

演奏朗蘭茲的中國數學四重奏

以友情之橋跨越數論與幾何的惡水

作者：哈奈特（Kevin Hartnett） 譯者：林奕君

哈奈特是知名科普作者。除了在《波士頓地球報》開設專欄，文章也散見各報章雜誌，並收錄於《最佳數學寫作選集》。

袁新意和張偉的首次合作，是在一趟前往美國社會安全局的路上。那是 2004 年秋天，當時兩人同為美國哥倫比亞大學（以下簡稱「哥大」）年輕有為的數學研究生。他們在北京大學就是同學，但袁新意比張偉早一年到哥大，所以他協助剛到的朋友辦理社會安全號碼（social security number），但那次合作並不順利。

袁新意回憶說：「我們到那裡之後，才發現張偉的文件帶不齊全，所以沒有辦成。」

這是兩人到美國後，為數不多的失敗合作經驗。張偉目前是哥大數學系教授，袁新意是加州大學柏克萊分校助理教授，兩人是非正式的「中國數學四重奏」成員。這個組合的四位數學家，在 2000 年代早期讀北大時就結為好友，現在都任職於世界頂尖的數學系。

一群菁英數學家來自同一所大學的同一班，雖然不尋常，但並非前所未見。最近還有另一個例子，巴噶瓦（Manjul Bhargava）、凱德拉雅（Kiran Kedlaya）和吳力行（Lenny Ng）是哈佛的同學，三人後來都成為傑出的數學家，並保持彼此的友誼。2014 年巴噶瓦榮獲費爾茲獎時，他們三位都飛往首爾，共享這份喜悅。

這四位中國數學家組合的特別之處，在於他們持續保持密切合作，並取得卓越的研究成果。

任職於普林斯頓大學的數學家張壽武說：「他們不僅優秀，研究領域也幾乎相同。他們一起學習，互相影響，而且成為成熟的數學家後，依然保持合

作。」張壽武不但與這四人都認識，也曾經協助張偉與袁新意到美國攻讀博士。

這個四重奏組合的另外兩位成員，是史丹佛大學的惲之瑋副教授和加州理工大學的朱歆文副教授。他們兩人的研究領域都是代數幾何，而張偉和袁新意則專攻數論。這樣的組合，使他們能補足彼此對朗蘭茲綱領（Langlands program）欠缺的視角。

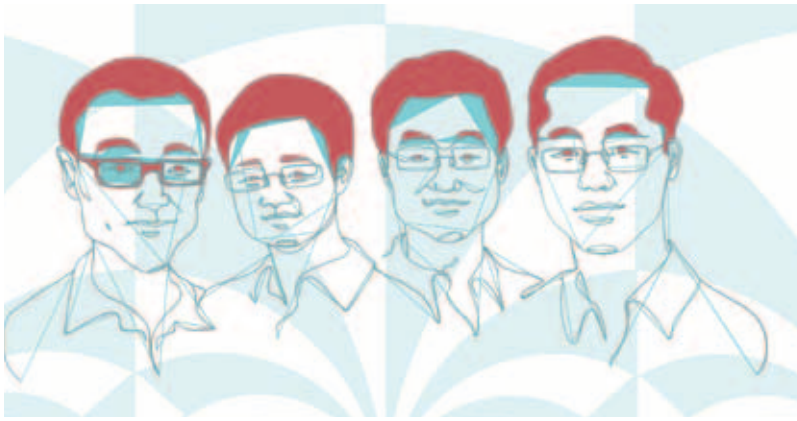
朗蘭茲綱領也許是目前數學領域中最重要的研究綱領，柏克萊的數學家傅倫科（Edward Frenkel，他也是朱歆文的指導教授）稱之為「數學的大一統理論」。這項理論是在 1960 年代，由數學家朗蘭茲（Robert Langlands）提出的。朗蘭茲試圖建立數論與幾何的關聯，讓其中一個領域的工具能用來探索另一個領域。

