



## 格羅騰迪克的晚年手稿

無恆產者的遺產之爭

2014年11月過世的數學大師格羅騰迪克可能怎麼也想不到一年多後，竟然有三方人馬——包括他的五名子女、法國國家圖書館，以及蒙貝里耶大學，準備對簿公堂爭奪他的遺稿。格羅騰迪克家人僱了法國知名律師，向這些機構爭取父親手稿所有權。據知法國國家圖書館擁有三萬頁手稿，而最新消息是，蒙貝里耶大學已同意將格羅騰迪克的兩萬頁手稿歸還給他的子女。

格羅騰迪克精力過人，在他數學全盛時期，就已不斷寫作。在學生或友人回憶裡，他對寫作的擅長、嚴謹與執著，一直很具個人特色（見本期文章〈猶存俠骨齊夷意〉）。例如他傳授數學技藝的訣竅是要求學生撰寫講義，他再一頁一頁用紅筆批註；有人想以討論班發展他的想法，他光預備性的講義一次就送上幾百頁。

1971年他自IHÉS辭職，斷離數學，此後的數學手稿（沒有矛盾！），往往是洋洋灑灑的幾千頁。他知名的「自傳」《收割與播種》是堂堂四大冊書。另外在1995年獲得格羅騰迪克數學文件授權的關門弟子馬爾瓜（J. Malgoire，蒙貝里耶大學的文件就來自他），曾經在格羅騰迪克1991年逝世前一年的10月，親眼看到他燒掉約25,000頁的文件。

傑克森（A. Jackson）在她為*Notices*寫的報導中，用「沉落的輕盈」描述格羅騰迪克隱居時的解脫。不過他在庇里牛斯山麓隱居後，顯然依舊筆耕不輟。事實上他的子女除了前述庭訟，還運了五大桶文件交給巴黎的罕見文件商吉羅（J-P Gillot），希望為父親作品評估合理的價位，鐵桶中估計至少有三萬頁手稿。

由於格羅騰迪克不僅是20世紀絕對的數學大師，在生態與和平運動中也宛如「偶像」，加上他晚年每有與神靈相通的文字（一般相信是精神問題），外界對他逝世最後20年未出版的「胡寫」（他自己的用詞），充滿各種臆測。他的晚年手稿是前衛數學、新哲學、宗教啟示，抑或納粹屠殺猶

太犧牲者的故事？真是充滿屬於天才的神祕。

格羅騰迪克早期對於數學研究的分享與傳播是驚人的無私，他的所有著作都是服務數學社群，這是眾人皆知的美事。但1971年離開數學界後，他似乎精神上日益受到外部體系的困擾，最後反過來質疑以前的數學夥伴沽名釣譽、剽竊腐壞。《收割與播種》以及他拒領克拉福德獎的報紙投書，雖然所言不無道理，激切、誠摯而深刻，但似乎也透露出一種人格逐漸內縮的氣味。

他隱居的1990年代，電腦、網路日益便利，許多受他感召的人，自動把他的巨幅著作如EGA、SGA或《收割與播種》等，重新以LaTeX重排或掃描，放在網路分享全世界的網友。尊崇他的人更為他設立《格羅騰迪克圈》（Grothendieck Circle）網站，放上許多討論性或傳記性的文章照片，也包含他著作的電子版、翻譯版。

2010年，格羅騰迪克突然致信前學生易路齊（Luc Illusie），裡面是一張措辭強硬的「禁止出版聲明」：

我不希望出版或重印任何以我著作的作品或文件，無論任何形式如印刷或電子版，無論是全文或徵引，無論是私人或科學的文字，甚或給他人的信件，也不允許翻譯任何我撰寫的文件。編輯或散播任何這些文件，無論是過去我未允許已完成的，或未來將執行的，只要我還活著，都違反我在這裡明確表示的意願，在我眼裡皆不合法。……

這項聲明大異於他早年的開放態度，讓人錯愕。為了尊重他的意願，當時許多連結都移除，《格羅騰迪克圈》也近乎關站，只留下部分文章。這個情況直到格羅騰迪克過世後，才在家屬同意下，恢復全面運作。

