

拓樸相變和拓樸物質

2016 諾貝爾物理學獎簡介

2016 年 10 月 4 日，諾貝爾物理獎頒給美國華盛頓大學的紹里斯 (David Thouless)、普林斯頓大學的赫爾丹 (Duncan Haldane) 和布朗大學的科斯特利茨 (J. Michael Kosterlitz)，三位得獎人均為英國出身。得獎的理由是「拓樸相變和拓樸物質的理論研究發現。」

拓樸性質起源於數學的研究，也就是在幾何學之外，研究物體被連續變化 (比如說延展或彎曲)，在不撕開、黏合或挖洞的狀況下，如何從一種幾何形狀變成另外一種幾何形狀的研究。舉例來說，一顆球和一個四方體拓樸性質一樣，可以想像球體不斷變化之後，就可以變成四方體；而中間有一個洞的甜甜圈，拓樸性質和咖啡杯拓樸性質一樣，因為經過連續變化，甜甜圈可以變成有一個洞把手的咖啡杯。

本來拓樸學和物理學關連並不大，直到紹里斯和科斯特利茨開始研究二維古典系統的二階相變，事情才開始變化。在他們的研究之前，一般人對二階相變的了解，都是來自於金茲堡 / 藍道定理 (Ginzburg-Landau Theorem)。我們可以考慮一個磁性系統，鐵磁的產生是要所有小磁鐵磁場指向同一個方向，而順磁性的相態來自於小磁鐵磁場的方向都不一樣，平均起來磁性就為零，我們稱這種小磁鐵磁場都指向同一方向為對稱性破缺 (symmetry breaking)。金茲堡 / 藍道定理完全奠基於對稱性破缺。而二維古典系統，基本上在有溫度的情形下，因為熱漲落 (thermal fluctuation) 非常強大，所以沒法形成對稱性破缺，因此一般認定是不會有相變的存在。

這樣的情形也可以由物理量的相關性

(correlation) 來理解。同樣考慮磁性系統，我們可以考慮距離很遠的小磁鐵 (也稱為自旋) 彼此間的相關性，相關性可以理解為當我改變一個自旋，另一個 (遠距離) 自旋跟著改變的量。我們發現三維鐵磁性 (也就是有對稱性破缺) 的相態中，兩個距離相當遠的自旋量相關性是一個常數。但在二維磁性系統裡，遠距離自旋相關性會慢慢接近零。然而接近零至少有兩種接近方式，一種是以多項式速度接近零，一種是以指數速度接近零。多項式接近零的速度比起指數接近要慢上許多，因此這裡面暗藏著玄機。

紹里斯和科斯特利茨發現在非常低溫時，遠距離鐵磁的相關性是多項式的接近零。然後慢慢增高溫度，系統會產生渦漩 (vortex)，而且不是一個一個產生，每次產生都成對，而且方向相反。我們稱為正渦漩或反渦漩 (圖 1)。正反渦漩會成對出現，剛開始出現不會影響鐵磁的相關性，但溫度越高，渦漩越來越多，溫度高到一定程度，渦漩不再成對出現，而是單獨出現，且渦漩改變遠距離鐵磁的相關性，從多項式接近零變成指數接近零。這樣的相變，並不會有對稱性破缺，而是相關性的改變，我們稱為「KT 相變」，圖 1 顯示的就是這樣的相變圖。

渦漩其實就是一種拓樸態。渦漩就像颱風一樣，有一個很像颱風眼的構造，中間有一個洞，稱為奇點 (見圖 1 中的放大區域)。紹里斯和科斯特利茨是首次利用拓

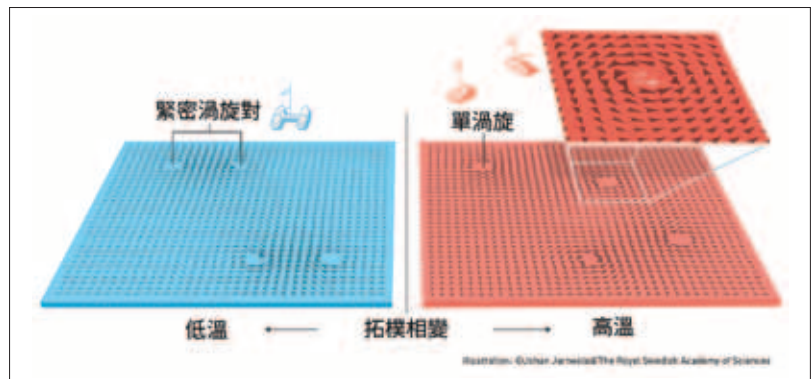


圖 1 拓樸相變圖。(https://www.nobelprize.org/)

