

# 可預測的都很無趣，我們應該尋找驚奇

## 1966 年費爾茲獎與 2004 年阿貝爾獎得主阿提雅訪談

訪談者：格夏普拉達（Oscar García-Prada） 譯者：翁秉仁

受訪者簡介：阿提雅曾任教於劍橋與牛津大學，現為愛丁堡大學榮譽教授。他的研究領域寬廣，以阿提雅 / 辛格指標定理名於世，更是推動跨越數學與物理邊界的重要數學家。阿提雅於 1966 年獲費爾茲獎，2004 年與辛格合得阿貝爾獎。

訪談者簡介：格夏普拉達任職西班牙數理科學研究院（Instituto de Ciencias Matemáticas, ICMAT），研究與物理相關的微分幾何與代數幾何。他參與許多數學推廣活動，活躍於報紙、電臺與電視等媒體。



阿提雅攝於訪談當日。（García-Prada & EMS）

近幾十年，阿提雅和他的合作者改變了數學的面貌。在他的工作中，我們可以選出一些基礎研究為例：阿提雅 / 辛格指標定理（Atiyah-Singer index theorem）、楊 / 米爾斯方程（Yang-Mills equations）的幾何研究，以及在理論物理學的重要應用。阿提雅的貢獻完美展現數學的統一性，尤其顯示了數學和物理之間互動的重要性。在致力於這項主題的科學社群裡，他是影響深遠的主要角色。阿提雅得獎無數，其中包括 1966 年的費爾茲獎、1988 年柯普里獎（Copley Medal），以及 2004 年的阿貝爾獎。阿提雅也曾參與建立歐洲數學學會。

**問** | 眾所周知，你的研究是 20 與 21 世紀數學領域的重要篇章，如果能談談你在數學生涯中遇到的人物一定很有意思。

**答** | 好啊，我喜歡談論人。

**問** | 請先從大學、甚至學校時期對你有影響的老師

開始。當然，我特別想聽你談談你的兩位導師陶德（John Todd）和赫吉（William Hodge）。

**答** | 我的學校時期始於埃及開羅的一所英國中學，後來繼續在亞歷山卓（Alexandria，又譯亞歷山大港）上過學。我的數學老師非常好，只是人有點古板，不很靈活。我的意思是我受到良好但不特別的數學教育。我是班上年紀最小的學生，和同學大概差了兩歲。在學校裡，如果你比大家小了兩歲，事情就會發展成我得幫大一點的男孩做功課，他們則以保護我作為回報。於是，我結交了強而有力的朋友，他們塊頭大，但不很聰明。所以我是用幫忙作業的方式換來一群保鏢（笑）。在學校裡，如果年紀小，大家都比你大，很容易受霸凌，這事很重要，能這樣解決真好。

我在埃及的最後一年待在亞歷山卓。我的數學老師是位老派的人，他所受的訓練是化學而不是數學，但卻是一位好老師，人很簡樸，紀律嚴明。我依稀還記得有另一位老師，他接受的是完全不同的法國式教育。我想他應該是希臘人，名叫穆卓里斯（Mouzouris）。我記得他曾經送我一堆他在法國讀書時用的現代分析學書籍，這是我第一次接觸這類東西，不過沒有留下什麼印象。

然後，我進入英國曼徹斯特一所非常好的學校。當時，我父親到處詢問如何為進入大學作準備？哪所學校的數學最好？結果，大家不約而同告訴他曼徹斯特文法學校（Manchester Grammar School）。這是一所智識菁英學校，我們的數學老師非常勤奮，他 1912 年畢業於牛津大學，人雖然守舊，但上課很有啟發性。我為了通過競爭



劍橋大學三一學院。(Cmglee 攝，維基)

劇烈的劍橋大學入學考，在學校非常用功，當時我用功的程度可能勝過我這輩子的其他時期。

**問 | 你當時幾歲？**

**答 |** 我進曼徹斯特大概在 16、17 歲之間。由於同學們受過良好訓練，所以都拿到進入劍橋的獎學金。我進劍橋時的數學基礎很好。當然，由於同學都是各校的頂尖人物，所以剛進大學時，很難判斷自己和別人相比有多好。不過第一年結束時，我是全年級第一名，從這個角度，可以知道自己其實很不錯。我在大學裡結交了很多朋友，他們都是很好的數學家，其中許多人日後都很有名，不限於數學，還有其他領域。劍橋的確擁有很優秀的環境。

我就讀的是三一學院 (Trinity College)，這個學院因為牛頓，還有其他人如拉曼努真 (Srinivasa Ramanujan)、哈第 (Godfrey Hardy)、李托伍德 (John Littlewood) 等等而聞名。三一學院有很深厚的數學傳統。結果在 50 年之後，我又回到這所學院擔任院長 (笑)。

我在劍橋受到很好的數學訓練。不過課程倒是很一般，除了一兩位非常好的講師之外，其他都

很普通，甚至還有一兩位很糟糕的講者。我照章上課還加快速度，上了很多課，進步很快。在我大學第二年時就發表了第一篇文章。當時我上了陶德的一些課，聽到一個古典幾何的好問題，我做出一點小結果，陶德鼓勵我把它發表出來。雖然這只是一篇兩頁的文章，但我那時才大二，能夠發表文章覺得非常得意，這可能是我最自豪的文章了<sup>②</sup>。

這是很好的起步。之後我開始讀研究所，必須選定博士論文的指導老師<sup>③</sup>。我在大學部上過陶德的課，他是很好的數學家，但是人很害羞。我去見他時，他不說話；他願意討論問題，其他絕口不言。所以為了讓對話能繼續，我得準備很多額外的問題。

