

純數學和應用數學的畫界

高斯獎的三位得主

對於什麼才是正宗數學，純數學家 and 應用數學家之間曾經劍拔弩張，不過純數和應數的分野十分模糊，尤其好的純數和好的應數如何畫界就更微妙。個人主觀意向並不算數，因為「好」數學需要公評，基於數學的抽象性，最合理的評價方式之一或許是數學獎。

我們以年輕的高斯獎來當參考。高斯獎可能是目前應用數學的最高獎，這個德國數學聯盟（DMV）和主辦世界數學家大會的國際數學聯盟（IMU）合辦的獎項，每四年在數學家大會上與費爾茲獎等其他獎項一起頒獎。從 2006 年開始，到現在才第三屆。

第一屆高斯獎得主是日本數學家伊藤清（Kiyosi Itô），得獎時他已 90 歲高齡，必須由女兒伊藤順子代領，獲獎兩年後，伊藤就過世了。

伊藤在東京帝大因為想讀統計力學，認識奇妙的大數法則，開始自習白努利與棟美弗的原文論文。20 世紀初機率論幾乎不存在，日本也缺乏專家。伊藤雖然苦於機率論缺乏嚴格基礎，卻只能自行摸索。大學期間蘆溝橋事變發生，伊藤因疾不用入伍。畢業後因早婚生女，只好進入大藏省（財務部）工作，幸好長官放任他自學，開啟了伊藤一生最關鍵的時期。

在這幾年，他閱讀科莫哥洛夫（Kolmogorov）的《機率論的基本概念》，有撥雲見日之感，而列維（Lévy）的機率著作更關鍵性的引領他踏上隨機過程的道路。他的博士論文《關於隨機過程》（確率過程について）發表於 1942 年，不過他 1945 年正式拿到東京帝大博士學位時，已經是名古屋帝大的助教授。

當時在日本研究機率面臨雙重孤獨的苦境，因為日本沒有人研究機率，更別提隨機過程；二次大戰的日本近乎孤立，他在日本的研究幾乎不為外人所知。伊藤等於一個人開創整個理論。

大戰後民生凋敝，他的論文因為篇幅無法發表，便將文章寄給他曾徵引的杜伯（Doob），結果成就他第一篇在西方發表的文章：〈隨機微分方程論〉（On

stochastic differential equations, 1951）。1952 年他成為京都大學教授，兩年後到普林斯頓高等研究院演講訪問，才出現在西方數學界。1976 年，他成為京都大學數理解析研究所（RIMS）所長，1979 年轉任學習院大學教授時已經 64 歲。

隨機過程最簡單的例子是布朗運動，花粉粒子在水中因為分子力擾動出現奇特的路徑，釐清這個問題的是 1905 年愛因斯坦的三大論文之一，日後被維納（Wiener）嚴格證明稱為維納過程。不過布朗運動是純擾動，顯然應該考慮更一般的隨機過程如摻雜起伏的族群變化、有噪音的訊號等。就像用微分方程預測未來路徑，在加入維納過程的擾動下，伊藤發展出所謂的伊藤微積分（Itô calculus）。頒獎委員會說這是一個「典範式」的成就，改變了這個領域的風貌。

雖然伊藤研究可以廣泛應用到保角場論、隨機控制、群體遺傳，但讓這門學問炙手可熱的大部分來自金融數學的興起。股市金融的變動顯然是隨機過程，1997 年，墨頓（Merton）和舒爾茲（Scholes）因為他們的計價模型獲得諾貝爾經濟獎，其理論基礎就是伊藤理論。美國國家科學院介紹伊藤的研究時說：

倘若不考慮畢氏定理，很難想出比「伊藤引理」更出名、更廣為應用的數學結果。在隨機分析裡，這個公式就像古典分析裡的牛頓基本定理一樣，是此領域的「必要條件」（sine qua non）。

這也許是伊藤走老運的原因，1987 年伊藤與拉克斯（Lax，見 51 頁）合得沃爾夫獎時已經 72 歲，得到高斯獎是 90 歲。感覺上更像是因他設獎，藉此提高應用數學的能見度。有趣的是伊藤聽到「伊藤理論」被用到金融時也很驚訝，因為「我終生沒買過股票，更別提衍生性商品。」唯一的金融操作就是儲蓄。

雖然機率有著強烈真實世界的印記，可以看成應用數學的一支，但是伊藤頂多算是帶著健全應用意識的純機率數學家，他似乎終生未涉足應用場域。

2010 年第二屆高斯獎得主是法國數學家梅耶爾（Yves Meyer，見本期 62 頁他的得獎專訪），他畢

業於法國高等師範學校，不過他和布巴基學派並不親近。他大學畢業從軍擔任高中老師，在沒有論文指導教授的情況下拿到博士學位。然後開始他游牧式的研究生涯，大概每十年換一所學校，一個領域。