想要研究朗蘭茲綱領，有一個很大的障礙。一位數學家很難憑一己之力，同時精通數論和幾何到足以理解這兩大領域之間所有關聯的地步。同時，研究領域不同的數學家彼此之間，也可能存有數學語言的溝通障礙。因此最好的合作情況是，合作者要各自深入理解本身的領域，同時也要有足夠的共同知識，可以和對方交流。

這正是這四位數學家的優勢。他們不僅都有天賦，分別鑽研各自感興趣的領域多年，而且彼此關係友好，背景一致，對於數學研究的看法也類似。這使得他們能夠互相勉勵、切磋、一起合作完成個人無法輕易完成的研究。他們曾經一起發表比較小的論文。最近張偉和惲之瑋將發表的論文^①，則是



Quanta 是西蒙斯基金會（Simons Foundation）出版但編輯獨立之網路科普雜誌（<http://www.quantamagazine.org/>），希望能提高數學、物理與生命科學前沿研究進展的公眾能見度。本文譯自：<https://www.quantamagazine.org/20151208-four-mathematicians/>
本刊感謝 QUANTAMagazine.org 與主編 Thomas Lin 同意翻譯轉載，翻譯之文責由本刊自負。



由左至右，分別為張偉、朱歆文、惲之璋、袁新意。
(圖 Olena Shmahalo/Quanta Magazine)

他們最新、也是迄今成就最大的研究成果，已經被譽為數論重要領域近 30 年來最振奮人心的突破。

青春歲月

這四位數學家成長於中國的不同地區，是數學的力量讓他們相遇。朱歆文來自四川成都。惲之璋是江蘇常州人，最初對書法更有興趣。但在小學三年級時，老師注意到他的數學潛力，並為他解釋循環小數 $0.9999\cdots = 1$ 。這個出乎意料的結果讓惲之璋困惑了幾個月，卻也讓他從此迷上數學。

袁新意的成長背景是四人中最艱困的。他出生於武漢附近一個貧困的鄉村，當地教育資源匱乏，很難想像能培養出數學天才。但老師們很快就發現袁新意的天賦。

袁新意說：「一年級和二年級的時候，數學老師就非常喜歡我。他們對我的能力非常驚訝，因為我常常在考試中獲得滿分。」他之後進入頗負盛名的黃岡中學就讀。

和世界許多其他國家一樣，中國也有讓數學天才最終能聚在一起的機制。張偉的家鄉——四川東部的達州——距成都 300 公里，他在十年級的數學夏令營中，第一次遇見朱歆文。而惲之璋和袁新意兩人，則都是中國數學奧林匹亞國家隊的成員，這充分顯示出他們有高超的解題技巧和才能。

2000 年 8 月，四人都進入北京大學數學系，該系當年共有 200 名新生入學。同班有許多同學都擅長數學，但大部分同學傾向到實用領域追求職涯的發展，像是財務金融或資訊工程。到了大三，全班

按照興趣重新分組，四人發現他們一起被分到一個專攻純數學的小組。

從那時起，四人成為好友。和一般大學生無異，他們一起看電影、爬山、踢足球、打籃球。他們公認袁新意的運動神經最好，常常是贏家。在這段期間，不論是課堂上或平時自行安排的討論中，他們也開始首次接觸一些數學概念——例如自守形式 (automorphic form)，日後將成為他們的研究交匯處。而當他們踏入更高層的數學世界，才意識到彼此都著迷於同類型的數學研究。

惲之璋說：「大學快畢業的時候，我很清楚我們四人對數學的品味相投。我們都欣賞基於結構的數學，而且我們感興趣的不是計算而是問題的整體樣貌。我們也都喜歡找出有趣的例子來展示最一般的原理。」

帶著這樣的研究觀點，袁新意是四人之中最早留美的一位。他在 2003 年前往哥大，跟張壽武做研究。他之所以出國，是覺得自己的數學潛力在中國很難發揮。

他說：「我覺得 [自己接觸過的] 北大教授還不夠好，不是第一流的數學家。我想早點來美國，看看真正的數學大師。」

袁新意的研究生經驗，顯然遠超過他的預期。他不但與最優秀的數學家共同參加學術會議和演講，也正因為他能與這些數學家近距離接觸，使袁新意對自己鑽研的數學領域所擁有的巨大潛力，有了全新體悟。

