淺談動力系統中的禍福相倚

由阿維拉的工作談起

作者：班榮超

作者簡介：班榮超畢業於國立交通大學應用數學研究所，現為國立東華大學應用數學系教授。主要研究領域為微分方程、動態系統以及遍歷理論。

禍兮福之所倚，福兮禍之所伏。

——《老子》

2014 年在韓國首爾熱熱鬧鬧的舉辦了四年一度的世界數學家大會。會議的重頭戲之一就是在會中頒發數學界的最高獎項——費爾茲獎。這一屆共有四位得主（簡介見《數理人文》第三期與第四期），本文主要是要從其中年紀最輕的得主阿維拉（Artur Avila）談起，阿維拉得獎的理由是由於他在動力系統（dynamical system）上的重要貢獻。由於阿維拉的工作覆蓋大部分動力系統關心的領域及方向，或許透過介紹他的工作，讀者可以一窺動力系統領域所關心的問題及角度。

動力系統大致分為兩大類：連續型及離散型。連續型動力系統一般是透過微分方程來描述，而離散型動力系統主要是由差分方程（或稱變換或映射）所刻畫。本文將把重點放在後者。

如上所述，離散型動力系統一般由某個線性或非線性變換來刻畫整體的動態行為，並透過對此變換的迭代，觀察系統大多數點的終極行為。但因為觀察並追蹤每個點的行為很困難，所以動力系統會關注此變換的不變集（invariant set）。透過研究不變集的拓樸性質及統計性質，不但可以研究此變換之結構，也可以此來嘗試進行分類，這就包括一般所熟知的拓樸熵（topological entropy）以及豪斯朵夫維度（Hausdorff dimension）等。

此外還可從研究主題的角度，再將這個領域細分為算術動力系統、符號動力系統、微分動力系統以及拓樸動力系統等四大類。以下就藉由阿維拉眾多研究中的三項來進行介紹。

穩定還是隨機——單峰映射的半世紀狂熱

本質上，動力系統理論是研究給定系統在經過變換作用下大部分點的終極行為。這個系統可能是我們關心的天氣（天氣預測是動力系統相當關心的課題）、行星軌道、氣體或流體中的粒子行為、眾人的行為模式、生態系的競爭、交通狀態等等。

早在 1970 年代，研究者開始認識到許多複雜的現象或是不變集背後，可能只需要某些簡單機制來驅動即可，其中康托集 （Cantor set，圖 1）就是這類不變集。

劳伦兹吸子

圖 1　先挖掉區間的三分之一，再將剩下的區間在各挖走中間三分之一，以此類推下去，最後得到康托集。康托集的特質是處處不稠密。

至於變換部分，最為人所熟知的莫過於成長映射（logistic map）：$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$（圖 2）[1]，這個函數相當簡單，事實上就是國中生熟知的二次函數，但成長映射在物理、生物、生態學、經濟、電機等科學領域，都扮演相當重要的角色，理由之一是，這個簡單機制既基本卻又能製造出相當複雜的現象， 包括所謂的混沌（chaos）現象。

簡單分析此函數後可以知道，若起始點不在 $[0,1]$ 區間，則它的動態行為很簡單：全部跑到負無窮大。所以研究關心的是位於 $[0,1]$ 中的起始點，這些點不斷迭代後仍會保持在 $[0,1]$ 中。問題是在 $[0,1]$ 中任取一個起始點，迭代無窮多次後，我們能說明該點軌跡的終極行為嗎？

想要回答上述問題，需要透過分歧圖（bifurcation diagram）來分析。成長映射的分歧圖（圖 3）對於開啟對這類映射的大量研究功不可沒。這裡橫軸的部分是參數 r，縱軸是區間 $[0,1]$。取定 r，考慮任意 $[0,1]$ 的起始點不斷迭代後之可能極限點坐標，並將它標記在圖中便得到分歧圖。

若給定參數 r，其對應的成長映射有吸引的 n 週期點（periodic point）[2]，則迭代軌跡就會不斷積累在這些週期點，於是分歧圖上就會顯示這 n 個點。這種情況對應到圖中的白色部分，比較容易理解。但你可能已注意到，隨參數變大，有週期點數突然倍增的現象（這就是分歧）。

但有些參數 r 所對應 x 卻是一片黑壓壓，這代表甚麼現象呢？另外，參數 r 從 3.5 到 4 附近，黑和白的部份看起來是交錯產生的，好像黑中有白，白中有黑（白的部分似乎看起來多一些），這又代表甚麼意思呢？