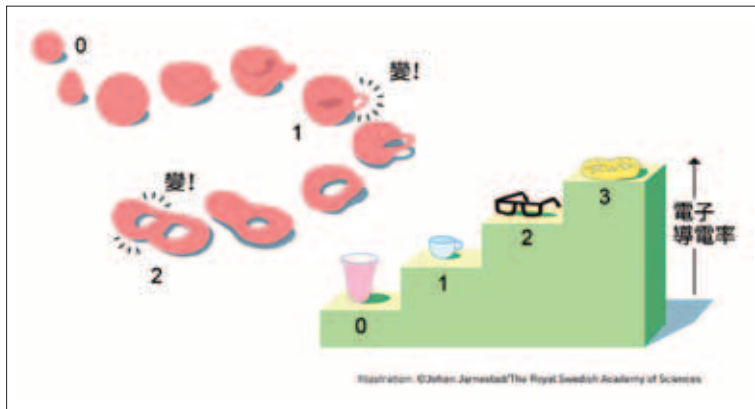


圖 2 拓樸態的變化。(https://www.nobelprize.org/)

樸性質來解釋相變的研究。後來發現不管在一維或二維系統，比如說超流體相變，KT 相變都非常重要，也解釋很多低維度系統相變的產生，改變人們對相變的了解。

拓樸物質其實不容易發現，整數和分數量子霍爾效應（quantum Hall effect）在 1980 年代陸續發現，而且研究獲頒諾貝爾物理獎。紹里斯也持續對拓樸態有進一步的了解，尤其是量子霍爾效應的解釋。紹里斯藉由對於拓樸學的了解，將量子霍爾效應跟所謂的陳省身數（Chern number）連結起來。陳省身數可以類比為幾何體有多少個洞，而電子的導電率正比於陳省身數，也就是洞的數目（見圖 2）。紹里斯由此增進對拓樸物理學的深層了解，因此獲頒此次諾貝爾物理獎一半的獎金。

量子整數和分數霍爾效應這兩種物質都需要磁場形成藍道層。赫爾丹在 1980 年代提出一個問題：就是能不能不用均勻磁場，保持移動對稱性來形成霍爾效應？他提出一個簡單的模型，就是在六角蜂巢模型中技巧加入次近鄰的作用力，破壞時間反轉對稱性（time reversal symmetry），就可以不用加均勻磁場產生陳省身數等於一或負一的霍耳效應。

赫爾丹另一個重要的貢獻，是發現一維系統的磁性拓樸系統。低維度系統，尤其是低維度的量子系統，量子效應比三維系統來得大。赫爾丹首先意識到，一維的磁

性系統，由於量子漲落（quantum fluctuation）或是量子纏結（quantum entanglement）非常大，因此產生奇特的現象。於是他開始提出自旋量為一的一維磁性系統，發現這個系統具有拓樸性質，稱為赫爾丹相態。這是第一個用理論提出的拓樸材質，而且馬上被實驗驗證。這種拓樸材質非常穩定，具有某些對稱性，也就是說一些雜訊只要不破壞這種對稱性，並不會改變拓樸性質，因此我們稱這樣的相態是「對稱性保護的拓樸相態」。這就是拓樸相態的重要性。

量子電腦需要用到量子訊息，可惜的是，量子訊息常常因為雜訊一下子就不見，因此我們如果要用到很多量子位元，保持量子訊息很重要。然而拓樸態像是有洞的物質，這些洞可以拿來作為量子位元。舉例來說，有一個麵糰做的甜甜圈，我們可以用手改變甜甜圈的形狀，但只要不把洞黏起來，或是打另一個洞，不管怎麼捏，一個洞還是永遠保持。可以想像雜訊就像手在亂捏，會改變甜甜圈的樣子，但洞永遠存在，也就是拓樸性質永遠不變，這樣的拓樸材質非常適合作為量子電腦的量子位元。

近十餘年，在這三位物理學家的研究基礎上，大量的拓樸物質經實驗而被製造與發現，比如說拓樸絕緣體（topological insulator），拓樸超導體（topological superconductor），和魏爾半導體（Weyl semimetal）。這些新的奇異拓樸物質的發現，大大延展人類可能的科技發展，增加量子電腦的可能性，因此獲頒諾貝爾物理學獎的殊榮。（張明強，中興大學物理系）