姑且不論格羅騰迪克今昔想法矛盾的源由，早年的他樂意分享，晚年的他禁止流通，都意謂這些文件手稿其實無價。結果他離世不久，就傳出他的法國圖書館館藏，估價至少45,000歐元（約160萬臺幣），多人垂涎他尚未公開的筆記本，家人也宣稱持有「遺產」的所有權。

諷刺的是，格羅騰迪克隱居小村的晚年，完全與世隔絕，與家人也再無聯繫。（編輯室）



## 高等數學能力從何而來

數學與語言有相同的演化根源嗎？

數學知識和數學能力從何而來，一直是一個迷人的話題。早在古希臘，柏拉圖便認為數學能力是與生俱來、人人皆有的，只等待被「喚醒」。然而，我們也都熟知克羅涅可（L. Kronecker）的名言：上帝創造整數，其餘一切都是人為的。

數千年以來，這類思考無非都近乎形上學的思辯，種種說法無從驗證，然而最近數十年認知科學領域的長足發展，開始能提供令人鼓舞的具體證據。

最近，認知神經科學亞瑪希（M. Amalric）及其指導老師德阿奈（S. Dehaene）在《美國國家科學院院刊》上發表了一篇〈高等數學的腦部網路的起源〉（"Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians", *PNAS*, 113 (18), May 3, 2016），即是一個顯著的例子。

他們在論文中指出，獲得抽象數學真理是人類特有的能力，至於這項能力的起源則仍屬未知。一種說法是認為它是源自舊石器時代晚期，伴隨著語言能力而來，例如杭士基（N. Chomsky）就曾提到「數學能力源自於語言運作抽象化」的假說。然而另一方面，我們又有愛因斯坦的證詞：「字詞或語言，不論是文字或口述的，似乎都與我的思考過程毫不相關。」

相對於此，近來認知神經科學的研究則顯示，數學是源自於人類對時間、空間和數字的非語言直覺，這可以稱為「核心知識」假說。

先前所做的認知神經科學研究，大多集中在最基本的數學能力，尤其是算術。但基本算術和高等數學畢竟有很大的差距，在算術上得到的結論不見得可以類推。因此本文作者設計了新的實驗，以專業數學家為對象，檢驗他們思考數學概念時的腦部運作。

他們找了 15 位職業數學家，以及 15 位學術能力相當的非數學家（對照組），請他們判斷數學和非數學敘述的對錯，並檢視他們答題時腦部的功能性核磁共振造影（fMRI）。

每一題以口頭唸出，受測者在聽完後有 4 秒的思考時間，然後回答該敘述是對、錯或者無意義。高等數學的題目包括分析、代數、幾何、拓樸四大類，另有一類非數學的題目則屬於一般文史範圍，語句的長度與複雜度與數學題相當。

兩位作者發現，當數學家思考數學時，不論題目屬於何種領域，一律會激發他們腦部的雙側頂內溝（IPS）、下顳葉（IT）、前額葉皮質（PFC）等區域，而這些被激發的區域與基本算術是相同的。為了避免這個結果有可能是因為測試題目源自數字和算術而造成干擾，他們在題目設計上仔細地排除了數字。至於和語言相關的區域，則只在聆聽題目時短暫用到。

他們原先猜測，像代數之類的領域，常需要層層相連的推理，或許思考模式會與語言類似，但 fMRI 造影顯示並非如此，數學家思考代數，和思考其他數學並沒有差別。

儘管如此，兩位作者也指出，我們不能武斷宣稱已經找到腦部的數學特區，因為先前已有多項研究辨識出這些區域與多種解題（problem-solving）任務相關，而與語言活動無涉。

假如你曾讀過德阿奈的 *The Number Sense* 一書，當會對他以一系列原創性的實驗得到許多驚人結果印象深刻（例如證明有些哺乳動物也有簡單的數字感）。在本研究中，他們則是在高等數學與基本算術、一般的抽象推理解題能力之間找到了聯繫。經過科學家的各種剖析，數學的面貌變得更豐富，也更引人入勝。（編輯室）