這類問題開啟了將近 50 年的研究。首先如前述白色部分（中間有幾點黑點）代表相對應參數 r 有吸引的週期點，經過迭代後這些週期點會是所有點迭代的最終歸宿。而對應一整條黑色的參數 r，則代表了給定起始點，在迭代後不會趨近任何地方，無法明確說明它的歸宿。事實上該點的軌跡會在某一個區間中稠密（dense）[3]。正因為無法明確說明它的最終行為，數學家只好採用機率的語言來闡述，這類參數一般稱為隨機參數，另外吸引點為週期點的參數為穩定參數。

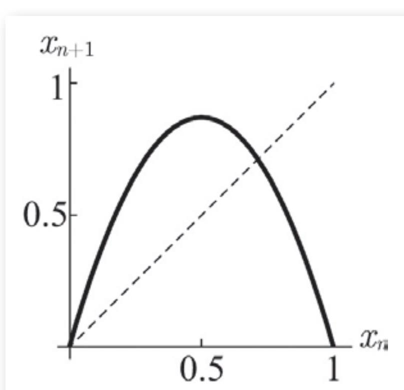


圖 2　$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ 的函數圖形，其中 r 是可以調控的參數。

於是故事就這樣開始了。1970 年代的物理及數學家迫切希望知道，隨機參數是否夠多。所謂夠多是指它是否有正的勒白格測度（Lebesgue measure），也就是說，若將那些黑壓壓部分的參數收集起來，用尺去量，會得出大於零的長度嗎？此外，在參數集 $[0,4]$ 中，穩定參數是不是稠密的？最後，若將隨機參數和穩定