◎本文轉載自中華民國物理學會《物理雙月刊》38 卷 6 期 12 月號，本刊感謝作者與《物理雙月刊》同意轉載。原文網址：
http://psroc.org.tw/Bimonth/article_detail.php?classify=c1&cid=149)

《數理人文》第 10 期第 6 頁，韓國數學家「金民衡」誤植為「金明迴」，在此致歉。

PISA 2015 與 TIMSS 2015

再看國際數學評量中的臺灣

2016 年底，PISA 和 TIMSS 兩大國際標準化評量（參見本刊第三期「數學教育專題」）的成績雙雙揭曉，臺灣雖然在 PISA 2015 的閱讀素養排名大幅到退（第 23 名），但數學與科學兩項仍一如既往地取得佳績（均為第 4 名）。TIMSS 2015 的成績也同樣亮麗：數學排名分別是四年級第 4、八年級第 3；科學則是四年級第 6、八年級第 3。

但是翻讀兩大評量的詳細報告，臺灣教育一些長久以來屢被指陳的缺點依然存在，並未看到顯著的改變。由於兩大評量的資料浩繁，本文將只介紹數學評量的結果。

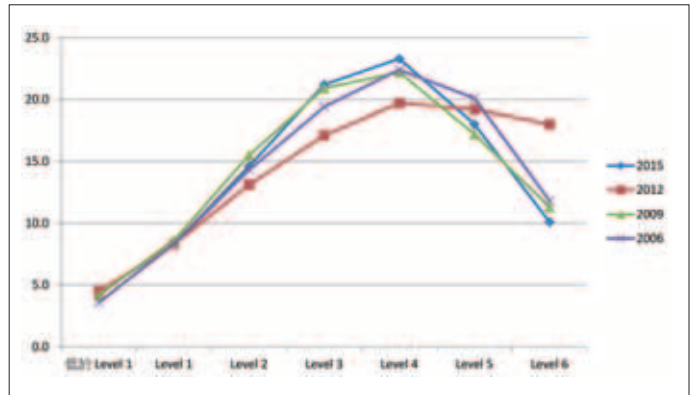
PISA 與教育均等性

PISA 的全稱是「國際學生評量計畫」（Programme for International Student Assessment），它是經濟合作與發展組織（OECD）自 1997 年起，每三年一次舉辦的評量，受測對象為 15 歲學生，主要測驗科目為數學、科學和閱讀。

翻閱 PISA 歷屆報告，一項明顯的趨勢是對教育均等性的重視程度一再提高，到了 PISA 2015 報告，均等性已列在第一卷，在各科成績之後直接討論。

的確，2015 報告在「前言」便提到，聯合國在 2015 年訂定的「永續發展目標」第四項即是高品質的教育：給每一個人具備包容和均等的高品質教育，並提倡終身學習機會。提升全民的教育水準並不只是浪漫情懷，更是出於現實考量，因為教育的良窳直接影響了個人生涯，從而也影響了社會的整體發展和福祉。

而臺灣一項屢屢為人詬病的現象就是個別差異極為嚴重（換成口語說法即是：「高分的很高，低分的很低」）。檢視歷屆數學成績，不管是用標準差或用高低分群的分數差距來衡量，均屬世界最高（2009 年、2012 年）或接



臺灣歷屆數學素養水準各等第人數比率

近最高。最新的 PISA 2015 臺灣的標準差 103 與以色列並列世界第三，僅次於馬爾它（110）和中國（106），雖已退出第一名寶座，但改善實在有限。

臺灣另一項令人憂慮的指標是低成就人數太多。PISA 將數學素養水準分成 6 個等級，每個等級都有明確定義，基準線定在水準 2（換句話說，水準 1 和未達水準 1 類似傳統意義的「不及格」）。臺灣自參加 PISA 以來，未達基準線的人數始終大於 12%，雖然低於 OECD 平均，但在東亞各國卻屬最高。

2015 年未達基準的人數佔 12.7%，只比上一屆微降 0.1%。雖然低於南韓突然竄高的 15.5% 和中國的 15.8%，但也絕不是好消息。

如果僅就 PISA 2015 與 PISA 2012 比較，會以為臺灣在個別差異方面有所改善，但若將四屆的各等級素養水準人數比率並列來看，會發現其實是 2012 年的成績逸出常軌，其他三屆的成績結構幾乎一致，十幾年來無非是原地踏步。