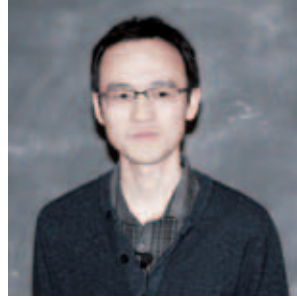
① 譯註：目前已經發表在數學預印本網站 arXiv.org
<http://arxiv.org/abs/1512.02683>



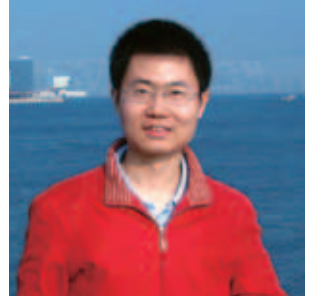
袁新意。



朱歆文。（截圖自IHES演講影片）



張偉。



惲之瑋。

他說：「在中國，數學家過得沒有那麼開心，讓人感覺他們研究數學並不樂在其中，給人的印象是數學很難，想要一輩子以它為業的話，務必要三思。哥大這裡則完全不同。其中很重要的一點，是我在這兒看到研究數學的快樂，動機充沛，前景樂觀。這是我在中國看不到的部分。」

一年後，袁新意的朋友們也都來到美國——朱歆文去柏克萊，惲之瑋去普林斯頓大學，而張偉同樣來到哥大。張偉還記得他剛到美國時，算錯收到第一張助學金支票的日期，差點落得身無分文。當時拔刀相助的，正是早一年出國，已經摸熟美國直接轉帳（direct deposit）奧妙的袁新意。

更重要的是，袁新意協助張偉在哥大數學系找到自己的研究定位。張偉說：「他幫助我以更直接的方式，了解每位教授的研究領域。」張偉對張壽武的研究特別感興趣（張壽武之後離開哥大，前往普林斯頓任教。）張壽武同時研究數論和算術代數幾何，張偉非常佩服他「跳出蕪雜的技術細節，揭露背後本質原理」的能力。

最後張偉決定選擇現代數論最有趣的核心主題——L函數，作為博士論文題目。他特別感興趣的部分，在於如何將原本只適用於某些L函數的葛羅斯/札基爾公式（Gross-Zagier formula），推廣到更大範圍的L函數。這個問題預見了他與惲之瑋目前的最新研究成果，也與張壽武的研究主題密切相關，但又能不侷限於彼。張偉發現在美國即使是一名研究生，也能夠自由規劃在數學汪洋的航線，如果自己留在中國，可能就沒有這種事了。

張壽武說：「中國的研究方式，是你要百分之百聽從老師的意見，做他們研究領域剩下的問題。美

國的方式則是你在聽取老師建議後，再因應的調整自己的腳步。」

當張偉在探索L函數的同時，袁新意正在鑽研數論。而惲之瑋和朱歆文，則在進行代數幾何的研究計畫。無論是研究生時期或畢業之後，他們四人都保持密切聯繫。而他們彼此的研究之路，也經常在這個國家的數學研究中心交會。惲之瑋在麻省理工學院進行博士後研究時，朱歆文正好在也座落於麻州劍橋的哈佛大學；另外，袁新意和惲之瑋則於2008-2009學年度，在普林斯頓有過一年交集。

在普林斯頓那年，袁新意和惲之瑋常常一起討論，也開始發展出他們的合作方式。在非正式的場合，袁新意向他的幾何學家朋友解釋數論的巧妙之處，他們可以用華語輕鬆的交談。袁新意很清楚惲之瑋知道什麼，不知道什麼。而惲之瑋則可隨意提問，即使問了非常簡單的問題，也不必擔心丟臉。惲之瑋說：「因為他能為我解釋很多東西，讓我發現數論不像以前感覺的那麼難。」