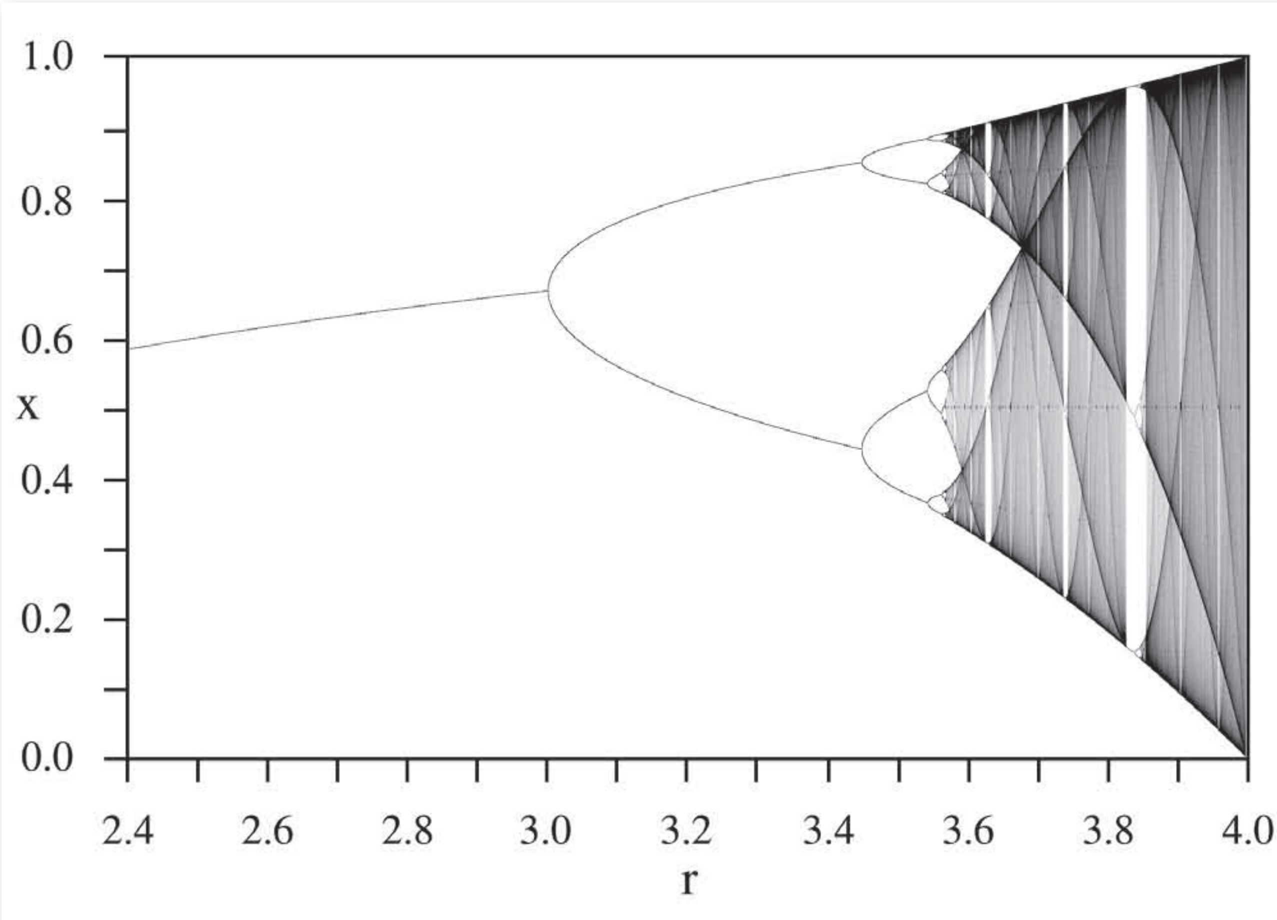


圖 3　分歧圖。（維基百科）

參數聯合起來，這個集合會有滿的勒白格測度嗎？

當然上述這些問題，僅僅只是與分歧圖有關的其中一部分問題。其他譬如我們可以將分岐圖中的任何一個小區間將其局部放大，你會發現它有驚人的自相似性（self-similarity），換句話說，就是放大後的圖形和整體圖形在做過簡單調整後幾乎完全相同。另外，像是為什麼一開始吸引週期點的分歧規則一定是一分二、二分四等等。不過這些問題相對於上段所提的問題，相對比較容易，因此很早就被解決了。

在回答這些問題之前，數學家想先知道成長映射是否具有足夠的代表性？首先古根海默（John Guckenheimer）（1979）、米修雷維茲（Michal Misiurewicz）（1981）證明了任何單峰（unimodal）映射若加上一些條件如施瓦茨導數（Schwarzian derivative）為負，即會和某個成長映射拓樸共軛（topological conjugate）。隨後兩

❶ 編註：logistic equation 原是 1840 年比利時數學家沃赫斯特（Pierre F. Vulhulst）描述人口成長的微分方程， 1976 年生物學家梅（Robert May）以此討論人口成長中的離散化模型而聲名大噪，成為討論混沌現象的重要原始文獻之一。logistic 一詞希臘文原有數算之意（與對數的 log 系出同源），沃赫斯特藉此命名，我們暫用「成長函數」「成長映射」譯之。

❷ 編註：在迭代過程中若有最小的 n 使得 $x_1 = x_{n+1}$ 則 x_1 , x_2 , ... , x_n 稱為 n 週期點。

❸ 編註：一個實數點的附近，不論範圍多小，總是存在有理數，於是數學家就說有理數在實數中是稠密的。一般的稠密性也可以這樣定義。值得注意的是，稠密的集合並不需要很大，例如有理數的勒白格測度為 0。

位費爾茲獎得主米爾諾（John Milnor）及瑟斯頓（William Thurston）於1988年共同提出一個定理，說明幾乎所有的單峰映射都和成長映射中的某參數有相同的動態行為，這幾項研究說明成長映射具有相當的代表性。

回到隨機參數是否夠多的問題，班乃迪克（Michael Benedicks）與卡爾森（Lennart Carleson）（1985）；雅各布森（Michael Jacobson）（1981）首先對於這類問題做出了貢獻，他們證明了隨機參數的勒白格測度確實為正，簡單來講，就是這些參數多到你無法忽略它們。值得一提的是，在班乃迪克和卡爾森的工作中，僅僅只用到微積分的均值定理（mean value theorem），就得出結論，且結果刊在知名期刊《數學年刊》（*Annals of Mathematics*）上。班乃迪克和卡爾森看出這類映射內部有大量的自相似性（self-similarity）可以運用，推廣他們的想法到高維的厄農映射（Hénon map），得到類似的結果，可見數學的洞見或許比高超的技術還要重要些。

至於穩定參數是否稠密的問題，卻要到1997年才有重要突破，盧比奇（Mikhail Lyubich）；格拉齊克（Jacek Graczyk）與史翁特克（Grzegorz Świątek）分別證明了穩定參數確實是稠密的，而且他們還證明穩定參數集是開集。開集有一個特別的意義，就是當對這些參數做小擾動時，仍然會是穩定參數。一般動力系統理論稱這樣的系統是結構穩定的（structural stable），然而隨機參數一般而言則是經不起擾動的。

2002年，盧比奇解答了最後的問題：在扣掉一些勒白格測度零的參數集後，只剩下隨機和穩定參數了，也就是說在0和1之間的區間中，你若是隨便選取一個參數，那它幾乎若不是隨機就是穩定的。這邊要強調是必須扣掉一些勒白格測度為零的參數集，意思是說，其實在這兩者之外，還有一些奇奇怪怪的參數，只不過它們整體的勒白格測度是零罷了。

看起來問題好像大致結束了，但數學家並不滿足於只討論這類特別的映射，所以他們接著問說，對於一般的實解析單峰映射族，剛剛這些問題的答案仍然正確嗎？當然，成長映射就是這一類實解析單峰映射的特例。可想而知，在新的問題裡，過去的許多想法或許仍有可借鏡之處，但方法和工具就必須重新建構了！