---

① 譯註：阿提雅在蘇丹 (Sudan) 的喀土穆 (Khartoum) 讀小學，因此他指的學校時期是初中階段。

② 譯註：即 "A note on the tangents of a twisted cubic" *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 48 (1952) Issue 1。

③ 譯註：阿提雅在 1949 年進入劍橋之前，先服了兩年兵役，因此他在大學部已經是年紀比較大的學生。他的前述文章發表於 1952 年。依照學制，他在大三時完成學士學位，隨即進入研究所，並在三年後的 1955 年取得博士學位。



赫吉。(Elliott and Fry 攝, *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*)

所以我決定不跟陶德，改選赫吉作為指導老師。赫吉因為他的研究成果，擁有更高的知名度與國際聲望。我對赫吉印象深刻，我想他應該會有更寬廣的眼光。赫吉的確如此，而且他和陶德是很不同的兩種人。赫吉是一位擅社交、外向而友善的人。如果你見到他，不會認為他是數學家，反而像是雜貨店老闆。事實上，後來我發現他的確來自擁有雜貨店的家族！很大很多的店（笑）！在赫吉的家族裡，他是唯一讀數學的人，其他人都都在他們店裡做生意等等。赫吉十分和藹可親、非常和善，他對我有很大的影響，指引我絕佳的研究方向。

因此，我擁有絕佳的職涯起步，並且很幸運的在正確時機踏入研究的道路。我有很優秀的同學，數學世界在戰後正開始轉變，在巴黎或者普林斯頓，數學的新概念正在發展萌芽。我那時每週都到圖書館去閱覽最新的《法國科學院院刊》（*Comptes Rendus*）<sup>4</sup>，研讀塞爾（Jean-Pierre Serre）和卡當（Henri Cartan）的新論文。偶而我也會聽到赫吉和普林斯頓的聯絡內容。所以我相當迅速的接觸到這些最新發展，這對我的學術起點頗有助益。後來，我就到普林斯頓去了。

**問 |** 你的博士論文研究的是什麼數學問題？那是赫吉建議的嗎？

**答 |** 怎麼說呢？我在論文裡完成兩個很不一樣的結果。其中之一是我自己選的問題，和幾何的直紋曲面（ruled surface）有關，那是古典幾何中由一系列直線所構成的曲面。我之所以對它感興

趣，是可以將這類曲面關連到向量叢（vector bundle）和層上同調（sheaf cohomology）的方法，進而使用當代

方法來進行曲面分類。這是這類研究的早期階段，後來這方面的進展演變成一門大工業。我在1953-54年寫下這個主題的第一篇論文，而且基本上是我獨力完成的<sup>5</sup>。

在我研究所第二年，赫吉發現如何運用當代方法，去著手他很感興趣的代數幾何積分這一整個問題。於是，他把入手的想法告訴我，由我將它發展完成。我們一起寫了一篇日後非常知名的論文<sup>6</sup>。所以，我的博士論文包括兩個很不同的部分，一部分完全是我自己的研究，另一部分是我與我的老師合作的結果。大概在第二年末，我的論文大致就完成了。

**問 |** 請告訴我們赫吉的數學淵源？

**答 |** 赫吉是蘇格蘭人。蘇格蘭有優良的數學傳統。他畢業自愛丁堡大學，也就是我現在任職的大學。他從愛丁堡到劍橋完成博士學位，因此具備雄厚的數學和物理背景，實質的關連到他日後的研究（如赫吉理論）。劍橋有很強的老幾何傳統，但赫吉遠離這些想法，走出自己的路。赫吉受到美國數學家列夫謝茲（Solomon Lefschetz）強烈的影響，當時列夫謝茲正以拓樸方法改革代數幾何，只是赫吉不能當面領受，因為那是發生在遠方的進展。他只能追隨列夫謝茲的著作與研究，最後才終於相識。因此赫吉的研究道路完全是自己的選擇，並不是依靠誰來成名，當然他當時還年輕，後來去了普林斯頓。有趣的是當赫吉第一

次見到列夫謝茲時，列夫謝茲拒絕相信赫吉已經完成證明<sup>4</sup>，他不斷論辯赫吉是錯的，赫吉花了很長的時間才說服列夫謝茲自己是正確的，畢竟赫吉只是以比較複雜的方式運用列夫謝茲的想法。列夫謝茲的個性很強勢，一旦他最後被赫吉所說服，就完全轉向，從赫吉的堅定反對者，變成堅定的支持者，並為他謀得教職。你想想看，從起初他認定的全是垃圾，變成「啊，真是太棒了！」列夫謝茲的個性還真是生動有趣。

我是赫吉的學生，所以我第一次到普林斯頓時就見到列夫謝茲，也見識到他的侵略性。當時列夫謝茲另有要事，不過當他檢視我和赫吉合寫的論文時，還是說「但是，理論在哪裡？快點！告訴我。」他是那種很受挑釁的人，會說出「這篇論文沒有什麼值得一談的東西」這種話。我想那就只是一種風格。我們後來成為好友，但他始終維持強烈的個性。