有了這些討論，再加上2010年費爾茲獎得主吳寶珠（Ngô Bảo Châu）的研究，惲之瑋意識到代數幾何裡有很多技巧，都可以用於解決數論的問題。這正是朗蘭茲綱領的目標。對惲之瑋來說，這已經是顯而易見。他所需要的，只是找到合適的問題來研究。

大突破

2014年12月，張偉從紐約飛到西岸，和惲之瑋與袁新意碰面。張偉之所以會有這趟旅程，起因雖然是參加在柏克萊數學科學研究所（MSRI）為哥大數學家哈里斯（Michael Harris）舉辦的60大壽

學術研討會。但更重要的，其實是張偉有個想法要和朋友分享。張偉的這個想法，源自 2011 年他與惲之瑋的一次對話。當時惲之瑋正在思考張偉先前研究算術基本引理的成果，這是朗蘭茲綱領中的一個問題。惲之瑋認為其中某些想法可以結合代數幾何的技巧，但他不確定是否真的可行。

惲之瑋說：「我有某種可能是對的幾何觀察，但卻無法精確描述，因為我缺乏數論的視角。我問張偉，你覺得這是對的嗎？他也不肯定。」

這段對話就這麼沉寂了幾年。直到 2014 年，張偉意識到惲之瑋的直覺是對的，於是開始著手證明。這個問題涉及他在研究所曾鑽研過的 L 函數。L 函數可做某種泰勒展開，表示成冪級數的和。1986 年時，葛羅斯（Benedict Gross）和札基爾（Don Zagier），已經成功算出展開式的第一項。

雖然 L 函數最初是純數論的問題，但它也有幾何上的詮釋，可用代數幾何威力強大的方法來研究。惲之瑋猜想這個泰勒展開式的每一項，應該都有幾何的解釋，而張偉能精確定義這種解釋的形式。比起法國數學家瓦茲伯格（Jean-Loup Waldspurger），以及葛羅斯和札基爾求得展開式的前兩項。他們的新研究，則可得到每一項的幾何公式。^②

張偉在袁新意家裡，向惲之瑋和袁新意解釋他的想法。惲之瑋回想自己在聽的過程，意識到張偉的想法配合得天衣無縫，因此一定是對的。

惲之瑋說：「他具有一種全方位的視野，可以精確描述我腦中模糊的概念。當他描繪出完整圖像的那一刻，我覺得自己真的被震懾住了，因為結果是如此優美。」

當晚之後，張偉和惲之瑋花了九個月證明他們的想法。2015 年 9 月，論文初稿大致成形。他們開始在非正式研討會中，談及他們這項研究。正式論文則在 11 月底完稿。已經看過論文的張壽武估計，他們兩人合作完成的速度，至少比張偉單獨研究超前一年，而且這還得假設張偉能夠自行發現這個研究策略。

這項研究成果雖然還需同行審閱，但已在數學界掀起一片興奮討論。它可以應用到許多問題，為這些難題打開全新的窗口，其中一例是著名的伯奇 / 斯溫諾頓戴爾猜想（Birch and Swinnerton-Dyer conjecture）。這個猜想是千禧年七大數學難題之一，首先解決的人可以得到一百萬美元獎金。

但張偉和惲之瑋最新研究成果所造成的影響，已然超越數學本身。他們在青少年時期相識，而且與朱歆文和袁新意兩人，跨越兩個大陸一同成長，也一起成為成熟的數學家。現在這份友誼的價值，正逐漸往更廣大的數學世界擴散。

張壽武說：「他們四人各有風格，解決問題的方法也不同。當他們結合起來，結果真的棒透了。」^③

本文出處

QUANTAMagazine.org, December 8, 2015

譯者簡介

林奕君現為臺灣大學數學系四年級學生。

^② 編註：瓦茲伯格或葛羅斯 / 札基爾是針對 number field（數體），而惲之瑋 / 張偉則是針對 function field（函數體），因此這裡的推廣是一種類比的推廣，不是說惲之瑋 / 張偉將前面兩組人算不出來的後面項給算出來了。