專題 勞倫茲和蝴蝶共同掀起的混沌風暴

作者：**陳義裕**
陳義裕現任臺大物理系教授，專長為非線性物理，近年來主要研究包含流體穩定性之分析、網路系統的非線性現象以及聲波的共振與繞射。

一提到混沌，人們第一個想到的可能就是著名的「蝴蝶效應」。但除了得感激科普作家的辛勤筆耕，真正讓蝴蝶效應這個混沌代名詞得以如此流傳、深入人心的，恐怕還是得拜幾部好萊塢電影所賜，其中尤以 1993 年的賣座電影《侏羅紀公園》最為著名。在該部電影中，數學家主角所述蝴蝶效應指的是：北京的一隻蝴蝶隨便搧個翅，結果竟為本來應該是大晴天的紐約帶來豪雨。

為什麼是蝴蝶來領銜？

為什麼北京城中一隻微不足道的蝴蝶，有可能在大老遠的地球彼端造成如此重大的影響？套句中國老話來說，那就是「差之毫釐，失之千里」。只要一開始的狀態有點不一樣，透過層層放大、一環扣一環的相乘效果，最後結局就可能出人意表。

話雖如此，筆者個人猜測，大部分氣象學家都不可能相信北京一隻蝴蝶能有如此大的能耐。原因無他：要讓這種事件成立，「一環扣一環」其實扮演著非常關鍵的角色，只要一個環節脫鉤，整個因果關係鏈就會斷掉。不過，能想出這麼簡單而讓人印象深刻的譬喻，原先提出這個點子的科學家確實值得表揚！這位科學家是誰呢？

愛德華．勞倫茲（Edward N. Lorenz）是一位有專業數學背景、但畢業後卻選擇轉行追求兒時興趣的美國氣象學家。在研究大氣對流問題時，為了能利用電腦進行模擬，他把原來極為複雜的流體力學聯立偏微分方程組硬生生「腰斬」，簡化成幾道常微分方程式。結果在進行這些方程的數值計算時，勞倫茲很意外的發現，如此簡單的系統竟然就展現出混沌的現象！人們後來就將方程最簡化的版本（只留三個變數）稱為勞倫茲方程。

勞倫茲在 1963 年將研究結果整理出來，發表了兩篇從此讓他名垂青史的論文 [1]。在其中一篇論文最後，勞倫茲說：「……這個想法並未被普遍接受……某位氣象學家還評論說，這理論要真成立了，那麼一隻海鷗搧個翅膀，豈不就足以永久改變天氣的走向……」

注意到了嗎？勞倫茲當初是讓海鷗去搧翅改變天氣，不是蝴蝶！

到了 1972 年，勞倫茲的研究結果逐漸受到重視，所以應邀在一場重要會議中演講。這時他的講題卻換成了〈巴西的一隻蝴蝶搧個翅會在德州引起龍捲風嗎？〉喔，蝴蝶終於出場！可是這是學術圈，又不是不缺蜚短流長的好萊塢，怎麼也流行中途換角這種戲碼？

將近 20 年之後，有好事者追問此中來龍去脈，結果發現那個演講題目根本不是勞倫茲自己定的！因為當時他人不在美國，聯絡困難，眼看會議將近，題目必須早日定案，盡快公布周知，於是會議主持人和朋友就自作主張，押著蝴蝶上場了。

好事者繼續追問這兩位當事人，但誰也想不起來這隻蝴蝶是怎麼飛進來的。說法之一是，此前美國有一部與氣象有關的著名小說，情節中提到陝西一個老中打個噴嚏就可能造成紐約大雪。但好事者翻遍全書，卻怎麼樣也見不到任何蝴蝶的芳蹤。

這個謎團後來倒是勞倫茲自己解開了。原來在 1969 年的一篇著名論文中，科學家司麥格令斯基（Joseph Smagorinsky）就直接提到蝴蝶搧翅的比喻。雖然當年的氣象學家多半拜讀過這篇論文，但科學家通常都只把注意力集中在論文中的重要科學

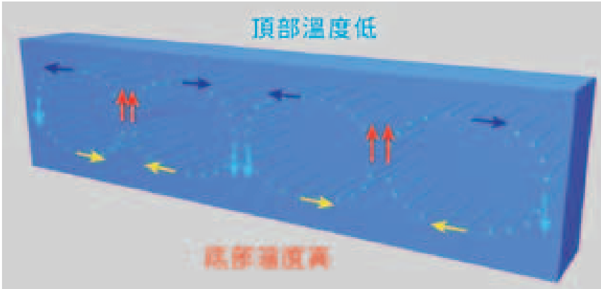


圖 1　流體進行簡單對流運動、形成迴圈，而箭頭為流體速度。此外，速度場在其中一個水平方向上具有週期性。

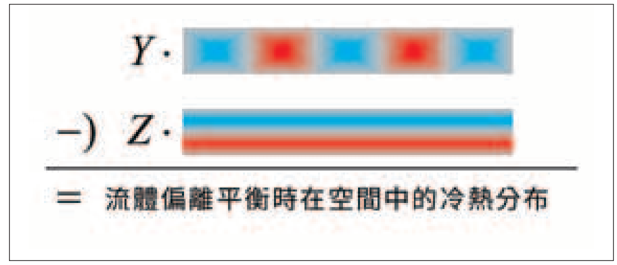


圖 2　流體偏離平衡狀態時，在空間中的冷熱分布可以拆解成兩種模式的組合，各模式的幅度分別以 Y 和 Z 代表，而冷或熱的程度則分別由紅、藍色代表。

內涵，誰會去注意到文章中竟然還有阿貓還是阿狗在搖尾巴呢？勞倫茲自己就坦承，正是因為要準備 2003 年司麥格令斯基獲頒某項科學大獎的會議演講時，自己才回想起該論文中提到蝴蝶。