### 實驗用問題舉例

#### 數學（幾何）

- 任何偶數維球面上的向量場必有等於零向量的點。（對）
- 黎曼面上的全純函數必為常數。（錯）
- 任何全純緊緻纖維叢是一特殊球面。（無意義）

#### 非數學

- 在古希臘，無法償債的公民將淪為奴隸。（對）
- 巴黎地鐵系統的興建早於伊斯坦堡地鐵。（錯）
- 馬鈴薯旗在脫利騰大公會議後被送上斷頭台。（無意義）



## PK 大戰與對局論

零和賽局混合策略的精彩實例

今年在法國舉辦的足球歐洲杯才剛落幕，由葡萄牙奪得了隊史的第一座大賽獎杯，原先被看好的東道主法國則落居亞軍。每當世界杯和歐洲杯這兩大足球盛事舉行時，總能吸引廣泛的興趣，而在此時，即使不是足球迷也會引為高度關注話題的，就是足球特有的 PK 大戰（互射 12 碼球，penalty shoot-out）。

「PK 大戰」是在淘汰賽階段，當正規時間和延長賽終了仍未分出勝負時，用來決定何隊勝出的最後方法。此時，兩隊各派出五人，交替進行 12 碼球罰球。踢完後以進球多的一方勝。如果進球數相同，則再一次各派一人比試（派出的球員不能重複），直到分出勝負。這是一種快速、緊張、扣人心弦的決勝方法，即使你是中立球迷，也會被它的高張力所吸引。

一般人常認為，只要球技不要太差，12 碼球能不能射進，就是看運氣和臨場表現而定。這也是為何以 PK 戰決勝負、甚至決定冠軍誰屬，為何會那麼戲劇性，而且又難以令人滿意。但是，罰 12 碼球真的就只憑運氣或天意嗎？

2002 年時，三位芝加哥大學的經濟學家奇雅波利、李維特和格羅克羅斯（P.-A. Chiappori, S. Levitt, & T. Groseclose）注意到這個問題。（沒錯！第二作者即是後來寫出暢銷書《蘋果橘子經濟學》的李維特。）他們從對局論（game theory）的角度來看，罰 12 碼球即是古典的雙人零和賽局。

在進一步探討之前，我們要先對 12 碼球的攻防稍加分類，其中最重要的是射手的踢球方向：分為自然側和相反側。「自然側」是指球員慣用腳的內側（也就是比較自然的射門方向），例如習慣右腳的人是踢向他自己的左邊；反之則稱為「相反側」。當然，踢向自然側的成功率會大得多。相對而言，門將則會在球踢出的瞬間撲向一邊，期望能因為撲對邊且射手踢得不好而擋下罰球。因為門將在球未踢出前不能移動，但若等到看清方向後會來不及撲救，所以要撲向哪一

邊，只能用猜的。但他當然也傾向猜測射手會踢向自然側。理論上，零和賽局參加者可採取混合策略，在策略中加入隨機性——射手隨機選擇是否踢向自然側，門將也隨機選擇是否撲向射手自然側——以得到有利結果，而最佳混合策略將達到對彼此最有利的納許均衡。

奇雅波利等人使用法國和義大利聯賽三個球季的資料，得到如表 12 碼球射門成功率，如表所示（總計 459 次，其中包括一般比賽的 12 碼罰球，並只 PK 戰）。根據計算，射手最佳策略理論值是約 6 成踢向自然側，約 4 成踢向相反側；門將撲救方向比率大致相同，也是 6:4。驚人的是，理論值與實際數據幾乎相符，也就是說，球員罰 12 碼球時確實採用最佳混合策略。

12 碼球射門成功率

		門將	
		猜對邊	中間或猜錯邊
射手	自然側	63.6%	94.4%
	相反側	43.7%	89.3%

後來，西班牙經濟學家兼重度足球迷帕拉修 - 烏耶塔（I. Palacios-Huerta）採用另一組比賽數據，也得到類似結果。帕拉修 - 烏耶塔還進一步抽樣分析個別球員的行為，發現他們也幾乎都採用最佳混合策略。