**問 |** 你在劍橋完成論文後就到普林斯頓去，你在那裡遇到的人，是否有值得一談的？

**答 |** 在普林斯頓高等研究院有許多傑出的永久教授，不過我到的時間太晚，已經見不到魏爾（Hermann Weyl）、馮諾曼（John von Neumann），以及愛因斯坦，他們大概都在那段期間過世。除此之外，高等研究院還有許多聰穎的年輕博士後。由於當時離戰後不久，因此累積了很多因為戰爭而影響學業的人，把好幾代人壓縮在同一個期間。我在那裡認識了賀茨布魯赫（Friedrich Hirzebruch）、小平邦彥（Kunihiko Kodaira）、史賓塞（Donald Spencer），以及

博特（Raoul Bott）。我和這幫人一起在普林斯頓待了一年半。在這段期間，我真正遇到許多數學天賦高絕的人，我學到很多以前從沒聽過的東西，像是李群和拓樸學。

**問 |** 他們當時都在普林斯頓嗎？

**答 |** 千真萬確，他們那時都在普林斯頓高等研究院。小平和史賓塞是很受尊敬的研究院教授，其他人則是博士後。我們聚在一起一、兩年，有些人以前就已來過。那是一個非常適合年輕人相識的場所，大家都從彼此身上學到很多東西。我們來自不同的學校，我在劍橋完全靠自己學習法國學派的數學，但是在普林斯頓，則享有很多個人接觸的影響，我和大家相處得很好，光是一年之內就學到非常多的東西。這就像某種成人的過程，突然之間，我變成專業數學家。我們學習到嶄新的概念，那裡是世界學術最尖端的地方之一，各式各樣的事情不斷發生，每週都有新進展，像特徵類（characteristic classes）、上同調

<sup>4</sup> 譯註：全名 *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Mathematique*。

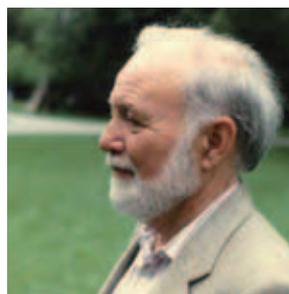
<sup>5</sup> 譯註：即 "Complex Fibre Bundles and Ruled Surfaces" *Proceedings of the London Mathematical Society* s3-5 (1955) Issue 4。

<sup>6</sup> 譯註：即 "Integrals of the Second Kind on an Algebraic Variety" *Annals of Mathematics, 2nd series* 62 (1955) No. 1。

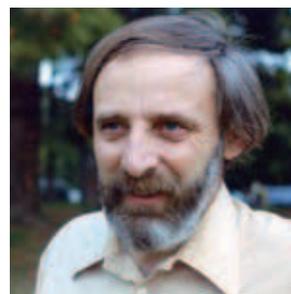
<sup>7</sup> 譯註：事實上列夫謝茲公開指責赫吉是錯誤的，要求他撤下論文。兩人還曾在劍橋交手，沒有結論。最後列夫謝茲邀赫吉到普林斯頓，一個月後，列夫謝茲公開撤回他的批評，強力支持赫吉。見 Atiyah, M. "William Vallance Douglas Hodge. 17 June 1903 -- 7 July 1975" *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* 22 (1976)。



阿提雅（左）和賀茨布魯赫。（Konrad Jacobs 攝，MFO）



辛格。（George M. Bergman 攝，MFO）



博特。（George M. Bergman 攝，MFO）

群等新理論。我加入的時機非常理想，其中也有自己的貢獻。

我在那裡認識賀茨布魯赫，他回到歐洲後，我們持續見面討論，順便結識在波昂的研究者。一切都好極了，我在完美的時機到達普林斯頓，然後再回到歐洲，那裡也有東西正在發展。

話說回來，戰爭在 1945 年結束，我到普林斯頓是 1955 年，這段時間足夠讓各種事情慢慢沈澱。我的很多同事雖然沒有真正參與作戰，但都接到徵召。辛格（Isadore Singer）在美國海軍服役；博特受完訓，即將上戰場；賀茨布魯赫很年輕時待過德國軍隊，戰後當過幾個月美軍戰俘，他那時才 17 歲，後來被釋放<sup>⑧</sup>。而我則正好踩在戰爭的尾巴上。戰時受到徵召的人，年齡比較大，陷在戰爭的時間也比較長。不過等我到普林斯頓時，戰爭已經結束十年。大家已經恢復了，時間正好。

**問 |** 你是在兩年之後回到歐洲的？

**答 |** 我在普林斯頓待了一年半才回到英國。我在劍橋有職位，所以回來任職，在劍橋待了幾年，再轉到牛津。

**問 |** 要不要談談你在劍橋與牛津的學生嗎？

**答 |** 我在劍橋的學生不多，因為我離開時還很年輕。不過我從老師赫吉那裡接收了一些學生，當時他雖然收學生，但已經是一個大忙人，根本沒有時間帶他們。戰爭糟蹋了赫吉的研究，戰前他很年輕時已經名滿天下，但戰時他必須留在學院裡處理冗雜的行政事務。到了戰爭結束，他已經

和研究隔了一層，所以他雖然收學生，卻把他們轉給了我。所以我最初的兩位學生是接收過來的，他們的情況還好，跟著我做論文。這對我是很好的準備，我必須學習如何處理學生事務。有些事剛開頭不很明顯，但後來你就會慢慢意識到，有些學生靠自學，有些很獨立，但也有很多需要大量協助，因為學生的程度差別很大。有些人數學很強，有些非常差。到牛津之前，我就只有這兩位學生。

我在牛津的時間長很多，陸續收到愈來愈多學生。當我們年輕時，總會納悶學生為何會來找你做研究。你必須年紀長一點，名聲大一點，學生才會來。我的學生很多，總共大概 50 個。當然學生人數很難算，因為學生的定義並不很清楚，有時別人的學生其實是你的學生。不過我這輩子大概有 40 到 50 個學生。在每個當下，我有五、六個博士生，大概每年收兩個學生，情況不錯。我在普林斯頓也收了四個學生。