勞倫茲化繁為簡

根據前述，勞倫茲為了能順利進行模擬，硬是將很困難的流體力學偏微分方程組，化成極度簡化的常微分方程。即便如此，這個簡化的方程還是帶有原始的物理風味。以下我們簡略說明勞倫茲方程的由來及其意義。

在一個長方形的容器中裝滿液體，底部均勻加熱，上方均勻冷卻，使容器的上下表面維持著固定的溫差。下方遭到加熱的液體會因為體積膨脹而變輕，產生往上浮升的趨勢。若上下溫差太小，往上浮升的力道尚不足以克服流體的黏滯力，流體維持靜止，無法產生對流。逐漸加大溫差直到一個特定的臨界值後，流體才會開始對流。

為了簡化起見，我們只討論二維空間中的對流問題，同時假設流體的速度以及溫度在其中一個水平方向上有週期性（圖 1）。既然在水平方向有週期性，便可以將速度以及溫度都做傅立葉展開。理論上，我們需要將結果寫成無窮級數，用無限多個係數去描述這些物理量。但這樣不切實際，無法叫電腦運算，所以我們一不做、二不休，乾脆大刀一揮、只留一項！（好痛！）

至於流體速度以及溫度在鉛垂方向的變化，我們當然也可以做傅立葉級數展開。但水平方向都殺到紅眼了，垂直方向還客氣什麼？於是乎，掄起刀來照砍：速度只保留一項，溫度則保留兩項！（好痛的平方！）

如此狠心砍完，很少人會指望它還能正確描述對流的物理。但事實不然，我們利用圖 2 來說明。在這個側面圖中，紅色代表流體的高溫區，藍色則是低溫區。我們有興趣的是：流體偏離平衡時在空間中的冷熱分布，並且想單純利用兩種模式的線性組合來約略模擬真實的情況，亦即溫度的改變量是

$$Y\cdot\text{（模式一）}-X\cdot\text{（模式二）}$$

其中 Y 和 Z 分別代表各模式的幅度，且會隨時間而改變。（第二項前面的負號只是習慣上這樣取，沒有其他特別意義。）

顯然的，第一種模式（圖 2 上方的長條）是想模擬溫度在水平方向有週期性。若它對應的係數 Y 越大，代表水平方向上的溫度差異較大。若 Y 的數值變號，則水平方向不同地方的冷熱顛倒（紅藍對調），對流運動通常也容易跟著反向。

第二種模式（圖 2 下方的長條），則是想捕捉對流發生時，流體偏離平衡態所多出來的上、下溫度分布不對稱性。所以，若 Z 是很大的正值，則代表對流已經旺盛到上方溫度開始變高（別忘了：第二種溫度模式前面的係數 $-Z$ 有一個負號）。可以想見的是，一旦對流啟動，Z 應該都是正值。因為

[1] "Deterministic Nonperiodic Flow" *Journal of the Atmospheric Sciences* 20（1963）；"The Predictability of Hydrodynamic Flow" *Transaction of the New York Academy of Sciences* 25（1963）issue 4。「海鷗」典故出現於後者。

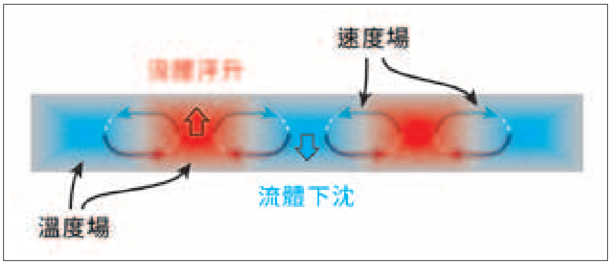


圖 3 速度場與溫度場的對應非常良好。

對流會把容器下方偏熱的液體帶到容器上方來。

至於速度場，因為我們決定只用一個模式去模擬它，所以只需引入另一個隨時間變化的變數 X，作為速度場的振幅便可。我們把這個模式所對應的速度場畫在圖 3，並把它和溫度場的第一個模式疊加在一起，以便看出兩者很自然的對應關係：圖中紅色高溫區的流體比較輕，故流速都是往上；而藍色低溫區的流體比較重，流速都是往下。換句話說，勞倫茲所提出的數學近似方程，看起來雖然砍手斷腳，但基本的物理精神卻完全沒拋棄！

勞倫茲方程的意義

令時間變數為 t，在勞倫茲的大刀闊斧下，原先的流體力學方程變成：

$$
\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= 10(-X+Y) \\
\frac{dY}{dt} &= -Y+X(r-Z) \\
\frac{dZ}{dt} &= -\frac{8}{3}Z+XY
\end{aligned}
$$

雖然你一時之間不一定認得出來，但以上第一式其實是牛頓著名運動定律 $F=ma$ 的偽裝！因為既然 X 代表流體運動快慢的幅度，等號左側的 dX/dt 便是加速度，所以右側一定包含了所有作用力。改變流體運動的驅動力有兩個。一是流體的黏滯力，它有拖慢、耗散流體動能的效果，而且如果流體流動越快，相鄰流體粒子間的速度差越多，黏滯力就越強。這個效應由第一式右側的 $-X$ 項來體現。另外一個力是浮力，這個力量和溫度究竟偏離平衡狀態多遠成正比。既然溫度偏移量和 Y 成正比，這就解釋了 $+Y$ 那一項的來源。至於 10 這個數，它只是無因次化之後流體的黏滯係數。