首先，克茲洛夫斯基（Oleg Kozlovski）在1990年代末對這類問題做了研究，他有興趣的參數是穩定參數，並且得到在實解析單峰映射中，穩定參數仍然是開集且稠密的重要結果。而問題的其他部分，則在2003年，由阿維拉、他的指導教授德梅洛（Wellington de Melo），以及盧比奇完成了。他們共同證明出實解析單峰映射扣掉一些勒白格測度零的參數集後，若不是穩定參數就是隨機參數，並且隨機參數也有正的勒白格測度。

歷經了將近50年，數學家終於對分歧圖有了一個令人滿意的分析並可以將其結論一般化（也就是推廣到實解析單峰映射的情況）。這也是阿維拉初試啼聲的重要工作，在後來的研究中，他不斷展現能夠綜觀一切並深入最核心問題的數學洞察力。

隨機性：區間置換映射是混合或是弱混合

許多人喜歡買張樂透彩券來試試手氣。你會如何買樂透彩券呢？是由電腦隨機選號？還是有自己固定的選號邏輯？有些人不斷鑽研最近50期的開獎數字，希望能從中看出隱藏的規律或模式，或許哪一天被幸運之神眷顧，真的能看出名堂發大財。看起來那些努力不懈的樂透玩家們應該不相信樂透是真正隨機的吧。到底什麼隨機性呢？

隨機性一直都是動力系統學家相當關心的重要議題（試想若樂透不是隨機的，總有一組數字經常出現，那或許就不是數學問題了！）從動力系統的角度來說，我們試圖天真的想對所有的系統以其隨機程度來分類，換句話說，就是如果你給我一個動力

系統，我希望可以經由計算或檢查某些指標，就能告訴你這系統有多隨機。

這裡我用撲克牌來做比喻，每次牌局結束後，某人就會開始重新洗牌，當然大家希望牌洗得越乾淨越好。至於何謂乾淨可以這樣解釋：每一張牌出現在某一固定位置是隨機的，換句話說，以 52 張牌為例，就是機率 $\frac{1}{52}$。

同時我們也藉由撲克牌的比喻，順變提一下動力系統中一些拓樸混合（topological mixing）的概念。一副牌經洗牌後已經（拓樸）混合，就是說在某有限次的洗牌後，原本牌中任意兩堆原本不交錯的牌 [1]，都會被洗混在一起，也就是說這兩部分的牌經洗牌後一定會交錯。另外一個比較弱的洗牌概念是不可約的（irreducible），意思是說任兩堆不交錯的牌雖然終究會洗混在一起，但是洗混所需要的洗牌次數，卻取決這兩堆牌的最初位置。

最後我們說某個洗牌法是是遍歷（ergodic）的，就是在洗牌的過程中某張特定的牌一定會走遍所有地方，也就是說這張牌經洗牌後會遊歷所有位置（遍歷的字面意思就是到處皆會拜訪）。

看起來牌若洗得乾淨，這副牌應該會具備最好的隨機性：也就是完完全全地混合在一起了！當然這裡的要求是要洗足夠多次。

在電影中，我們看到另外一種洗牌方式——切牌。通常這種賭神級的洗牌方式相當高段，也是魔術師最常使用的洗牌方式，看起來帥氣又俐落。但這和一般洗牌的差別在哪裡呢？

解構洗牌和切牌的動作後發現，這兩種方式都是將牌先分成兩部分，然後不斷地對他們做置換或交錯（洗牌有時會交錯，切牌一般就只是置換），但洗牌時每次的牌堆的分解方式是隨機的，並且置換或交錯也是隨機的，也就是每次要那些牌堆和那些牌堆進行交換是沒有一定的規則，也正是由於這種缺乏邏輯的特質，造成最後牌形的高度隨機。

現在我們針對切牌的動作進行分析。切牌是每次先拿出兩堆（或三堆以上，若技術高超的話）不等量的牌堆，再進行置換；之後以此類推的重複進行分解牌堆再置換的動作多次。

問題是，透過這樣的過程洗的牌夠隨機嗎？若是，那是哪種程度的隨機？假使這問題的解答是不夠隨機，那奉勸各位在賭局時，若有莊家用這種洗牌方式，在可能的範圍內你不妨自己也隨機洗洗牌或許較為保險。