**問 |** 你的意思是到了牛津之後，你又再去了普林斯頓？

**答 |** 沒錯。我第一次到牛津是 1961 年。1969 年，我到普林斯頓高等研究院任職。算起來，我先在牛津待了八年，又在普林斯頓待三年半，然後再回到牛津。在高等研究院的好處之一，是可以邀人來一起工作，可以做選擇。有一個學生魯茨提格（George Lusztig），是跟我一起從牛津過去的。他是一位很年輕又聰明的羅馬尼亞人，算是我普林斯頓的學生。另外，我也可以找人擔任研究助理，因此我邀請了希沁（Nigel Hitchin）。



牛津大學數學系舊館。(維基 GFDL + CC-BY All)



普林斯頓高等研究院。(Eecc攝, 維基)

**問 |** 他是你在牛津的學生，對吧？

**答 |** 他是我的學生，或者應該說是實質學生。名義上他的指導教授是別人，不過他的研究方向是我建議的，並且始終保持接觸，所以他其實也是我的學生。在那之前，還有西格爾（Graeme Segal），他曾經有一年是赫吉的學生。

**問 |** 是赫吉送他到牛津的嗎？

**答 |** 嗯，我想應該是西格爾把他自己送到牛津的（笑）。他到牛津來跟我做研究，那時我正在找學生。我在普林斯頓有一些學生，回到牛津又收了很多學生，我當時比較有名氣了，有許多學生來自劍橋和海外，其中幾位來自印度。像帕托迪（Vijay Patodi）就是非常年輕的印度人，他跟我做研究，算是我的實質學生。後來，我還有一些很傑出的學生，像多納森（Simon Donaldson）等人。這點曾經嚇著我，有一段時間，我以為自己再也收不到很好的學生，也許我做得不夠好，也許我不再活躍，也許該停止收學生。然後，事情轉向了，突然之間，你收到六個傑出的學生，這種事情很罕見。

當然，我們從學生身上能夠學到東西，尤其是非常好的學生如多納森，他當學生後就開始給演講，我都會去聽，即使他那時才剛開始做博士研

究。所以我們可以學到很多東西。學生這麼多，你給他們研究題目，鼓勵他們，告知問題的方向，給予不同程度的協助。有時學生一切自己來，有時我們得部分代勞，有時師生一起合作。我想這些都是很正面的經驗，我很享受。當我在高等研究院時並不真的有學生，畢竟那不是正式的大學。至於我在牛津的博士生，有些是本地人，有些來自外地，甚至海外像是澳洲（如西格爾）、美國、印度。反正，一切挺國際化的。

**問 |** 所以，你會和學生合作，例如希沁。

**答 |** 當然，我和學生合作，通常是在他們完成博士學位，成為我的年輕同事時。由於他們跟我做論文，大家領域相同，所以會繼續和希沁或西格爾一起發表論文是很自然的事。

通常，我會讓學生在稍微有點差別的領域做研究，譬如微分幾何、代數幾何、拓樸等等，這樣他們才不會都擠在同一個領域裡。我和他們合作，而他們都有自己的個性與數學品味，大家都不一樣。研究方向能有些許差別是很棒的事。你

④ 此處依阿提雅對賀茨布魯赫的悼文修訂。Atiyah, Michael "Friedrich Ernst Peter Hirzebruch 17 October 1927 — 27 May 2012" *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* (2014)。

可以增廣見聞，由於他們各有分析、幾何、拓樸等長處，這樣我們就可以跟這些 20 來歲的學生學習，因為他們比你還專業，像西格爾後來精通同倫論 (homotopy theory)，希沁則更專精於微分幾何等等。這是一種學習的方式。剛起步做研究時，你學了一些東西，但是開始教書後，就沒有那麼多時間再回頭去讀書，因此你得改變學習的方式，其中一種方法就是透過和學生合作。

**問 |** 或許你可以告訴我們職涯中的主要合作關係。

**答 |** 好的，若只論比較年長或平輩的主要合作者，首先是賀茨布魯赫，他看起來似乎比我老，但只比我大兩歲。我曾當過兩年兵，但他沒有正式當兵。他很年輕就獲得晉升，我剛完成博士論文時，他已經是正教授。不過或許因為我們年紀真的差不了多少，因此建立了很長的合作關係，我常常去波昂，和他一起發展各種想法。很自然的，我們也常合寫文章。另外兩位我常合作的人是博特和辛格。他們分別在美國的哈佛與麻省理工學院，我們會在普林斯頓見面，不然就是我到麻省理工，或者他們來牛津。

我們花很多時間一起討論，一起寫文章，我們具有共通的興趣，卻也各有所長。賀茨布魯赫在許多方面都和我很親近，他是我的學習對象。賀茨布魯赫是特徵類和代數拓樸的專家，博特很熟悉微分幾何和李群，辛格則有廣博的分析背景，擅長泛函分析與希爾伯特空間理論。他們各有稍微不同的專精領域，也有很多重疊之處，因此我們有許多共同的興趣，這一點非常棒，我才能寫出許多論文。而且，他們不只是專家，還認識



阿提雅 (左) 和辛格攝於 2009 年阿提雅 80 歲生日學術會議。(Köppe, Thomas 攝 · MFO)