至於第二式，它陳述了同一位置流體溫度會隨時間而改變。造成改變有兩種因素。首先，因為熱量都是由高溫傳導到低溫，所以流體溫度有逐漸趨於均勻一致的特性。右側 $-Y$ 項就是描述這個效應。此外，一小塊流體從原先所在位置運動到我們的觀察處時，會將出發地點的溫度藉由對流夾帶過來，造成此處溫度的變化。這就如同大陸冷氣團過境臺灣時，大家都會覺得冷颼颼一樣。這個效應顯然和流體速度 X 成正比，這就是第二式最右側那項存在的原因。但為何要乘上 $(r-Z)$ 呢？參數 r 是被無因次化之後的容器上下溫差，此值越大，對流自下方帶來的溫度變化自然越大。$-Z$ 這個因子的出現也是相同道理，只是它的溫度來源是溫度場的第二個模式。

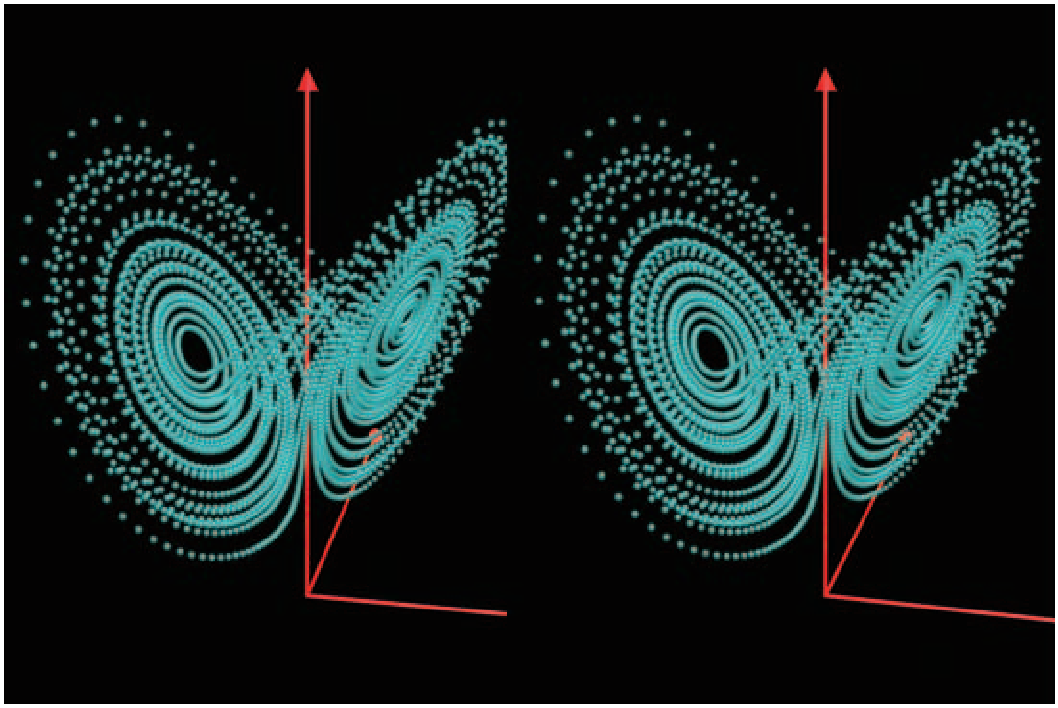
第三式的物理解釋與第二式一模一樣，只是第三式針對的是溫度場第二模式的振幅變化，因此就不需再多所著墨。

勞倫茲吸子與龐卡赫映射

只要選定一組 (X,Y,Z) 的起始值，代入勞倫茲方程等號的右方，便可算出 (X,Y,Z) 的時間變率，這就意味著電腦可以幫我們算出下一瞬間 (X,Y,Z) 的數值。再代一次，再下一瞬的數值也出來了。如此這般反覆計算，便可在 (X,Y,Z) 的空間中畫出一條隨時間變化的軌跡。

如果變換起始值，實際跑幾次電腦後會發現，只要時間夠長，最後畫出來的各條軌跡都會落在某種特殊幾何結構上。我們把這個結構稱為勞倫茲吸子（Lorenz attractor），它看起來有點像是兩片螺仔

圖 4　勞倫茲吸子的立體結構。請嘗試盯著本圖中心黑色位置，然後以鬥雞眼的方式觀看。



餅（豬耳朵餅）以某個角度斜向交錯而過。為了幫助讀者看出勞倫茲吸子的立體結構，在圖 4 中我們只畫出不同時刻的軌跡點，而沒有連成軌跡線。同時，圖 4 左、右兩圖分別是左、右眼看到的模樣，兩圖因兩眼視差而有些許不同。如果你將視線集中在該圖中心的黑色位置，兩眼以鬥雞眼的方式觀視，也許就有機會看到勞倫茲吸子的立體結構。

如果選定許多彼此很接近的點當作 (X, Y, Z) 的起始值，同時讓這些點隨時間演化。你會發現經過一段時間後，這些原本很靠近的點就像被打散一樣，各自繞著勞倫茲吸子打轉，有時候靠得很近，有時又拉得很遠，完全是戰國時代合縱連橫的翻版，亂糟糟一團（圖 5）！這種天下「合久必分、分久必合」的現象，其實是混沌系統的共同特性。但為什麼會這樣呢？

承繼上圖的說明，圖 6 在適當的高度取一個藍色的水平截面，並於該平面上對稱的選定黃色以及粉紅色兩個方形。接著讓粉紅方形內的點隨時間演化，等上一段時間後，這些粉紅點會各自在勞倫茲吸子上繞轉，最後全部被藍色平面攔截。實際跑電腦會發現：原先均勻分布在正方形內的粉紅點一旦運動起來，在某個方向會被擠壓得很扁，而在另一方向則被拉開。此外，被攔截後有些點會落到黃色方形內，另有一些點則落回原先粉紅方形所在區域。由於這個系統有對稱性，若改考慮黃色方形內的點隨時間演化，結果會反過來，有些黃色點落到粉紅色方形內，另外有些點落回原先黃色方形。