經濟學家會注意到 12 碼球，是因為零和賽局在現實世界並不多，而混合策略的實例更是難尋，甚至連在實驗室的控制環境裡也不容易出現。然而他們居然在足球場上找到近乎完美的例子。那些足球明星當然不可能先算出納許均衡點再決定怎樣射門，然而他們的行為卻自然而然實踐了對局論的最佳策略。

這項冷僻的知識，因為庫珀（S. Kuper）《足球經濟學》（*Soccernomics*）一書的報導才廣為人知。現在我們看 PK 大戰，除了球技、激情、國家和個人榮譽……，其中還有對局論的美妙結果。如果馮諾曼和納許有知，不知會否帶給他們會心一笑。（編輯室）



## 英國三年拍了四部數學電影

拉曼努真的故事《天才無限家》正上演

很難想像拉曼努真 (S. Ramanujan) 厚達四、五百頁的知名傳記《了解無限的人》(The Man Who Knew Infinity) 可以「改編」成電影。臺灣將這部電影譯成《天才無限家》，今年 5 月底已經上映了。

除了傳主的故事與成就，原著還花篇幅介紹拉曼努真「導師」哈第的生平，以及劍橋大學當時的學術狀況。這部電影相當程度反映這一點。可以看到即使出塵離俗的白人男性數學家，偶而也跨不過種族（、性別、階級）的有見。

不過這部電影的濃縮表現，結果只能說是中規中矩的傳記電影，對於傳主本身的描述也嫌扁平。一般觀眾，可能把重點放在哈第強烈的感情表現與轉折（傑瑞米艾恩斯實在太搶戲）。想看到數學的人，會感覺數學存在感太薄弱。片中談數學的片段如「色彩」之喻、「證明和直覺的衝突」，其實都有深刻的意義，但對數學無感的觀眾仍然無法真正透過電影來體會。針對這些豐富的材料，100 分鐘的電影顯得太短。早一年另一部印度寶萊塢出品的 *Ramanujan*，片長都還有 150 分鐘。

值得注意的是，如果把霍金 (S. Hawking) 也算成半個數學家，這已經是英國電影工業近三年來第四部數學電影，

展現這個國家科學文化的深度。依序分別是描述涂林 (A. Turing) 的《模仿遊戲》(The Imitation Game)、霍金的《愛的萬物論》(Theory of Everything)、《X+Y 愛的方程式》(X+Y)，以及本片。目前，票房最好的是《模仿遊戲》，遠超過其他三片的總和（臺美都一樣）。這或許得拜男主角班奈狄克康柏拜區炙手可熱，配上綠葉綺拉奈特莉之賜，也可能因為劇情有一定的衝擊性。其實當作好萊塢文藝電影來看，這四部電影都保有盡量在誠意與商業考量中取得平衡的特性，最大化感動觀眾的要素。尤其是許多演員精湛的演技，令人佩服。

數學家電影顯然是數學普及的策略，但其有效性一直受人懷疑。因為這類電影經常變成「獵奇」電影，顯示數學家都是天才，也是怪人，反而加深差異的鴻溝。歷史與人性固然讓數學可親，不過只有「這個天才做過重要的事」的認知，並不足以展露數學。

我們想特別推薦票房最差的《X+Y 愛的方程式》（見本刊第 3 期簡訊）。不同於其他三部數學家電影，這部在臺灣取景的電影，探討有自閉傾向的英國數學奧林匹亞選手的成長經驗，是一部有點重量的特別青春片。

有小孩熱愛數學的家庭，當家長鼓勵小孩看其他三部電影時，可以把這部電影留給自己。（編輯室）



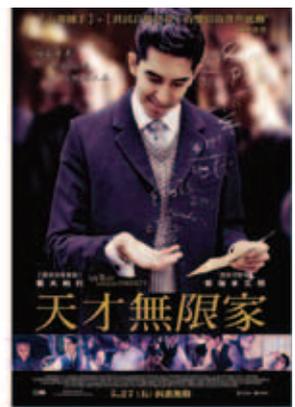
模仿遊戲。(甲上娛樂提供)



愛的萬物論。(環球電影公司提供)



X+Y 愛的方程式。(勝瑞多媒體提供)



天才無限家。(威視提供)