數學家將切牌這種動力系統加以數學模型化，模型化後的變換稱為區間變換映射（interval exchange transformation）。透過剛剛的介紹，底下給出正式的定義。固定一數 L 和分割數 d，再指定 d - 置換 P 與一個向量 $\mathbf{L}=(L_1,L_2,\cdots,L_d)$，其中 $L_1+L_2+\cdots+L_d=L$，$\mathbf{L}$ 代表長度 L 分割成不等量小區間的分割模式（在切牌的比喻就是考慮 $d=2$，並且 $L_1+L_2=52$），區間分割好之後，再根據置換 P 重新排序，這就完成第一次的區間置換映射，之後以此類推，不斷重複同樣的操作。

我們要考慮的是對於區間變換映射的隨機性分類。傳統上，動力系統的隨機性是透過測度空間中的混合性來闡述。給定變換 $T:X\longrightarrow X$，T是強混合（strong mixing）的意思，就是任兩個 X 中的子集 A 及 B 經由變換 T 的迭代後會漸趨於獨立，數學上的意義就是 $m(T^{-k}A\cap B)\rightarrow m(A)m(B)$

另一種較弱的弱混合（weak mixing）性質，則是將兩集合在 T 的迭代後趨於獨立的性質，減弱成在平均意義下趨於獨立，簡而言之就是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|m(T^{-k}A\cap B)\rightarrow m(A)m(B)\right|=0$$

最弱的一種隨機性就是剛剛提過的遍歷性，數學上是指對於變換 T 的任何測度不變集若不是 m 滿測集就是零測集。通常一遍歷系統會存在稠密的軌

[1] 一堆牌中的某張牌會落入另外一堆牌中稱為交錯。

薛丁格。（Smithsonian Institution Libraries）

道，也就是說，存在一個點它的 T 軌跡會拜訪所有位置，這就對應了上述樸克牌的例子，如果一個系統最終的隨機性是遍歷而不是強混合，那就表示你可以等，因為既然有一個點的軌跡會拜訪所有地方，那它會不會拜訪你希望它去到的位置只是時間的問題罷了。同理，你若知道系統是強混合就不用指望去等了，因為強混合代表任兩個位置都不會有關連，比起遍歷，強混合更像是丟硬幣，因為每次出現面朝上的機會都是 $\frac{1}{2}$，不會因為之前出現了 200 次面朝下，下一次就有很大的機率面朝上，這不是有恆心就可以解決的問題。

很容易判斷強混合一定蘊含了弱混合，弱混合蘊含了遍歷性。但每一個反過來都是不正確的。早在 1980 年，卡托克（Anatole Katok）就證明了區間置換映射一定不會是強混合，如他所述那只剩兩個可能性了：要不是弱混合就是遍歷！

同樣地，在 1982 年時，梅舍（Howard Masur）、威奇（William Veech）各自發表了底下的結果：幾乎所有的區間置換映射都是唯一遍歷的。換句話說，就是裡面存在唯一的不變遍歷測度。這個事實透露一個重要的訊息，就是大部分區間置換映射的隨機性基本上應該比遍歷性還好一些。上述的兩個研究，暗示我們可以合理猜測區間置換映射的隨機性可能是弱混合。

這邊先岔開一個話題，如果置換 P 是一個循環置換（cyclic permutation），可以證明以 P 為置換的區間置換映射一定不是弱混合，並且會拓樸共軛到已經被研究透澈的圓上旋轉；此外我們感興趣的是不可約的置換 P，因為這類置換已經具備足夠的代表性。

此外，卡托克除了在 1980 年證出區間置換映射一定不是強混合外，在更早的 1967 年，他和斯捷平（Anatolii Stepin）也證得對幾乎所有的 $d=3$ 的情況，區間置換映射都是弱混合。1984 年，威奇處理 d 是無窮大的情況也得到類似的結果。這兩個結果揭示，當 d 很小以及很大的情況中，對於不可約且非循環的置換 P 以及幾乎所有的 $\mathbf{L}$，區間置換映射都是弱混合。