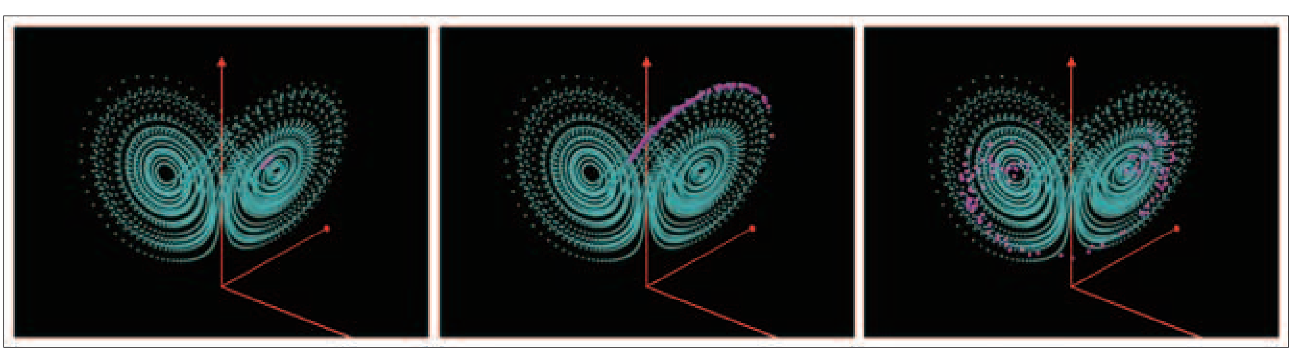


圖 5　選定許多彼此很接近的粉紅色點當作 (X, Y, Z) 的起始值，同時讓它們隨時間演化，經過一段時間後（左圖→中圖→右圖），這些點像是被打散了一樣，各自運動。

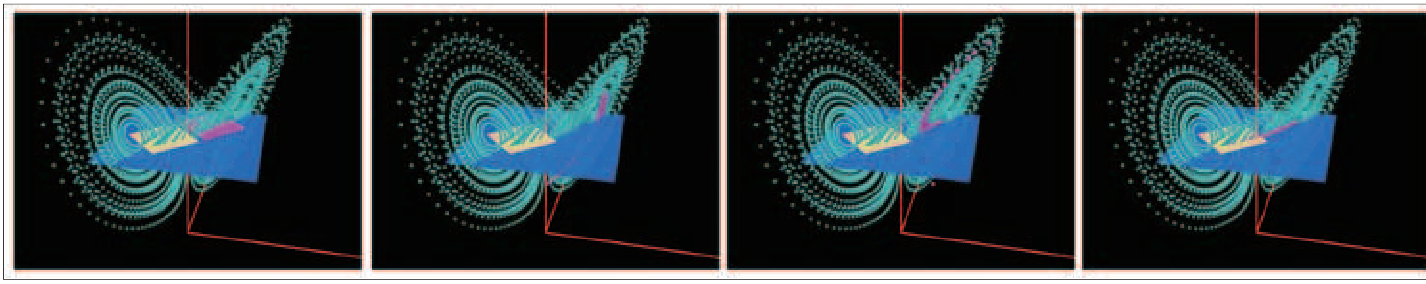


圖 6 於適當的高度取一個藍色的水平面，並用它來攔截隨時間變化的粉紅色點。

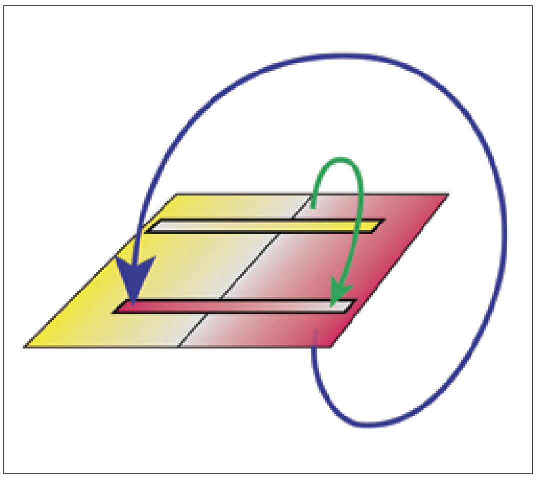


圖 7 勞倫茲吸子內的運動狀態可以被簡化成一個平面上的數學映射。

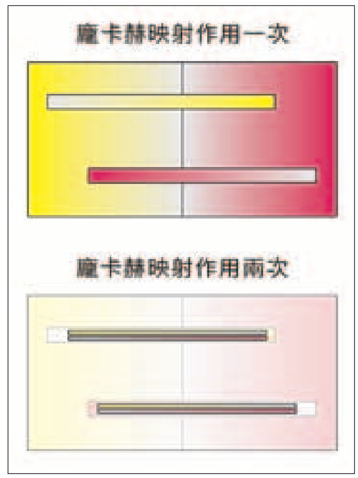


圖 8 將龐卡赫映射作用一次以及兩次之後得到的結果。

為了找出此系統發生混沌的基本成因，我們乾脆把以上的行為用相當簡化的方式來敘述（圖 7）：右手側的紅色塊先往下方移動，然後在空間中翻轉，最後自上半空間往下落回平面，成為圖中的紅色長條。同理，左手側的黃色塊經過位移、翻轉後，最後變成圖中的黃色長條。簡單說，這根本是數學上的一種平面映射，稱為龐卡赫映射（Poincaré map）！

龐卡赫映射最棒的地方是：它將原來時間上可能很複雜的連續變化，轉成空間上的幾何映射，只要弄懂箇中幾何之妙，則時間上複雜的演進可相當輕易看出規則性。

破解混沌奧秘

把紅黃兩色拼成的長方形拿來，透過龐卡赫映射作用一次，然後再作用第二次，於是就有了圖 8。如此做究竟有什麼效果？顯然的，原始的正方形（1）在垂直方向的寬度會縮得很細，（2）但是在水平方向的長度則會拉長、放大，（3）紅色塊在垂直方向會一分為二、二分為四，變成好幾個細條；黃色塊亦然，（4）紅、黃細條在垂直方向會交錯出現，（5）原先在右邊的紅色點經過映射後可能出現在左或右側。黃色點亦然。

