發展的猜測卻是正確的。而且我將在八年後和卡得隆合作。事實上，寇依夫曼和我後來證明了第二交換子的連續性，就是卡得隆提出的問題。讓我再強調一次，我並沒有跟卡得隆吵架，相反的，他是我的朋友，我會另外再談到。

我對年輕數學家的忠告是不要服從，要遵循自己的志向，不管老傢伙的忠告是什麼。事實上你應該深入挖掘自我，就好像做數學研究一樣。你需要相信你的心靈最深處擁有一份寶藏，一份尚待揭曉的寶藏。

對年輕數學家的最後忠告是，儘量忘掉他們研究是否重要這種折磨人的問題。我覺得很顯然的，數學的進步是集體的成就，我們每人缺一不可。

訪 你認為數學是科學或是人文的一部分嗎（或是介於其間）？換句話說，如果你沒有選擇成為數學家，你會當工程師、物理學家、化學家？還是你會成為哲學家、史學家或者當作家？

我很高興回答這個問題。在 50 年代，法國高中最好的學生讀的是人文，我修了拉丁文和希臘文，而且十分著迷於蘇格拉底的人格，直到現在仍然是。柏拉圖我讀了一遍又一遍。對我來說，蘇格拉底就像哥哥一樣。在柏拉圖《斐多篇》裡，蘇格拉底的論證經常被克貝（Cebes）或西米雅斯（Simmias）質疑，當論證瓦解，就需要靠蘇格拉底來修復。這解釋了我對數學的初次迷戀，在數學中而且只有在數學中，一個小孩可以靠自己發現一些東西。譬如我 14 歲時，自己解出了丟番圖方程 $a^2 + b^2 = c^2$。比起高斯，這樣似乎有點荒唐，不過這只是開始。作為一個學生，我可以向我的老師說他錯了，或者我有更好的證明，就像西米雅斯可以批評蘇格拉底的論證一樣。在物理學裡，你必須相信某些東西，你不能向老師說邁克遜（Albert A. Michelson）和莫雷（Edward W. Morley）的實驗是錯的。相信這個實驗和相信上帝具有一樣的哲學地位。你相信某種自己無法檢查的東西，因此是純粹的信仰。

這具有十分重要的意義。數學教育的舊傳統強調正確證明的重要性，數學等同於幾何學，像我過去就很愛歐拉的九點圓。這個舊傳統的不良副作用就是，幾乎所有學生都相信數學這個領域和國家的科學與工業發展距離遙遠。數學被認為是已死的知識。最近在法國我們已從一個極端跑到另一端，基於煽動性與民粹性的理由，目前有一種教育傾向，要在高中放棄證明，把數學當成自然科學來教。這會是艱難的選擇。

訪 你是否可以指出，在數學中有哪個部門的問題不需要太多工具與先置教育，因此用基本技術就能研究？

這是要緊的問題，我說一下我和研究生相處的方法。我每週和他們見面，我會順著我期望的好研究方向，給他們一個問題。當週的問題會比上一週的稍微難一點。在最開頭三個月，我知道問題的答案，但故意隱藏起來，讓她或他在做出第一個發現時會非常高興。但很快的，接下來雙方都會在荒野

迷失方向，我們得交換彼此的想法。我說這個故事的重點是，我從不要求學生去讀五、六本書，然後過半年後再回來。我希望學生能信賴並發展自己的力量。在法國這種作法非常罕見。這種指導論文的方法，並不依賴於你感興趣的數學領域。

如實回答你的問題。簡單表述的問題可能非常困難，需要精細複雜的理論才能解決，譬如費馬最後問題與懷爾斯（Andrew Wiles）的解答。而大多數剛誕生的數學新領域的問題，說真的都比較自然，不需要太精密的工具，這就是加百利耶勸我轉換到「格羅騰迪克風格」代數幾何的原因。

訪 你認為對數學家來講，社交互動有多重要？（以致於對年輕數學家的忠告是盡可能的跟別人合作。）在其他的領域，和一群共同作者合作是常態，很多人覺得如果他不依附於某個群體就會完全迷失。但在數學裡，大部分的合作僅限於一位共同作者，我們通常對超過三人的合作文章抱持相當遲疑的態度。數學是孤獨的探索，當我們要思考透徹並理解一個問題時，你不能和另一個人持續互動。那種針對給定問題，要像騎雙人腳踏車般，透過兩人不斷對話來解決問題的理想，我感覺太過拘束壓抑。畢竟數學思考的過程非常具創造性，實際試著形塑自己模糊的思考過程的需要，似乎跟解決問題本身幾乎一樣辛苦。當然別人給的意見是無價的。在你自己的合作經驗裡，你所尋求的是什麼？哪方面最有幫助？