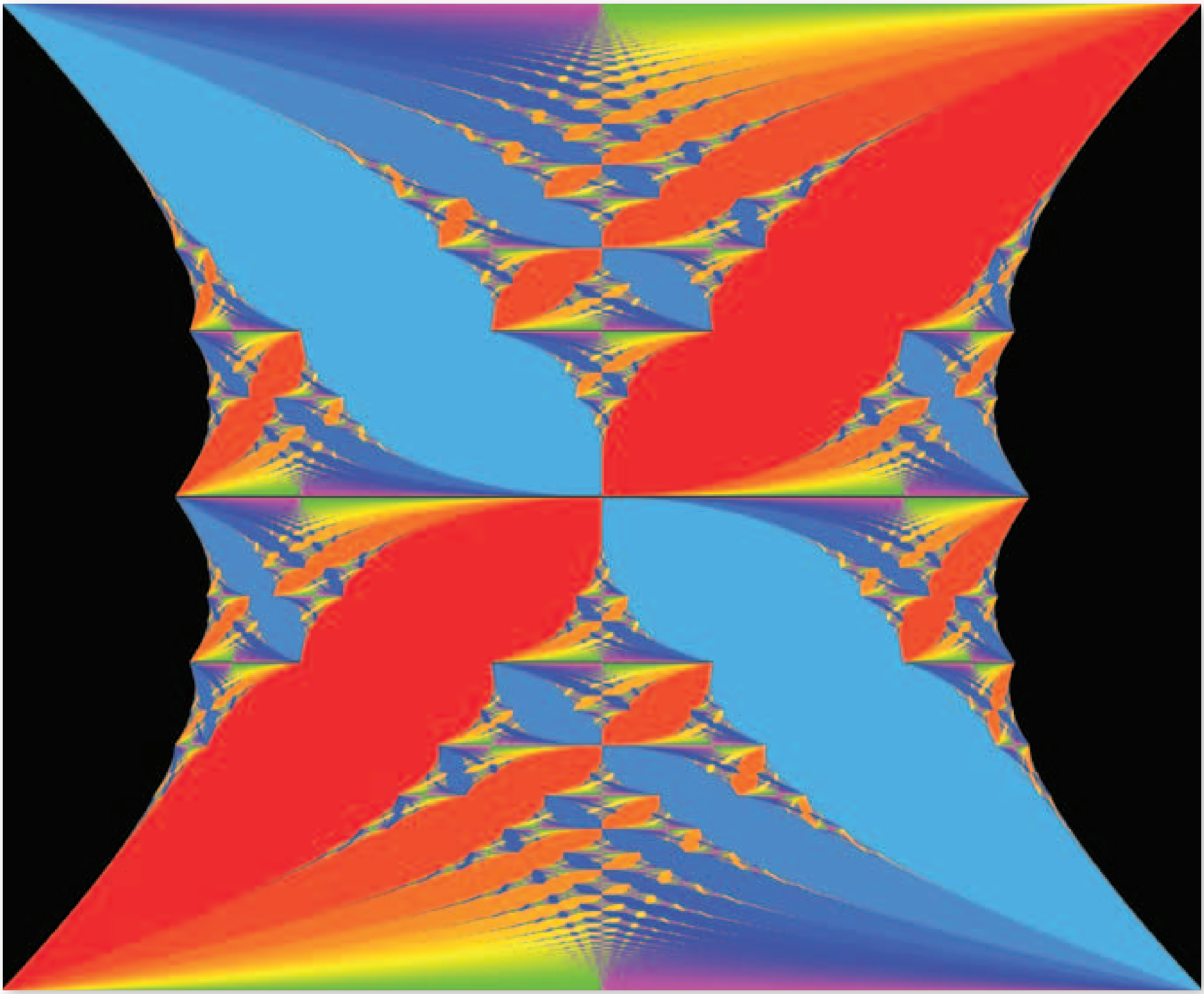
那介於中間的情況呢？關於這方面的結果，中間其實間隔了很多年。不過在阿維拉證出最後最完整的工作之前還是有一些局部的成果，包括諾蓋拉（Arnaldo Nogueira）和魯道夫（Daniel Rudolph）在 1997 年共同得到的、不涉及測度討論的拓樸結果，亦即大部分區間置換映射都是拓樸混合的。

到了 2007 年，阿維拉和其合作者芙尼（Giovanni Forni）再一次透過驚人的洞察力，檢視從前所有的研究結果，找出最本質概念，證明了對於不可約及非循環置換 P 且對於幾乎所有的 $\mathbf{L}$，區間置換映射一定是弱混合！

這個結果說明在大部分的情況下，切牌不像一般洗牌方式那麼隨機，它擁有稍微次等的隨機性。但值得強調的是這樣的隨機性也不低了，至少比遍歷性高，至於這中間是否許有高手可以施展老千的空間，我們就不得而知了。

十杯馬丁尼酒問題：物理和數學美妙的結合

大部分動力系統的理論都可以應用到現實世界，畢竟問題來自於現實世界，所以也終將回歸到起源之地。



霍夫施塔特蝴蝶。（維基百科）

阿維拉在他的眾多研究中，也很關心基礎理論的應用，其中最迷人的莫過於薛丁格算子（Schrödinger operator）的工作。

薛丁格方程是描述物理系統量子態如何隨時間演化的微分方程式，因奧地利物理學家薛丁格（Erwin Schrödinger）而命名。一維的薛丁格方程如下：

$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

若將其離散化，就會形成如下的算子：

$(H\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n)$

物理學家們有興趣的是將上述算子賦予一種特別的能量後所形成的算子：

$$\begin{aligned}(H_{\alpha,\lambda,\theta}\psi)(n) \quad = \quad & \psi(n+1) + \psi(n-1) \\ & +\lambda\cos(2\pi(\alpha n+\theta))\psi(n)\end{aligned}$$