很顯然，原先選定的起始點在經過多次龐卡赫映射後，它出現在左或右的次序有各種可能，例如右→左→左→右→左→右→右→左……，而且這個左右序列的次序和該點的精確位置有關，只要差了一點點，後面展現出來的左右序列就可能很不一樣。當然，它出現在上方或者下方的次序也很雜亂。而這正是勞倫茲吸子會展現出混沌的成因！

簡單說，此中混沌的基本要素是：拉長、壓縮、折回。

龍鬚糖暗藏混沌

一旦知道混沌的基本要素是拉長、壓縮、折回，那根本不用祭出勞倫茲的大名，到夜市找位製作龍鬚糖的師傅便可以找到混沌！因為龍鬚糖的製作方式是：將沾有糖粉的一團麥芽糖拉成一條粗粗的糖圈，然後拉長、扭轉，使它變成 8 字形（與此同時，糖圈也變細了）。接著將 8 字從中對折，使之疊合在一起成為兩圈（圖 9），這樣便完成一回合。緊接著，師傅再度握緊手中的雙圈，重複以上步驟，

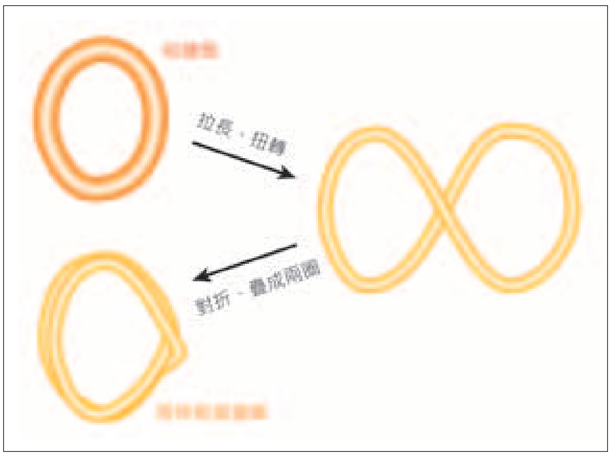


圖 9　製作龍鬚糖的基本過程：拉長（糖圈會因此縮細）、扭轉，最後再折合。完成這道工序，師傅會握住雙圈，重複以上步驟數次，直到麥芽糖被拉成細緻的龍鬚。

很快完成第二回合的製糖手續。這時手中就有四根細細的糖圈。如此反覆數次，潔白細密的龍鬚就產生了。

你看，這個過程就直接包含拉長、壓縮、折回三個要素，而且師傅最後將 8 字糖圈對折，這不正是龐卡赫映射嗎？

解開了勞倫茲方程出現混沌之謎，讀者是否也想知道它所對應的對流模型的混沌模樣呢？圖 10 是讓系統演化一小段時間後三個不同時刻的截圖。

勞倫茲方程的妙用

由於勞倫茲方程的非線性部分只牽涉到變數的二次項（也就是方程式右側的 XZ 以及 XY 兩項）所以可以想見，許多原本複雜的系統若做進一步簡化（例如只保留三個變數，同時將非線性項做泰勒展開，只取到二次項），說不定就有機會化身變成勞倫茲系統。這意味著，勞倫茲方程多少可視為混沌系統最簡單的典範。著眼於這一點，各式各樣的混沌應用想法通常也會先拿它來當白老鼠測試一番，以便檢驗成效與可行性。

例如，各種電玩多半會用到亂數產生器，因為這樣才能使遊戲有變化，令人無法摸透。既然勞倫茲方程中的變數 X 會隨時間做混沌變化，那我們說不定可以取出每一瞬間出現的 X，取其小數點以下第三位當成一種亂數，再應用到電玩設計中。至於取小數點以下第幾位最好，則是另一個問題。

在實作上，業界對於亂數的混亂程度有許多嚴格的要求與標準，所以上述想法若要實際應用，其實需要進行仔細的研究與評估。我們暫且不予討論。所幸，勞倫茲方程其他的應用還有很多，以下就略舉數例來介紹。