許多道地的行家。辛格有很多好朋友是微分方程領域的領導人物。博特認識很多拓樸領域的人，他也在波昂結識許多友人，他們都有很寬廣的學術網絡，包含許多數學家 and 學生。譬如史梅爾 (Stephen Smale) 和奎倫 (Daniel Quillen) 都是博特的學生，這也提供很好的人脈。

我喜愛社交，喜歡談話，就像現在一樣 (笑)，更熱愛討論數學。我們常在黑板上討論，交換想法。我喜歡這樣，很能刺激想法。談完之後，我們各自回去思考，然後再回來一起討論。這是一個社交性的過程，所以能結交好友。在這種意義上，研究關係是非常親密的。以上三位是我的主要合作者。

我也有年輕一輩的合作者，像西格爾、希沁，以及更後來的克宛 (Frances Kirwan)。我很少和希沁與克宛合寫文章，雖然合作關係類似剛才所提，但角色相反，因為我是老師，他們是學生。我們也有共通的興趣，他們也和老一輩有平行的研究興趣。他們是新的一代，有新的想法，因此是非常理想的網絡。

**問 |** 你在物理社群裡也有很好的朋友，尤其是韋頓 (Edward Witten)，不是嗎？

**答 |** 那是更後來的事。1970 年代早期，我在美國認識了韋頓。當時，我們剛發現物理學家正在研究的題材和我與辛格的工作有重疊。於是，我到美國和四位麻省理工的物理學家會面，大部分年



由左至右，韋頓、希沁攝於 2009 年阿提雅 80 歲生日學術會議。西格爾。多納森。（除西格爾為 George M. Bergman 攝，其餘皆為 Gert-Martin Greuel：MFO）

紀都比較大，還有一個年輕小夥子坐在椅子上。最終討論結束後，我意識到他真的非常聰明，對於我想解釋的數學理解更多，那個小夥子就是韋頓。他當時還是資淺的學者。之後，我邀請韋頓到牛津訪問幾星期，得以更深入的理解他。所以，我從韋頓是哈佛的年輕博士後時就認識他。韋頓總是非常非常令人驚豔，我從他身上學到非常多東西，也嘗試閱讀幾乎他寫的所有論文。韋頓的著作甚豐，我認為我的主要貢獻之一，就是藉著如韋頓與他的合作者的研究，向數學世界介紹源自物理學的理念。剛開始的時候，許多數學家很懷疑物理學家，他們強調物理和數學沒有關係：「他們不證明定理。」「那是很可疑的行業。」所以我因為整天和壞朋友鬼混，搞得名聲很差（笑）。我想就連韋頓，數學家也難免懷疑。但是他們也理解韋頓可以做出他們做不到的事情，韋頓打開許多道門，因此還得到費爾茲獎。所以我的受教過程，有一部分是追隨韋頓的研究發展，多年之後，我好像是他的研究生一樣。我曾經和韋頓一起待在加州理工學院一學期，那段時間我好像重讀研究所。每天早上我去找他，花一小時討論各種問題，離開之後，我思考 23 小時，而他在這段時間可以處理其他事情。然後，隔天早上我再回去繼續我們的討論。我得要花功夫才能跟得上他。

**問 |** 結果你們合寫了一篇論文。

**答 |** 對，一篇 100 頁的文章<sup>⑩</sup>。我撰寫其中一部分。韋頓認為我們應該研究這個課題，可能是因為這

和我以前的工作有關。他對這個問題有些點子，因此推動整個研究的進行。韋頓真的很厲害，偶而對這個問題的數學面有爭議時，他通常是對的，我是錯的（笑）。通常！這真是難得的經驗。那個時候，我已經慢慢老了，嗯，至少該說，年歲漸增，但我就像重當學生一樣，實在很刺激。即使如今在愛丁堡大學，與我合作的人仍有許多物理學家、數學物理學家，他們是新一代的物理學家。我做的數學愈來愈和物理有關。

**問 |** 回到更早之前，你也和潘洛斯（Roger Penrose）有很多接觸。

**答 |** 是的，潘洛斯我的同期同學。他來自倫敦，和我同一年開始攻讀博士。他本來也是赫吉的學生，不過因為興趣不同，他們兩人處不來，所以一年之後，他就改投陶德門下。

**問 |** 剛好和你相反。

**答 |** 是，我先受教於陶德。聽起來很諷刺，因為陶德主要的研究領域正是代數和幾何。潘洛斯完成劍橋的學業到別處之後，我和他就失去聯繫。他那時已經對物理十分認真。我們重新相遇，是在他到牛津擔任數學物理教授，而我從普林斯頓回來之後。我們開始重建關係，我們的研究都源自

<sup>⑨</sup> 譯註：博特這兩位學生都是費爾茲獎得主

<sup>⑩</sup> 譯註：即 "M-Theory Dynamics on a Manifold of  $G_2$  Holonomy" *Advances in Theoretical and Mathematical Physics* 6 (2002) No. 1。



陳省身 1968 年攝於柏克萊。(George M. Bergman 攝, MFO)

代數幾何，因此他可以跟我解釋他的研究，過了一陣子，我發現他真正需要的是現代層論 (sheaf theory) 的概念。我也跟他的研究群介紹物理的新觀念，進行得十分理想，我還與潘洛斯的學生華德 (Richard Ward) 合寫過一篇文章，我們的互動很好。非常有趣的是，在我從普林斯頓回到牛津之前，曾和戴森 (Freeman Dyson) 討論過。當話題談到潘洛斯時，他說：「潘洛斯在黑洞的研究非常優秀，我很讚賞。但是他的扭量 (twistor) 理論就很彀扭，我實在搞不懂，或許你回去牛津之後，可以弄懂什麼是扭量。」他說對了，千真萬確 (笑)，那正是我和潘洛斯聯繫的重點。