此算子稱為近馬蒂厄算子（almost Mathieu operator），因為它和底下熟知的馬蒂厄方程式相似：

$-y''(x) + (\lambda\cos x)\,y(x) = Ey(x)$

我們感興趣的是近馬蒂厄算子的譜分析（spectral analysis），理由是此算子的譜集和電子在外加磁場後形成的能量狀態有緊密關聯，將我們感興趣的集合表達如下：

$S(\alpha,\lambda) = \bigcup_\theta \sigma(\alpha,\lambda,\theta)$

其中 $\sigma(\alpha,\lambda,\theta)$ 是 $H_{\alpha,\lambda,\theta}$ 的譜集。

故事的焦點是 α。若 α 是有理數 $\frac{p}{q}$，則透過有名的弗洛凱－布洛克定理（Floquet - Bloch's Theorem），可以證明 $\sigma(\alpha,\lambda,\theta)$ 由 q 個閉區間組成，這些閉區間被一些間隙（gap）所隔開。早期物理學家也很關注這些間隙的大小，事實上，這些間隙的大小比 $(|\lambda|/16)^q$ 來的大。

既然在 α 是有理數的情況，$H_{\alpha,\lambda,\theta}$ 的譜集結構大致清楚了，於是數學家就將興趣集中在 α 不是有理數的情況，但由於可能的參數太多，要如何縮減重要而有效的討論範圍呢？

法國物理學家奧布里（Serge Aubry）首先發現在 α 是有理數時，其譜集滿足下面的等式：

$S(\alpha,\lambda)=\frac{\lambda}{2}S(\alpha,4/\lambda)$

後續數學家更發現即使在無理數時，$\lambda\leftrightarrow\lambda/4$ 在譜集上也有明顯的對應，這就是著名的奧布里對偶性（Aubry's duality）。這個重大發現的好處，是可以將所需討論的參數縮減至 $0\leq|\lambda|\leq 2$ 的範圍，然後再透過奧布里對偶性得到其他範圍的結果。

所以接下來將範圍鎖定在 $0\leq|\lambda|\leq 2$ 且 α 為無理數。要如何對譜集 $S(\alpha,\lambda)$ 進行研究呢？事實上這個問題可分成兩個部份，第一是大小，第二是結構。所謂大小，就是希望了解它的勒白格測度，是否這個譜集有正的勒白格測度？若有，又是多大？所謂結構，則是希望知道它是否為康托集（也就是無處稠密集，nowhere dense）。一旦可以判斷為康托集，就可以引入豪斯多夫維度，度量它的碎形維度（fractal dimension）。

首先，物理學家與數學家們針對其勒白格測度的大小在 1980 年代做了不少工作，其中包括奧布里與安德烈（Gilles André）（1980）；叟勒斯（David Thouless）（1983）；艾弗容（Joseph Avron）、凡穆歐（Pierre van Mouche）與賽門（Barry Simon）（1990）等，估計了 $S(\alpha,\lambda)$ 的大小，一般相信其大小等於 $4-2|\lambda|$，但上述研究都只是針對特殊的 λ 值來探討。

其中也有人曾引進數論的工具來討論。1990 年代之中最好的工作，莫過於針對 λ 值的連分數展式其係數無界的情況，證明其勒白格測度為 $4-2|\lambda|$ 的漂亮結果，雖然這項研究已經涵蓋大部分的 λ，但仍不是全部。

最後，阿維拉及其合作者克里科里安（Raphaël Krikorian）彙整了各種觀點的洞察，在 2006 年給出了最完整的解答，他們證明對於所有的無理數 α，得到了勒白格測度 $|S(\alpha,\lambda)|=4-2|\lambda|$ 的公式。

接下來談談譜集結構的研究，圖 6 是針對 α 以及 $H_{\alpha,\lambda}$ 的譜集圖，由該圖中我們可以看出內部有驚人的自相似性，合理的猜想是該譜集是康托集。這個猜想就是著名的十杯馬丁尼酒問題（The Ten Martini Problem），源起於賽門在 1982 年對於近馬蒂厄算子提出的 15 個問題，其中第四個問題的敘述中提到，若有人可以證明該譜集是康托集，則數學家卡茲（Mark Kac）將提供十杯馬丁尼酒來感謝並表彰他的工作。