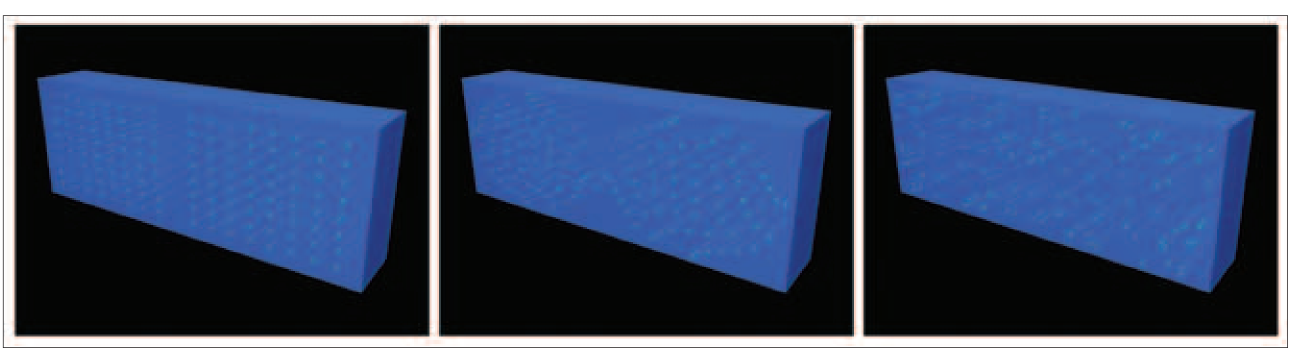


圖 10　勞倫茲方程在三個不同時刻所對應的對流混沌。

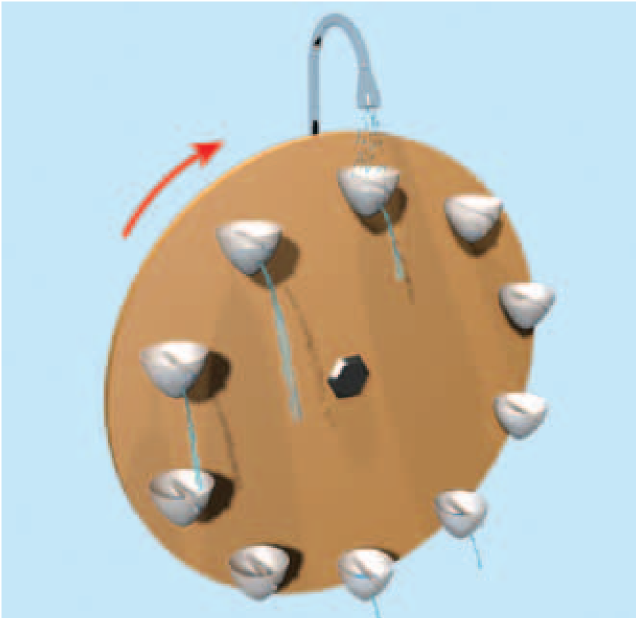


圖 11 混沌水車示意圖。

混沌水車

圖 11 中的特殊水車有點像摩天輪，沿著它的圓周懸吊著幾個保持正立的水杯，就像摩天輪上載人的艙廂。接近每個杯子的下方都開著小洞，讓水可以漏出去。水車上方的水龍頭會持續出水。若杯子剛好轉到水龍頭下方，承接到的水滴會增加杯子整體的重量。當杯子繼續往前轉動，多出來的水會使水車獲得額外的推動力矩。

如果水龍頭的出水量很小，杯中承接到的水重不但無法克服水車轉軸的摩擦力，最後還會從底部的小洞流失，結果水車當然轉不起來。這和對流問題中，上下溫差不夠大就無法讓液體翻滾對流有異曲同工之妙。既然如此，我們乾脆就把水車依順時針方向的轉動，稱為 X 模式，並將之與對流的快慢直接做類比。

由於水車的驅動是靠左右兩端所有杯子內水量的不平衡來決定，所以我們姑且把左輕右重這種不對稱的水量分布，稱為 Y 模式，若 Y 模式變號，則代表是左重右輕。此外，我們還可以把杯子內水量的分布拆解成頭輕腳重的 Z 模式；Z 模式變號，就表示當下水杯內的水是呈頭重腳輕的狀態。

假設目前水車的 X、Y、Z 模式都是正的狀態，則水車順時針轉動一小段時間後，原先頭輕腳重的水量分布，會因為順時針轉了一個小角度而削弱了左輕右重的不對稱性，而且水車速度越快，削弱的趨勢也越快，因此 Y 模式（左輕右重的狀態）隨時間的變率就和 $-XZ$ 有關。回顧一下，這不是剛好和勞倫茲方程中的 dY/dt 公式相對應！

一旦了解這個道理，我猜讀者一定可以很容易說明，何以頭輕腳重的 Z 模式之時間變率，會和勞倫茲方程中的 dZ/dt 公式相對應。總而言之，把混沌水車做一點數學的近似，勞倫茲方程竟然就神不知、鬼不覺的冒了出來。

這樣的水車有什麼用處？嗯，它的實用價值可能真的不高。但是，腦筋靈活的藝術家馬上就根據這個想法，製造出一部很大的混沌水車，把它裝設在博物館的門面。經過的人們都會駐足，仔細瞧一下這個看似平淡無奇卻頗會搞怪的水車，因為它竟然一會兒順轉、一會兒又莫名其妙的反轉，毫無規則可言。結果，博物館成功吸引好奇的人潮，設計師口袋也「麥克麥克」，群眾則在不經意中學到混沌的科學概念，皆大歡喜！

地磁反轉

科學家研究古地磁，發現地球的磁場方向曾經有過多次顛倒、然後再「更正」回來的現象。而且磁場持續指向同一方向的時間，有時很長，有時卻很短，看似沒有什麼規則可言。

造成地磁的成因極為複雜，但一般相信可能和地球內部高熱岩漿的對流運動有關。簡單的說，由於這些高熱岩漿應該能夠導電，岩漿中可能帶有電流並產生磁場。這個磁場的存在會反過來與岩漿中的

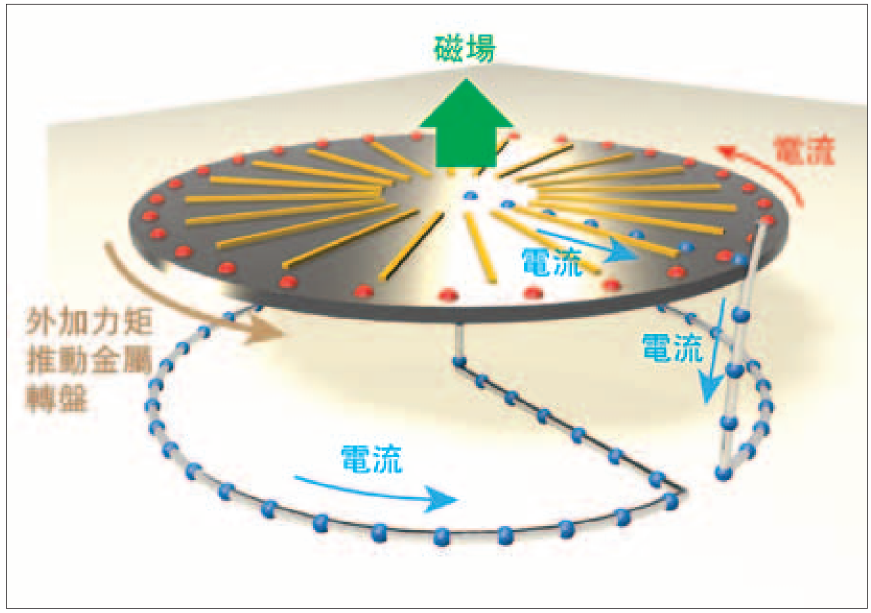


圖 12　一個地磁反轉的示意模型

電流交互作用，透過電流所受到的磁力，再去影響、耗損岩漿本身的對流運動。這和水力發電廠經由減損水流的動能來產生電磁能量很像。所以地球內部就好像一部天然形成的發電機，而地表觀測到的地磁現象只是複雜發電機的產物，它所透露的訊息，可能只是冰山一隅而已。