**問 |** 這和你們共通的代數幾何背景有關，不是嗎？

**答 |** 當然，我們都很懂古典幾何，也都學過線的克萊恩表現 (Klein representation) 與格拉斯曼空間 (Grassmanian)，這是很理想的關係，我們進行得很好。潘洛斯有很多學生，他和這群學生一起合作。他更年輕時也和霍金 (Stephen Hawking) 合作過，所以在牛津我和物理學家也很有聯絡，學了很多東西，不過其中有一部分是透過辛格。

辛格和博特剛開始的興趣都不是數學。博特受的是電機工程師的訓練，辛格則是物理學，他們都是後來才轉入數學。辛格感覺物理研究裡的物理不夠嚴格。博特則是透過魏爾的影響進入數學，從某種觀點，可以說是魏爾把他帶入正途。他們來自不同的背景，在那個年代，許多人不要把數學家視為一種職業。父執輩認為我們不應該從

事這一行，應該受真正的職業訓練，就像工程師一樣，那樣才能賺到錢 (笑)。談到職位，那時數學家並不被認為是正式職稱。當然，現在情況已經有所轉變，但是當時完全不是那麼一回事。

辛格和博特都熟識陳省身，陳省身和楊振寧也是好友。所以這裡有一串連結：楊振寧、李政道、西蒙斯 (Jim Simons)、陳省身、辛格，當現代物理學萌發時，他們同時提供了思考的起點，但這一切其實很偶然。

因為荒唐的是，本來高等研究院有一個宏大的數學和自然科學研究所，原來是合為一體的，後來卻分開了。高等研究院最初聘請的都是大人物：愛因斯坦、魏爾、馮諾曼、哥德爾 (Kurt Gödel) 等，像包立 (Wolfgang Pauli) 也在那裡待過。後來數學變成不同的數學，更接近布巴基學派 (Bourbaki) 風格，更加純數學，漸漸脫離物理的影響。

當我到達高等研究院時，兩邊已經完全分離，就好像離婚一樣，彼此不再對話。只有戴森還提供雙方的連結，因為他先是數學家，再成為物理學家。兩個領域走往不同的方向，追求不同的東西。可以這麼說，數學家對物理沒多大同情心，他們覺得物理是一筆亂帳，不是真正的嚴格。但是反過來，物理學家對數學也有類似的想法。由於現代數學非常抽象，所以雙方沒有聯繫。但後來事情慢慢轉變，因為韋頓的出現，事情完全不一樣了。數學和物理的互動增加，雙方建立共同的討論班，只是彼此還是保持一點距離。

**問 |** 不過，如果回到 1950 年代，當時物理學家發



魏爾。(維基)

展楊 / 米爾斯 (Yang-Mills) 理論，而數學同時發展叢 (bundle)、陳氏類 (Chern class)、聯絡 (connection) 等等理論，這真是純屬偶然嗎？中間沒有關聯嗎？

**答 |** 這是一段非常有趣的歷史。整個故事的源頭其實是魏爾。他把規範場論 (gauge theory) 介紹給物理學界，他還寫下第一篇如何運用規範場論的論文。他是數學界的大人物，很早就任職於高等研究院。不過他過世於 1955 年，正是我到達研究院的那一年。楊 / 米爾斯理論差不多也在那個時候開始發展。我見到正在研究院訪問的米爾斯 (Robert Mills)。或許，當魏爾還對物理感興趣時，楊曾經和他討論過。

**問 |** 他們在普林斯頓的時間有重疊，不過我相信他們不可能有機會討論。

**答 |** 也是。當時魏爾年事已高，他對物理的興趣已經是 20 年前的事。現代物理學的發展已經轉往差異很大的方向。魏爾自己的研究也很不一樣。當時，科學家已經發現新粒子，但他並沒有多放心力在上頭。不過魏爾是一個大器的長者，如果他們曾和他討論，魏爾一定會將所有聯絡、李群這些理論傾囊相授。他沒有這麼做，或許只是時代和時機的偶然，我始終覺得魏爾和楊沒有接觸討論很奇怪。這樣一個大好機會就這麼錯過了。

類似的，和我差不多同時的劍橋同學蕭 (Ronald Shaw) 以此為博士論文，獨立的發現了規範場論，但他老師說這個「不值得發表」，可憐的傢伙，他從未發表這項結果。不過，當年

的物理學界有反對的聲音，所以這類想法不受歡迎，只能被忽略。

還要再等多年之後，人們開始重新檢視這個理論，也找到一些真正的物理應用，整個理論才開始流行起來。這大概是 15 年後了，物理學家重拾這門理論是 1970 年代的事，其間他們關注的是不同的東西——對稱性、粒子表現 (representation)、分類等等。他們做的是不同的研究，楊 / 米爾斯理論因此落到後頭。當它重現時，正是我和辛格開始涉足這項理論，對它感興趣的時候，因為我們處理的數學課題正好與此相關。

魏爾知道這一切，包括物理和數學。他的成就走在物理學家之前，但是物理學家從未強調幾何這一面的故事。

**問 |** 不過大家總感覺其中有一個失落的環節，這讓整件事顯得更神祕。雙方同時發展類似的東西，卻花了很多時間才認識到這回事。

**答 |** 這樣看吧。魏爾發展規範理論是為了統一電磁學和愛因斯坦的相對論。當他撰寫論文時，愛

① 譯註：原文「拿的都不是數學學位」過強。辛格起初的興趣是物理，但為了打下數學基礎，打算先讀數學碩士，後來受到數學吸引，決定繼續攻讀博士。不過他的研究方向的確和數學物理較相關，或許阿提雅認為這樣不算數學。