事實上，這類問題早在 1976 年，就已由物理學家霍夫施塔特（Douglas Hofsadter，中文名侯世達）從數值計算觀察到，霍夫施塔特後來雖離開物理，轉往認知科學與哲學發展，但他當初貢獻的這幅名為霍夫施塔特蝴蝶的圖，仍然一直引導該領域持續探討這個驚人的現象 [1]。

對於是否為康托集的研究，從 1980 年代至今已累積相當多的結果，其中包括賽門（1982）；西奈（Yakov Sinaĭ）（1987）；赫弗（Bernard Helffer）與賀思特朗（Johannes Sjöstrand）（1989）；賴斯特（Yoram Last）（1994）；沛格（Joaquim Puig）（2004）等做出了貢獻，但都是循序漸進對某些特定參數集證明其譜集為康托集，終於在 2009 年，阿維拉和其合作者統合所有的結果與想法，證明了

$S(\alpha, \lambda)$ 是康托集，這工作也宣告十杯馬丁尼酒問題的終結。

至於阿維拉是否有喝到卡茲的十杯馬丁尼酒就不得而知了。

結論：亂中有序？

仔細審視前述阿維拉的三項研究。第一部分他關心針對一個帶參數的成長映射族，證明在其參數空間中，絕大部分的機會你要不是選到穩定參數，不然就會選到隨機參數。針對他在區間置換映射的工作中，我們也可以這樣解釋：你在區間置換映射中，要不是會選取到循環置換 P（其動力系統等價於圓上的旋轉），不然就是弱混合，意思就是，你絕大部分可能要不是選到隨機性低的區間置換映射，不然就是隨機性高的系統。同樣的，在近馬蒂厄算子的工作中，他證明了這算子的譜集要不是亞臨界就是超臨界 （相當於一個結構簡單，而另一個結構相對複雜）。

這三項工作都提供一個共同的訊息：這些參數族中總是不乏結構簡單和結構複雜的系統，交織穿插其中且密不可分！而這也是動力系統理論一直以來所關心的核心概念，混亂和有序總是互相交雜無法分割。

這大不同於 1950 年代之前的概念，因為那時渾沌的概念還沒有明確產生，一般相信這世界大部分的情況都是結構簡單的，或是總會趨近於結構簡單的一種趨勢。然而自從 1975 年，在李天岩與約克（James Yorke）將渾沌的概念帶入我們的知識系統後，許多學者透過無數的研究後，發現事實上無序及混亂其實是無所不在的，一個夠豐富的系統總是會不斷地產生混亂，然後有序，之後再混亂等等。而阿維拉的幾項重要研究，就是不斷鎖定並闡述這樣的一種自然機制。

另外還有一個值得深思的問題：真的存在絕對的混亂無序嗎？事實上，亂中有序也是動力系統經常出現的重要概念，這不禁讓作者連想到一個經典的數論定理，葛林（Ben Green）與陶哲軒在 2004 年，證明了質數具有任意長度的等差數列（算術數列）！這定理所代表的深刻內涵在於，若你將質數看作是相當混亂無序的數列，但事實上它裡面又藏著無窮多有序的等差數列 [2]，葛林－陶定理同時也透露一個訊息，你或許不喜歡混亂無序，但混亂無序裡其實可能隱藏著相當程度的有序性，這正和阿維拉的研究互相呼應——混亂與有序是密不可分的。

《老子》內有句話：「禍兮福之所倚，福兮禍之所伏。」，這和以上的西方理論概念，是不是互相輝映呢？∞

延伸閱讀

▶ Lin, Thomas & Klarreich, Erica “A Brazilian Wunderkind Who Calms Chaos”。*Quanta* 雜誌 2014 年介紹阿維拉得獎的文章。

https://www.quantamagazine.org/20140812-a-brazilian-wunderkind-who-calms-chaos/

▶ Leys, Jos; Ghys, Étienne & Alvarez, Aurélien: *Chaos, A Mathematical Adventure*。繼 *Dimension* 之後，三人再度合作，以九堂課各 13 分鐘精美的動畫電影，介紹動力系統與混沌。影片有簡體中文字幕。

http://www.chaos-math.org/en

▶ Briggs, John & Peat, F. David, *Turbulent Mirror: An Illustrated Guide to Chaos Theory and the Science of Wholeness*。臺灣譯本《混沌魔鏡》（1993），王彥文譯，牛頓出版社。

---

[1] 編註：事實上，2013 年一個跨美日的物理團隊，才首次在石墨烯實驗中觀測到這種罕見的碎形能譜，驗證了霍夫施塔特蝴蝶的計算預測。

[2] 葛林－陶定理出現之前也有許多類似定裡，說明許多看似無序的數列中一定會有算術數列的性質，這部分的問題現在已是多重遍歷論的研究範疇。