既然造成地磁的機制極為複雜，那要如何去理解它呢？在沒有更好的辦法下，各式各樣極度簡化過的地磁示意模型於焉產生。以下是其中一例。

在圖 12 這個模型中有一個可以轉動的金屬圓盤，它除了持續受到一個外加的轉動力矩以及摩擦力外，還可能因為表面上電流的流動而受到來自磁場磁力的影響。金屬圓盤上有絕緣的橘色隔條，可以限制藍色的電流，讓它只能沿著徑向流動。金屬盤的周邊則沒有隔條來做限制，因此沿著圓周可能會有紅色的電流。

流到金屬盤周圍的電流會被一條直立的銀色導線收集、導引，接著在金屬盤的下方以逆時針方向沿著一個圓形線圈流動，再被導引到中心，順著中心軸而上，最後把電流導回圓盤的圓心，於是完整走過一個迴路。

圖中圓盤周邊的紅色電流與下方圓形導線中的藍色電流，會共同產生一個垂直往上的綠色磁場。這個磁場穿過金屬盤，而金屬盤又在轉動、切割磁力線，於是沿著轉盤的徑向會造出一個電動勢來驅動電流。但是由於能量守恆的關係，轉盤自己也會付出代價：在它上面流動的電流會使圓盤受到一個來自磁場的阻力，於是轉盤的運動也受到影響。當然，圓形導線上的電流若發生改變，則根據冷次定律，導線上還會產生一個多出來的電動勢來設法抵抗這個變化，這個因素也得計入考量。

總的來說，轉盤的轉動速度以及藍色和紅色電流彼此間會交互作用而產生競合關係。經過簡單的代數運算後，科學家發現這三個隨時間改變的量所遵守的方程式，其實只不過是勞倫茲方程再度易容的模樣！既然勞倫茲方程中的變數在時間上有混沌現象，所以此模型造出來的磁場也一會兒往上、一會兒卻又往下，不斷改變方向。而磁場維持在特定方向上的時間長短也很混亂，沒有簡單規則性可言。

巴赫變奏曲

到目前為止，我們接觸到的勞倫茲方程應用都很學術性（意思就是一般老百姓可能很無感）。不過，對於當年就已經是職業鋼琴家的黛比（Diana Dabby）來說，偶然在報章雜誌上讀到的混沌理論卻如醍醐灌頂，造就了她日後全新的音樂創作靈感！而且為了能將一時的頓悟化為長期的真實知識，她毅然決然的回到學校和數學家學習混沌理論，最後竟然寫出一篇充滿了音符與樂譜、卻又貨真價實的混沌理論博士論文！

圖 13 上方藍色曲線是勞倫茲方程中 X 變數隨時間變化所產生的混亂波形，下方則是巴赫著名的 C 大調前奏曲的樂譜。

黛比博士從混沌理論中獲得的音樂創作靈感是這樣的。圖 13 上方的藍色曲線，是勞倫茲方程中 X 變數隨時間變化所產生的混亂波形。這個混沌波形顯然有如下的特色：它常常看似要重複某個波形，但卻為德不卒，才重複一小段時間後就反悔了，再改頭換面以另一種波形出現。當然，這現象說穿了就是「差之毫釐，失之千里」的老調重彈。

圖 13 下方的樂譜是巴赫（Johann S. Bach，也譯巴哈）《平均律》當中著名的〈第一號 C 大調前奏曲〉（Prelude No. 1 in C Major, BWV 846）。巴赫這首著名的音樂多少帶有上述的特性，亦即，曲中雖然有一些耳熟能詳的樂句會反覆出現，但仔細聆聽，可以聽出來這些樂句其實與時變化，在適當時機又會峰迴路轉，將聽眾帶回現實，使人感覺這雖是天籟，卻長存人間。

根據這個觀察，黛比就聯想到一種將巴赫音樂作變奏的絕妙招數！如果我們把這首音樂中的每一個音符與該混沌波形對應起來，然後檢視混沌波形中間的哪一段與前方的波形最相似，例如圖 14 上方曲線中紫紅色塊內的藍色粗線與粉紫色塊中的紅色粗線很像。一旦在混沌波形中找到這個對應，接著我們回頭去審視樂譜，把巴赫原始音樂中的紫紅色塊中的音符直接拿去取代粉紫色塊中的音符，那不就是把巴赫音樂變奏了嗎？這種變奏方式的最大賣點是：改造後的樂曲中每一個音符都是巴赫親手譜出來的，但是巴赫腦子裡卻從來沒出現過這個音樂。