② 譯註：原稿這裡接了一句 because he had taught them in Chicago，語意不明。論年紀，辛格、博特、楊振寧大約同輩，陳省身則高一個輩分。不過陳省身和楊振寧早在中國就認識，楊的父親楊武之在北京清華大學教過陳省身，接著，陳在清華也教過楊振寧。1949 年，當陳省身到芝加哥大學任職時，楊振寧正前往高等研究院。真的和陳省身在芝大有點重疊的是辛格，他 1950 年在芝大拿到博士學位。

因斯坦告訴魏爾，這在物理學上是胡扯，因為魏爾用的是實線叢（real line bundle），以此來提供尺度的變換。規範理論和尺度有關，魏爾想法的推論是在磁場中沿著迴圈繞回來時，將會改變東西的長度和尺度，所以愛因斯坦才認為這是胡扯。一旦如此，所有的氫原子就不會有相同的質量，因為彼此的歷史不同。

儘管如此，魏爾還是發表了文章。我覺得這一點很有趣。魏爾堅持他的想法沒錯，所以發表了文章，並且還把愛因斯坦的反對意見附在文後，當作附錄。所以，魏爾是知道的。幾年之後，量子力學出現了，物理學家將尺度變換重新詮釋成相位變換，物理界的反對意見就消失了，整個變成標準的理論，現代的標準理論。不過那個時候，魏爾已經放下這個主題，他離開了，不曾再實際參與這個課題。但是，當然他知道這是他的理論，雖然非交換場論要在他身後才開始發展。如果他活久一點，他可能就是主要的失落環節。

**問 |** 有趣的是，當時數學界也在發展非交換的理論。

**答 |** 是的，但那是不可避免的。重點是，叢論根本是黎曼幾何的支脈。而這是黎曼和義大利幾何學家所發展的：微分幾何、平行移動（parallel transport）等等。他們處理的是切叢（tangent bundle）、度量（metric），而非其他超結構的叢，相對比較簡單，只有度量的問題難一點。

當愛因斯坦提出廣義相對論時，微分幾何學家都非常感興趣，帶動了後來微分幾何的蓬勃發展。由於平行移動是廣義相對論的重要概念，所以這是自然的結果。

真正新穎的是在空間之上的向量叢（vector bundle），這是絕佳的想法。由於幾何學家對平行移動的概念早已了然於心，所以短期之內，陳省身和威伊（André Weil）便把它帶到叢論以及特徵類（characteristic class）理論之內。在數學裡，這些想法淵遠流長，從黎曼和貝堤（Enrico Betti）的微分幾何開始，愛因斯坦的相對論在微分幾何注入新動力，後來則是楊 / 米爾斯理論和叢論。

這些都是數學的一部分。當時辛格和我的研究連結到狄拉克方程，這是物理學家熟悉的一類微分方程，其中牽涉到自旋（spin）、旋量（spinor）等等。這些算是新的數學，以前沒有人很嚴格的研究過。誰知道呢？我想數學總是在那兒。物理學家只是這裡碰一下，那裡摸一下，只有到後來才開始認真感興趣。然後魏爾過世了。這是一段有趣的故事，不過就像生命中的大部分的物事，事情的發展和你的期待總有差異，如果事後回顧，會發現其實和獲得的不同，你進行的方式可能不一樣。這些只是偶然的效應，端賴時代的風尚、當時的人物與他們的個性。這真的很有趣，往往是不可預測的、非必然的結果，靠的是一點機運。

**問 |** 在那一段令人興奮的時間之後，理論物理學的整體面貌起了很大的變化，許多來自你的貢獻，還有你的合作者以及你的學派的研究工作。舉例來說，模空間（moduli space）如今在物理學裡已經無所不在。

**答 |** 是的，那是我們開的頭。這項理論以代數幾何

為框架，這當然是因為我熟悉這個領域。所以，物理學家開始認真看待弦論，數學傾向愈來愈強，他們接收了大量他人完成的數學，我的學生則被多納森理論所吸引，因此在 1970 年代後，雙方互動大為增加，產生很大的影響，一直到現在。物理和數學持續提供對方所需的養分。

**問 |** 我想問一個問題。你對現狀的感覺如何？最近有什麼重要的事情在萌芽嗎？

**答 |** 人老了，當然會和現狀有點脫節，只能間接聽到一些什麼。我會閱讀新文章，知道陳 / 威伊理論有些新發展，其中一部分是我感興趣的，像是結論 (knot theory) 等等，我會相當程度試著去弄懂，雖然現在比以前沒那麼努力了。數學常常愈來愈複雜精密，有些益發抽象的東西如導來範疇 (derived category)，上了年紀的人不喜歡。

不過我和別人的互動還是很密切，現在有一整代的人，研究領域既是數學也是物理，很難分辨他們到底是數學家還是物理學家，他們是雜合的混種，但這意味他們會遇到一些困難，因為物理學家不認為他們是物理學家，數學家不接受他們是數學家，因此有時很難找工作。我的意思是如果你非驢非馬，誰會給你職位。不過我認為這是一個很健康的現象，而且研究中心很鼓勵這樣雜合的想法如弦論。所以，沒有問題，這仍然是非常活躍的領域。但這一切，對物理學的意義確切為何？雖然物理和數學關係密切，但也有差異：物理尋求宇宙的唯一解答，而數學探索的是所有可能的宇宙或可能的理論。所以數學家能獲得很多很多的想法。有些想法在物理中死去，因為他