頒獎介紹文說梅耶爾至少跨越四個領域：準晶體、卡得隆 / 齊格曼綱領、小波、納維爾 / 史托克斯方程。「梅耶爾在每個領域都做出基本貢獻……就像一旦梅耶爾出現了，他就會將各種鬆垮的末端整繫起來，為現存各異的路徑給出統一的圖象，打下一個留著梅耶爾印記的理論架構基礎，然後飄然而去。」

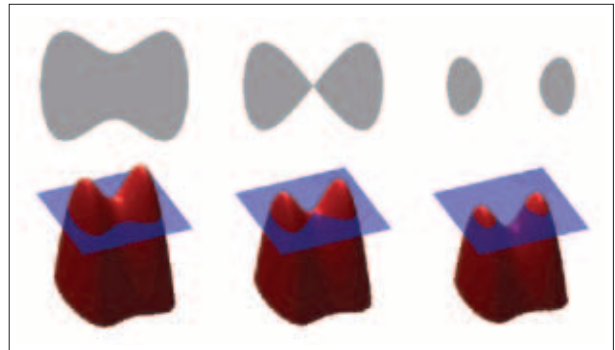
和他一起提出小波多解析度分析的馬萊 (Mallat) 曾說：「梅耶爾構造的單範正交基及後續在此領域的工作，都是打開未來數學發展與應用大門的關鍵發現。梅耶爾是催化作用的核心，他將數學家、科學家、工程師匯集一堂，建立理論和演算法。」

德國數學家達門 (Dahmen) 則給出這樣的觀察：「就我所知，梅耶爾從不直接研究實際的應用問題。」所以拉馬尚德朗 (Ramachandran) 認為梅耶爾是研究基礎數學卻意外造福人群的典例。就這點而言他和伊藤清相似，但是他的學術領域廣博又和伊藤不同。

歐修 (Stanley Osher) 是 2014 年第三屆高斯獎得主。歐修畢業於應用數學重鎮紐約大學庫朗學院，指導教授史瓦茲 (J. Schwartz) 是庫朗學院計算機科學系的創系主任 (參閱 51 頁拉克斯訪談)，歐修打一開始就浸淫在應數和純數、數學和電腦交會的環境。

歐修和塞席安 (Sethian) 在 1980 年代發展了知名的水平集法 (如圖)，這個方法利用提高維度的想法，化不連續為連續，將所有變化的曲線，無論連續或不連續，利用高一維的曲面將他們統合起來。「只要提高一個維度，你的煩惱就解決了。」

水平集的想法本身就是一部動畫。當今主流動畫公司包括迪士尼、Pixar、夢工廠，在動畫模擬液體如旋風、雲湧、火勢時，都要用這個方法，讓動畫具有符合物理的真實感 (歐修學生菲德可 (Fedkiw) 還因此獲得奧斯卡獎)。水平集法還可應用到晶片設計，地震震源確認、天氣預測、腫瘤增長、醫學掃描等。



反映歐修關注「不連續性」的是另一項重要成就：建立超音速飛航的模型，成功克服超音速瞬間產生的多種不連續性。傳統建模通常假設連續的變化，透過這項突破才能用電腦設計超音速飛機。

有趣的是歐修運用類似想法，解決看似不相干的圖像問題：模糊圖像銳利化。圖像的基礎是物件的邊緣，邊緣意味實體的不連續性。歐修運用前述模型的想法，發展辨識並加強不連續性的方法，將圖像銳利化。歐修開了一家名為 Cognitech 的公司，在 1992 年洛杉磯大暴動時，因為成功解析直昇機模糊的空拍影片，指認暴民身上的刺青，令人印象深刻。

歐修說自己有一半時間和非數學界的科學家泡在一起，他很擅轉換不同領域的語言，他說：「跑出去傾聽別人想說的是件好事，即使有語言障礙，你也必須保持友善，學習他們的語言。」

歐修曾向《洛杉磯時報》說：「我是數學界的貝瑞曼尼羅。」這反映歐修發明的諸多演算法流暢而精彩，頒獎委員會認為這緣於他背後的深刻數學。歐修進一步說：「我們都愛數學，愛數學不合理的有效性，它能做任何事。我喜歡證明定理，但我更喜歡讓事情成功動起來，這讓數學既有用還更有趣。」

比起前兩屆得主，歐修顯得「應用」多了。但這不妨礙他們三人的研究都符合高斯獎「成功應用到非數學領域」的設立宗旨。或許深刻、廣博、高明，他們的個人特色頗有差異，但顯然他們都是好數學家，而不只是應用數學家或純數學家。

(編輯部)