另一份診斷報告：TIMSS

TIMSS 的全稱是「國際數學與科學教育成就趨勢調查」（Trends in International Mathematics and Science Study），自 1995 年起舉辦的國際評量。由於 TIMSS 是每四年舉辦一次，受測對象是四年級和八年級（等同於臺灣的國中二年級）的學生。因為小四和國二正好相差四年，所以同一屆學生會遇到兩次評量，正可提供學生學習變化趨勢的資訊。

本刊第三期的〈TIMSS 跨國、跨年級及跨屆比較〉（黃敏雄）一文即針對臺灣在 2003、2007 和 2011 的數學成績進行分析，指出了兩個重要現象，其一是從小四到國二的表現劇升，其二是表現差異的擴大。



前者指的是臺灣學生從小四升到國二時，數學表現達到最佳等級（稱為「進階國際標竿」）的比例大幅提高。2003 年的臺灣小四學生，只有 16% 達到四年級進階標竿，但當 2007 年這批小四學生升到國二時，則有 45% 達到八年級進階標竿。

2007 年這屆的臺灣小四學生有 24% 達到四年級進階標竿，但在四年後，則有 49% 達到八年級進階標竿，劇烈的比例變化仍高居全球之冠。作為對照，東亞國家增長幅度次高的新加坡 2007 年的四年級是 41%，2011 年的八年級是 48%。

那麼，最新的 2015 年成績又如何？答案是，現象仍然存在，但幅度又更緩和。2011 年的臺灣小四學生有 34% 達到四年級進階標竿，2015 年則有 44% 達到八年級進階標竿。新加坡對應的數字分別是 43% 和 54%，幅度與臺灣約略相當。香港則是 37% 和 37%，南韓是 39% 和 43%，呈現與臺灣、新加坡不同的形態。

關於〈TIMSS 比較〉一文指出的第二個現象，表現差異的擴大，我們可用標準差來觀察學生表現的差距大小，標準差愈小，表示學生的表現愈平均。歷屆以來，臺灣小四的標準差大致都落在較低區段，表示學生素質整齊，但是國二的標準差則居高不下。這個現象從小四到國二的突變現象也是受測各國僅見的。

例如 2007 年臺灣小四成績的標準差是極佳的 69，這批學生到了國二後標準差升到 106。2011 年臺灣小四成績的標準差是 73，這批學生到了國二後標準差升到 97。

作為對照，同樣差距明顯的香港，2007 年四年級的標準差是 67，四年後的八年級是 84；2011 年四年級的標準差是 66，四年後的八年級是 78。

綜合來看，臺灣在 PISA 成績所呈現的失衡現象幾乎原地踏步。TIMSS 稍顯改善，但還不能確知這只是單次的波動，抑或是開始良性發展。而如果確實改善了，原因何在？我們是不是可以猜想：近年來教育當局大力推行的補救教學政策，在試題內容較接近教科書的 TIMSS 略

可看到成效，但對考素養不考課本的 PISA 則毫無助益？我們是否該檢討現行補救教學政策的成效，考慮改弦更張？

見微可否知著？

雖然只挑少數數據申論會有以偏概全之弊，但在兩大評量豐富的資料中，細心閱讀與耙梳，必可時時發現值得深思的課題，最後我們試從兩項評量中各舉一例。

在 PISA 2015 報告裡，圖 I.5.6 提到了 2012 年時學生問卷回報的數學課使用電腦比率。臺灣的 9% 和南韓的 10% 分列倒數第一和倒數第二，遠低於 OECD 平均的 32%。儘管這並不影響兩國的數學表現，但它是否暗示我們的教育深滯在升學主義的異時空，以致脫離了社會現實？

此外，在 TIMSS 2015 對學習態度的調查裡，臺灣小四和國二學生對於學習數學的喜愛程度均偏低，這雖是讓人失望的結果，卻並不令人意外。

而必定會令本刊讀者感到震驚的是，臺灣國二學生對數學重要性的評價：認為數學很重要的佔 10%（各國最低），有點重要的佔 49%，不覺得數學重要的佔 41%（各國最高）。而全球平均則是，認為很重要 42%，有點重要 45%，不覺得重要 13%。或許是因為不喜歡數學而否定它的價值，或許是因為對現代社會的運作太過陌生，又或許是偏少的時數使他們看輕這個科目，不管原因為何，這是一項讓人憂心，也亟需改變的趨勢。（編輯室）

國家	很重要	有點重要	不重要
臺灣	10%	49%	41%
日本	11%	59%	29%
新加坡	34%	58%	8%
全球平均	42%	45%	13%

各國八年級學生對數學重要性的評價例舉