我很懷念第一次參加的國際學術會議，那是1965年8月在德國歐伯沃爾法（Oberwolfach），那年我26歲，當時老城堡還沒拆，而我的太太安妮那時正懷孕。我們認識一些了不起的數學家，日後將在我的生命扮演重要的角色。讓我說說圭多·魏斯，他和太太芭芭拉（Barbara）一起與會。安妮和芭芭拉會在晚餐開始前五分鐘進入餐廳，重新安排座位讓我們可以每天坐在一起。這是因為會議組織委員會希望隨機安排大家入座，讓與會的人可以有機會認識其他所有數學家。安妮和芭芭拉算是在作弊。那時魏斯正在瑞士日內瓦大學休假訪問，教一門研究所課程，在那裡他認識正完成博士論文的寇依夫曼，魏斯要說服寇依夫曼一起到美國去。寇依夫曼沒有參加歐伯沃爾法的會議，我們的合作要九年之後才開始，自那時起，我已經和寇依夫曼合作了35年，我們配合得非常完美。寇依夫曼眼界開闊，和他相比，我則是充滿懷疑的技術專家。他是夢想家，而我經常幹著苦活，試著找出能和他的願景相容的證明。


德國歐伯沃爾法數學研究院的舊館，即文中所稱的「老城堡」，1972 拆除。（Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach 提供）

❶ 譯註：此處的平方函數不是指該函數的平方，牽涉到複雜的技術定義。

訪 我記得卡爾森（Lennart Carleson）曾經勸阻一個學生別和他人合作寫論文。他宣稱說，在數學研究中，重要的個人成就的規範，不是整體成就的規範[1]。這在論文階段也許正確，但如果在別的階段也正確，就不會有什麼合作的論文。就你的意見與經驗，合作的文章比較像是個別貢獻的結合（工作的分配），還是真正的合作，也就是在一長串的論證中，每個作者輪流提供看法。（我曾經有次合作的經驗，解決問題的過程真的就像這樣。如果我們只有一個人，結果應該是各爬上一層階梯後，就沒法再前進了。）

當我在史特拉斯堡準備博士論文時，一個已有成就的教授勸告我：「不要出版你的第一篇文章，你會後悔。再多等幾年，直到它完美了再發表。」在那個年代，世界上的數學家很少，所以每個人都知道別人在研究什麼。這表示只要留意他們，被別的同僚超越的風險很小。所謂聯絡主要是靠寫信給你認識或尊敬的同事，遊戲要公平是基本的行規。這個忠告讓我印象至深。

卡昂則另有看法：「伊夫，要發表你的第一篇文章，除非你要耗費餘生去改善它，這還蠻蠢的，因為它只不過略優於平均。」雙方的忠告都有道理。我真的發表了我的第一篇文章，我現在對這篇爛文章覺得很羞愧，甚至把它從我的出版著作中刪除。卡昂認為拿到博士只是事情的開始，不是結束。博士論文不需要是大師級的傑作，只是允准你在數學世界展開美好旅程的駕駛執照。我喜歡這個想法。

談到不好的文章，齊格曼曾經跟我說：「依夫，如果你要評價別人，你該做的是對 f^+ 做積分。」其中 $f(x)$ 是實函數，而 $f^+(x) = \sup(f(x), 0)$。讓我解釋他這句話的意思。齊格曼認為我對同事太挑剔，他的意思是，在我想批評別人之前，需要先抹去對方負面的部分，保留他最好的部分。這真是非常中肯的忠告！

訪 我注意到別的領域，像是大科學（big science），他們有很大的計畫，牽涉到幾百人與龐大的經費（贊助機構偏好送出大筆的錢，這可以理解，因為涉及的經費愈多，涉入的決策過程就愈少）數學是否也該更像這樣？由少數有眼光的領導者指出該解決的問題，然後一大批人去研究。這樣的話，本來由自己思考如何進行的過程，換成被（其他數學家）告知該做什麼所取代。這樣自動就會有社群互動，許多人可能真的可以鬆口氣，再也沒有責任要自動自發。（這讓我想到父母或他人安排的婚姻，雖然許多人持懷疑的態度，但也有人喜歡，因為這排除了個人責任與採取主動的要求。）無可避免的，大科學讓科學家的生活方式和數學家大有不同，其實數學家在許多方面都和人文學者比較接近。

這是一個重要的問題。是的，在數學中也有大綱領。卡得隆提出的一系列問題，重塑了調和分析與偏微分方程領域。解決這些問題花了大約十年時間，牽涉其中的不下百餘人，只有在卡得隆綱領中，班勒維猜想才能被解決。雖然沒有正式編列專款給卡得隆綱領，但是美國國科會（NSF）知道其重要性，經費給的很充裕。另一個巨大計畫的例子是朗蘭茲綱領（Langlands program），基金機構也知之甚詳。綱領比猜想更清楚而突出，它所傳達的是一種真實的意旨，沒有綱領的猜想也許只會是謎團。目前的代數幾何和數論已經被格羅騰迪克、塞爾（Jean-Pierre Serre）和威伊（André Weil）重新改造。沒有他們的重建，德利涅就不能證明關於 τ 函數的展開係數增長的拉曼努真猜想。