必須提醒讀者的是，以上的描述其實是故意用簡化的方式來說明這種變奏的基本理念。黛比有嚴格的古典音樂訓練，當然不會天真的用這麼粗糙、暴力的方式去做剪貼。事實上，為了保持音樂的美感，她並不是直接將整個樂句剪去取代，而是以更細膩的手法操作，一個音符、一個音符仔細利用數學公式比對、取代，最後並對其創作進行嚴格的音樂學分析。黛比這段和巴赫的原始音樂同樣美妙動聽的變奏曲，最好親自聆聽才容易體會，各位不妨參考 YouYube 連結做進一步賞析：

https://youtu.be/dL4VKuKNgXI

勞倫茲的馮京馬涼故事

也許你在讀過本文後，對勞倫茲這名字已經有了較深刻的印象，也或許你過去在別的科普書或雜誌中已經接觸過這個名字。可是，筆者在最後仍然不得不為勞倫茲這個學界中響噹噹的姓氏正個名：其實在物理學史中有三位著名的科學家，他們極為相

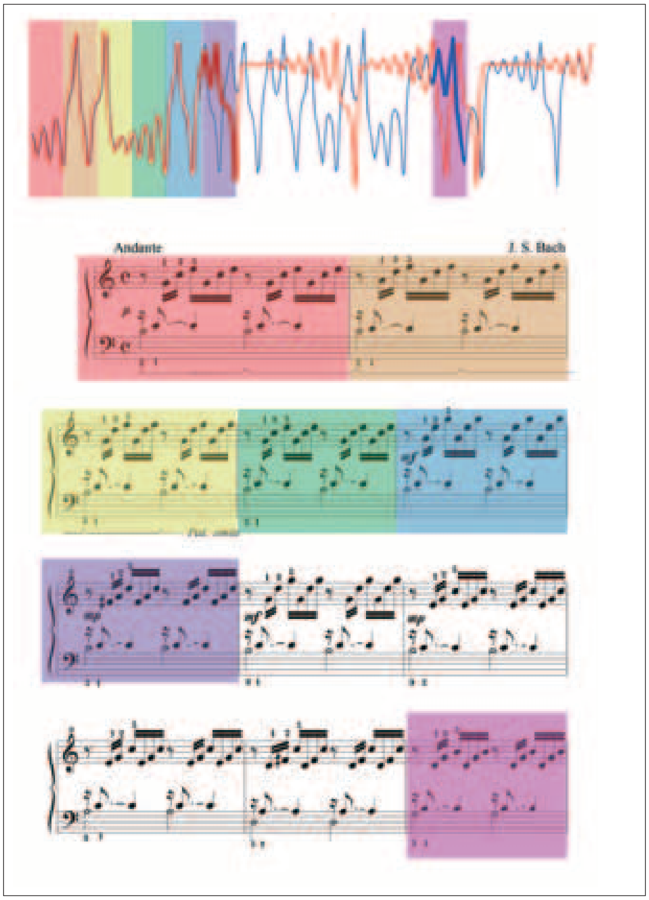


圖 14　把混沌波形與巴赫的音符對應起來。（紅對紅、橘對橘、黃對黃……）

似的姓氏在中文裡經常都被翻譯成勞倫茲！

最著名的那位，是荷蘭的亨德里克・勞侖茲（Hendrik Lorentz），他在古典電磁學與 19 世紀末原子結構的探討上都有非凡的洞識。相對論中經常提到的勞侖茲變換（Lorentz transformation）就是因他而命名。另外一位路德維希・勞倫茲（Ludvig V. Lorenz）則是丹麥人，他對 19 世紀電磁學的發展有極大貢獻。例如著名的勞倫茲規範（Lorenz gauge）對於解電磁波的傳播非常有用。不過這個優美的數學技巧過去常被錯誤歸功給荷蘭那位「勞倫茲」，就連我們的國家教育研究院學術名詞網站也犯相同錯誤。有趣的是，這兩位「勞倫茲」還各自獨立推導出相同的公式，描述物質折射率與其組成原子微觀性質的關係，於是這公式就稱為 Lorentz-Lorenz formula。由於姓氏拼字太像，你如果在書籍、文獻中看到誤引成 Lorentz-Lorentz 或是 Lorenz-Lorenz 的，也不用太大驚小怪，因為無所不在的混沌不就告訴我們「差之毫釐，失之千里」嗎？比較令人莞爾的是：混沌與這兩位「勞倫茲」其實八竿子打不著！

至於混沌理論一定會提到（也是本文反覆引用）的愛德華・勞倫茲，他離我們年代最近（雖然他和最著名的那位勞侖茲仍有超過十年的重疊）。然而這位受到部分學者尊稱為混沌之父的美國學者，也已於 2008 年辭世了。

斯人已故，但可以預期的是：這位勞倫茲以及更早的另外那兩位「勞倫茲」在科學上引起的浪潮，一定會繼續在世界各地傳播，啟迪更多對自然界充滿好奇的年輕心靈。∞

本文出處

本文主要內容為 2016 年 4 月 16 日作者在臺灣大學科學教育發展中心「秩序與複雜的華爾滋」系列講座的演講稿，並做增補而成。

延伸閱讀

▶ 陳義裕〈勞倫茲，蝴蝶，以及他們共同掀起的混沌風暴〉（2016/4/16），CASE 探索《秩序與複雜的華爾滋》系列講座第三講錄影：

https://youtu.be/H2xEqx5OdGI

▶ “Chaos VIII: Statistics; Lorenz’ Water Mill” 是上一期介紹過的混沌學習網站 www.chaos-math.org 中的第八章。其中有一部製作精美的解說影片，還可看到混沌水車的動畫。

http://www.chaos-math.org/en/chaos-viii-statistics

本文作者在演講中提到的混沌水車實作影片：

https://youtu.be/4IJ9lXxdSto

▶ Gleick, James *Chaos: Making a New Science*。臺灣譯本：葛雷易克《混沌：不測風雲的背後》（1991，2016 年新版），林和譯，天下文化。新版中有本文作者的全新〈導讀〉。

▶ Smale, S “Finding a horseshoe on Beaches of Rio” *Mathematical Intelligencer* 20 （1988） no.1。中譯版見本刊上期的〈在里約海灘發現馬蹄鐵〉。