你不知道的費爾茲獎二三事

隨著 2014 年新一屆費爾茲獎得主的出爐，數學難得在大眾媒體佔據版面。美國數學學會在 2015 年的《會訊》中也以兩篇文章呈現費爾茲獎少見的面向。

其中之一是科學史學者巴瑞尼 (Barany) 的〈神話與獎章〉 (The Myth and the Medal)，探討費爾茲獎是如何成為「數學界的諾貝爾獎」。另一篇〈費爾茲獎是否帶來詛咒？〉 (Is There a Curse of the Fields Medal?)，則是數學家柯拉爾 (Kollár) 評述經濟學家所做的費爾茲獎研究。

巴瑞尼考察歷史，發現即使在數學界，費爾茲獎一開始知名度並不高，更不用說與諾貝爾獎相提並論。這與它成立時的背景有關：當時的國際數學界正因為一次大戰的創傷而處於分裂狀態，而在 1936 年頒發首屆費爾茲獎之後，相隔 14 年才再頒發第二屆費爾茲獎。在這種處境下，一個獎項很難建立起它的聲望。

令費爾茲獎與諾貝爾獎並論的是 1966 年的「史梅爾事件」。當時，柏克萊數學家史梅爾 (Smale) 因為反越戰運動，而被眾議院傳喚作證。八月時有媒體報導史梅爾為了躲避聽證，已逃往莫斯科，但其實史梅爾是要去參加世界數學家大會，並領取費爾茲獎，他早在五月即已赴歐。為了維護史梅爾與數學界的名聲，美國數學家發表聲明駁斥謠傳，強調大會和費爾茲獎的重要性。透過美聯社、《紐約時報》等媒體的報導，「數學界的最高榮譽」、「堪與諾貝爾獎媲美的數學獎項」之類的語句紛紛出現，從此確立了費爾茲獎在大眾心目中的形象。巴瑞尼認為，「費爾茲—諾貝爾」神話及早期費爾茲獎的種種故事 (見下表)，正說明了數學界並不如大家以為的，是一個超然、理想主義的世界。其中也充滿了爭端與紛擾，衝突與妥協。

〈詛咒？〉一文則是從另一個面向來觀察費爾茲獎。該文介紹兩位經濟學家波哈斯 (Borjas) 和多倫 (Doran) 的論文〈得獎與創造力：贏得費爾茲獎如何影響科學產出〉。從經濟學家的觀點來看，獎項和競賽是為了促進知識成長所提供的「誘因」，誘因是否有效，費爾茲獎提供了一個很好的觀察。當初費爾茲在設立獎項時，即明確表示它不只要表彰既有成果，而且還要鼓勵得獎者及他人後續更進一步的研究，這項宗旨日後更被硬性限定成得獎者必須未滿 40 歲。那麼，在學術生涯的中途獲獎，是否真能激發出更豐碩的研究成果？

兩位經濟學家利用 MathSciNet 的資料，調查費爾茲獎得主在獲獎前後的論文數和引用率，在排除各種外部因素後，發現兩項數據都在得獎後明顯下降。為了確認這項發現，他們引入了稱為「競爭者」的控制組，成員是其他重要數學獎的得主 (包括阿貝爾獎和沃爾夫獎等)——所以，我們是在看美國聯盟 VS 國家聯盟的較量嗎？比較的結果發現，競爭者在過了得獎年齡後仍然維持高生產力，因此前面的觀察得到了確認。

要怎麼解釋這個現象？波哈斯等人提出了認知流動性 (cognitive mobility) 的概念。由於得獎的肯定，使得他們可以更自由地去追求新的領域，而要進入新領域需要付出代價，因而造成生產力降低。波哈斯等人的想法也從統計數據裡得到證實，得獎者的認知流動性明顯高於競爭者。以數字來衡量創造性的研究必然引起許多質疑，而主觀判斷與客觀數字的對抗，也不可能會有定論。相對於長遠的數學發展，此項研究的樣本數和取樣時間，恐怕很難說具有代表性。但是與前一篇歷史回顧的文章合看，我們可以明確感到，數學其實不是純然超乎世外的志業，但這未嘗不是件好事，因為它讓數學多點人情味。 (編輯部)

- 承辦 1924 年多倫多大會的費爾茲，提議以大會結餘款 2,500 加幣，成立一個國際數學獎項。其後，費爾茲又捐出他的遺產 47,000 加幣充實基金。
- 第一屆 (1936) 的獲獎者阿爾弗斯 (Ahlfors) 在二次大戰的逃難過程中，曾典當他的獎章以籌措旅費。另一位獲獎者道格拉斯 (Douglas) 未出席頒獎典禮，由他人代為領獎。