最後，在數學裡最受人注目的大綱領就是有限單群（simple group）的分類。大老闆是郭倫斯坦（Daniel Gorenstein），不過和前述綱領進行方式不同的是，老闆告訴每個人他必須做什麼，哪些部分的研究必須要完成，然後他成功了。現在關於分

類已經窮盡的證明長達 6000 多頁，沒有人敢說自己能掌握整個證明。郭倫斯坦的例子，挑戰了我們以閱讀和理解證明做為知識基礎的理想。在哲學層次上，這個分類問題解決的狀態和謠言一樣。

訪 數學在物理有應用當然是盡人皆知的事，但是物理在數學上也有應用（想想弦論，就我所知，在物理上還沒有應用。）這是雙向道。物理學提出非常核心的數學問題，而物理學家的直觀對解決數學問題可能非常有用。雖然數學在生物學、部分社會科學上也有應用，尤其是經濟學，但在這方面似乎不是雙向道。數學或許當然有用，但反之卻不成立，經濟學和生物學的直觀似乎不能為數學解題提供線索。而且如果生物問題刺激了純數學問題，它的解答似乎對生物學也不重要，這和物理的情況不同。對我來說，將數學應用在這個真實又雜亂的世界時，似乎都很蕪雜而零碎（ad-hoc），喪失了美感與簡潔這些數學與物理互動時的特徵。你可以詳加解說嗎？

我可以回答這個問題，因為我曾任職於巴黎達芬尼大學十年，在那個系裡數學和金融之間的互動高度發展，我可以見證有些美妙的數學問題就來自金融。甚且，金融還提供了某種僅見的直覺，在其他科學領域並不存在。艾克蘭（Ivar Ekeland）曾經強調這一點。哥洛汶斯基（Roland Glowinski）曾被邀請到一個關於非線性偏微分方程未來展望的會議，大家很驚訝原來有約四分之三的重要問題來自金融領域。

準晶體

在結束訪談前，我想談一下準晶體。高斯獎的評審喜歡我的研究中，缺乏純數學和應用數學明顯邊界的特質。一個例子是我發現 $\mathbb{R}^n$ 中某些幾何構造，預示了準晶體的存在，科學家後來在某些化學合金中的特殊原子組織中找到準晶體。我想談談這些發現。

完成博士論文後，我開始著迷於數論，尤其是吠嘉亞羅噶凡（Tirukkannapuram Vijayaraghavan，1902-1955）完成的研究。吠嘉亞羅噶凡是出身馬德拉斯（Madras）地區的印度數學家。他曾和知名英國數學家哈第共同研究目前稱為 PV 數（Pisot-Vijayaraghavan number）的主題。

PV 數是一個大於 1 的 n 次實代數整數 θ，它的所有共軛數（conjugate）$\theta_2,...,\theta_n$ 都滿足 $|\theta_j|<1$，其中 $\theta_1=\theta$。如果將 $|\theta_j|<1$ 的條件換成 $|\theta_j|\leq 1$，則稱為賽勒姆數（Salem number）。吠嘉亞羅噶凡的研究是在 1920 年代中期他到英國牛津大學完成的，他在 1934 年當選印度科學院院士。另外皮佐（Charles Pisot，1910-1984）則是我認識且欽佩的法國數學家。

1969 年，我發現了$\mathbb{R}^n$中某種點集的新形構，現在稱為「梅耶爾集」或殆格（almost lattice）。殆格 $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ 是以底下三個條件來定義：

（a） 存在正數 r，使得任一半徑為 r 的球（不論球心何在），頂多包含 Λ 中的一點。

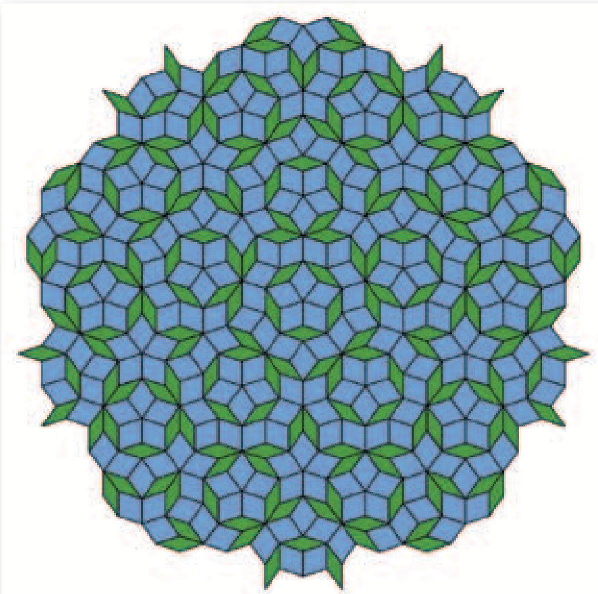
（b） 存在正數 $R>r$，使得任一半徑為 R 的球（不論球心何在），至少包含 Λ 中的一點。