- 第二屆 (1950) 的兩位得主，史瓦茨 (Schwartz) 和塞爾伯格 (Selberg) 在被告知獲獎時，都沒聽過費爾茲獎。史瓦茨在回憶錄中寫道，得獎的興奮之情遠比不上高中時在全國競試中奪冠。
- 1950、60 年代的新聞媒體常寫錯費爾茲獎的名稱 (誤寫成 Field Medal 或 Field's Medal)，甚至連擔任過評選委員的摩爾斯 (M. Morse) 也曾筆誤過。

插手 3D 產業的數學家

3D 是英文三維的縮寫，指的是人類生活的空間。3D 產業指的是 3D 數位資訊的擷取、處理、儲存，以及 3D 資訊的呈現，例如 3D 列印或 3D 影視等相關領域。其應用領域涵蓋幾乎所有產業，例如基礎科學、製造業、文創業，醫學，甚至 3D 列印食物等等。以 3D 列印或 3D printing 作為關鍵字搜尋，立即可得到超過百萬筆以上的資料，可見 3D 的確是很夯的話題。

著名未來學家里夫金（Rifkin）在 2011 年的暢銷書《第三次工業革命：新經濟模式如何改變世界》（*The Third Industrial Revolution*）中，或者近來《經濟學人》（*The Economist*）皆提及網路技術（含 3D 列印）將掀起第三次工業革命。《新科學家》（*The New Scientist*）雜誌更斷言 3D 列印等於第三次工業革命。

美國總統歐巴馬在 2013 年國情咨文明言 3D 列印，將為美國創造新的高科技工作機會注入新的動能。相當於美國公部門為 3D 產業背書。近年來歐、美、亞洲各國也紛紛將 3D 列印列為國家科技發展重點項目之一，傾產、官、學的力量全力投資發展 3D 列印技術，避免在這波第三次工業革命缺席。

但卻仍有不少人唱衰，認為受限於技術進程及相關支援，無法產生重大影響，臺灣鴻海董事長郭台銘就直言 3D 列印只是噱頭，說若它真的造成第三次工業革命，「那我的郭字倒過來寫。」

對於這項緣起於 1970 年代的技術，目前要下定論尚嫌太早。但不容置疑的是，3D 列印由於技術研發的耗時已經縮短，技術限制不如以往多，再加上成本下降，已經從實驗室逐漸走向工業端及消費端的實際產品，可以開始真正測試這項技術的發展潛力。

觀察剛結束的台北國際電腦展 3D 應用產品區，以及 OPTO Taiwan 國際光電大展 3D 列印專區受到詢問的熱烈；2009 年 3D 電影《阿凡達》橫掃全球；2012 年李安的《少年 Pi 的奇幻漂流》展現的 3D 電影藝術創作潛力，加上各種 3D 動畫技術更是充分融入電影、電視、電玩的製作中。凡此總總，都可看出 3D 的確

是一項發燒議題。

許多人懷疑 3D 產業只是華爾街或媒體有心炒作的假議題。就實際來看，3D 產業的發達除了硬體的配合發展，還牽涉到 3D 軟體的全面成熟與整合。無可諱言的，目前 3D 產業要達到全面進入生活，仍有一段漫長的路要走。

目前即使是工業級 3D 印表機，對於曲率大的物件其印製成品精度仍嫌不足，列印失敗率高，遑論一般價位的 3D 印表機。而 3D 影視也面臨後製時間過長所造成的高製作成本難題。關鍵問題之一，在於如何有效率的、低成本的處理複雜 3D 資訊的兩難問題。

值得注意的是，3D 產業的突破無疑需要對空間理論的深入理解，而數學家（尤其是幾何學家）研究空間曲面問題已經有幾百年的歷史，幾何知識將是關鍵的切入點。微分幾何學家丘成桐近年來投入 3D 應用產業，他在本期《3D 改變未來》一文就有數學如何應用於 3D 產業的介紹。另一文《3D 臉部形變的殺手級特效？》則是數學在 3D 上如何應用的實例。

交大丘成桐中心特別成立 3D 影像研究群，致力於應用幾何學理論，進行高速和高解析度 3D 成像和 3D 人臉的研究分析，並涉足醫學、計算流體動力學等新興的跨越學科領域。目前研究目標為 3D 幾何運算處理，包括曲面匹配、3D 人臉辨識、動態曲面跟蹤、形狀分析、表情類比等各種演算法，以厚植學術研發能量及培育人才。另外也規劃成立展覽廳，將備有 3D 掃描儀、電腦、3D 列印之整合系統，透過「動手實做」的理念，讓參訪者能從做中學，玩中學，進而喜愛 3D 數學，推廣數學、科技與文創教育。

前兩次工業革命改變了人類社會，有目共睹，進行中的第三波革命，不論你稱之為電腦、資訊、數位、網路，抑或 3D 革命，其社會影響也日益浮現。既然 3D 未來未定，各種限制無疑就是機會，已經缺席前兩次工業革命的非西方國家，是否準備好了呢？

（王夏聲）