（c） 存在有限集 F，使得 $\Lambda-\Lambda\subset\Lambda+F$

$\Lambda-\Lambda$ 表示 $\lambda-\lambda'$ 所成的集合，其中 λ、$\lambda'\in\Lambda$。當 $F=\{0\}$ 時，Λ 就是正常的格。在調和分析中，正常格可以用殆格來取代。而殆格和 PV 數之間的關係非常精彩。如果 Λ 是正常格且 $\theta\in\mathbb{R}$，則縮放格 $\theta\Lambda$ 會落在 Λ 中的充要條件是 θ 是正常整數。殆格有類似的描述：如果 Λ 是殆格且 $\theta\Lambda$ 落在 Λ 中，則 θ 是 PV 數或賽勒姆數；反之，如果 θ 是 PV 數或賽勒姆數，則存在殆格 Λ，使得 $\theta\Lambda\subset\Lambda$。

---

❶ 譯註：這是借用數學名詞的雙關語，直譯為「在數學研究裡，重要的是最小上界範數（sup-norm），而不是積分範數（integral norm）。」



潘洛斯鋪磚。（維基提供）

殆格曾經被獨立的重新發現，像是 1976 年潘洛斯（Roger Penrose）的潘洛斯鋪設（Penrose paving），以及後來 1984 年，謝特曼（Daniel Shechtman）、布雷契（Ilan Blech）、格拉夏斯（Denis Gratias）、康恩（John Cahn）在化學上的發現。某些合金中的原子位置正好遵循我比謝特曼早 15 年發現的數學規則。這個引人注目的例子，證明了數學的預言特性。你只要在 Google 中以 quasicrystal 或 Meyer sets 搜尋，就可以欣賞到許多美麗的形構。

但故事還沒結束，事實上，在中世紀伊斯蘭藝術中，似乎就已經採用準晶體的模式來裝飾，這項傑出的發現是哈佛大學陸述義在烏茲別克布哈拉的一所學校發現的。在 Google 輸入 Quasicrystals and Islamic art 就能找到更多詳細又令人驚奇的圖片。我很喜愛這個故事，數論、鋪磚、化學、伊斯蘭融於一堂。這就好像在長途旅行結束後又回到突尼斯一樣。∞

本文出處

原文分兩期刊登於 *IAMP News Bulletin* Jul. & Oct.（2011）。本刊感謝該刊主編 Valentin A. Zagrebnov 同意轉載並推薦刊登 Ruelle 之回應。*IAMP News Bulletin* 為國際數學物理協會（IAMP）的新聞刊物。原文曾節錄刊登於歐洲數學學會 *EMS Newsletter*, Jun.（2011），全文也曾刊登於瑞典數學學會的 *Medlemsutskicket*, May（2011）。

譯者簡介

周樹靜為臺灣數學科普譯者。

延伸閱讀

▶ Malhotra, Richa "In Conversation: Yves Meyer, the 2010 Gauss Prize winner." *Current Science* 99（2010）no. 11, Current Science Association, India. 由於當年世界數學家大會在印度舉行，印度科學期刊 *Current Science* 訪談梅耶爾的文稿，可與本文對照閱讀。

http://www.currentscience.ac.in/php/toc.php?vol=099&issue=11

▶ Ramachandran, R. "Yves Meyer's Work", 2010 年國際數學聯盟（IMU）高斯獎委員會描述梅耶爾研究工作的新聞稿。本文也刊登於 *Notices* 57（2010）no.11, AMS.

http://www.icm2010.in/wp-content/icmfiles/uploads/The_2010_Gauss_Prize_Long.pdf

▶ Strang, Gilbert "Wavelets" *American Scientist* 82（1994）。MIT 數學家史特朗介紹小波的短文。

http://www-math.mit.edu/~gs/papers/amsci.pdf

▶梅耶爾讚譽陸述義發現伊斯蘭文化的壁飾拼貼，在潘洛斯鋪磚與準晶體發現前兩百多年就已出現在人類歷史。底下是陸述義網站中關於伊斯蘭藝術的文章與演講連結。

http://www.peterlu.org//content/decagonal-and-quasicrystalline-tilings-medieval-islamic-architecture