阿提雅（右）和訪談者攝於訪談當日。（García-Prada & EMS）

們偏好新想法，但是數學家可以研究任何東西，所以他們的本質有所不同。你永遠搞不懂物理。

我有自己的想法。雖然我密切注意研究的發展，但我會試著獨立一點。緊緊跟隨年輕人研究的方向並沒有什麼道理。我想有更新鮮的想法，更有原創性一點。我思考一些稍微離經叛道的新想法，和現在物理學家正研究的不同。我的意思是，沒有人知道物理是否存在最終理論，是否正接近最終理論，抑或，五年內其實一切就會完全不同。也有可能這一系列研究會繼續演變，最終有非常激烈的改變。現在的想法有些會被吸收，有些將被淘汰，有些會改變，但是數學將從這一切受益，不論那是好物理還是壞物理。這些理論有數學的內容，因此數學家可以學習很多。例如鏡對稱 (mirror symmetry) 與弦論對偶性 (string duality) 都是來自物理的觀念，有很多類似這樣的概念。我想應該是韋頓說了底下這句鼓動人心的話：「弦論是 21 世紀數學的一個分支，卻在 20 世紀被偶然發現了」。弦論如今已經嶄然自立，這個理論的意義並不是很清楚，但是它帶來轉變數學的新想法，我們正處於某種概念漩渦的中心，就像四面八方襲來的旋風。你不知道將會發生什麼。預測很難，而且我們也不想預測。因為所有能預測的都很無趣，有趣的東西是新鮮的發展，可以預測就不刺激了。所以我們必須為將來的驚訝做好準備，我們應該取尋找驚奇，現在，未來，處處都會有驚奇。

**問 |** 看到你在這個會議中表現的活力，我真的很驚訝<sup>①</sup>。請告訴我，這段時間你都在做什麼？

**答 |** 遺憾的是，我和太太已經老了。她身體有很多毛病，我要花很多時間照顧她。其實我們都一樣，不是這裡就是那裡有問題，她佔用我大約75%的時間。參加像這樣的會議是很稀少的事件，可以享受一段討論科學的假期。我在家裡幾乎不得閒，只有一些物理朋友，一兩週討論一次我的想法。過去一、兩年，我忙於撰寫賀茨布魯赫的傳記文章，忙一些倫敦數學學會的事，還有一些皇家學會的事（耗掉我很多時間，卻還沒結束）。事情總是有優先順序，當我還在這裡，就得做點事。

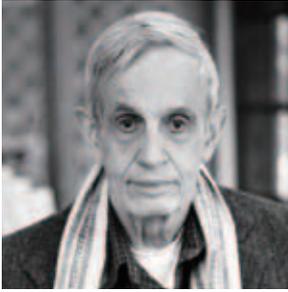
在外頭，我有些瘋狂的想法想要探討，所以我常和年輕人談，我需要年輕人澈底檢視這些想法。對我而言，今年這個會議其實有點意外，因為其中一些想法是我非常久以前的成果，我沒想到還有那麼多人在研究實向量叢。所以，我就來了，發現可以聽懂一些，但不是全部。其中很多是延伸自我50年前寫的文章。這是很好玩的經驗，我現在正在體會。這裡的會議廳像一個大戲院，我坐在高處，因為出入比較方便。年輕人在底下，他們忙著談論我以及我50年前的研究。我覺得我好像坐在雲端，回顧我的過去。我飄浮而上，愈來愈接近天堂。這種經驗有時還蠻詭異的，下面的人甚至不知道我就在那裡（笑）。而且，回顧自己50年前的研究，實在有點滑稽，因為我甚至讀不懂自己的文章。年輕時，我們是又快又準，結果現在讀自己的文章，才發現它很

難（笑）。儘管我理解其中的原則，但是卻已經忘記某些技巧，現在已經沒法做得動了，因為還得仔細檢視一些可怕的符號問題。雖然這樣的經驗有點古怪，我還是非常高興，知道我多年以前的研究仍然存活。物換星移，許多人的研究被人遺忘，但是我50年前的研究，竟然還有人用，被年輕人重新發現或重新發展，還被推往新的研究方向，這真的很振奮人心。我雖然不能全部聽懂，但我看得出來，研究的方向很優越，將會取得進展。

雖然會議的規模不大，但我很高興能到這裡參加這項特別的活動。儘管機會不多，我也會參加別的會議，給演講和討論。我近年曾經參加過義大利一些節慶活動<sup>②</sup>，義大利人很喜歡這類活動，其中有音樂、詩，以及數學，非常美好，一種文化融合，文藝復興的概念，義大利人喜歡這樣的活動，經常舉辦。那段時間，我去了羅馬、米蘭等地，最後一站是那不勒斯的南邊，遇到許多有趣的人。我記得我在羅馬遇到史帕斯基（Boris Spassky），他是前西洋棋王，我們聊了許多關於西洋棋的話題。我在那裡還遇到數學家納許（John Nash），他曾經獲得諾貝爾經濟獎。我在普林斯頓時聽過他一些事情，納許當時精神狀況有點問題，但現在已經完全康復。不過當然他已經老了，比我還老。<sup>③</sup>

**問 |** 你們在那個場合給了演講嗎？

**答 |** 有的。舉例來說，主辦單位訪問納許，談論他的生涯，以及以他一生為主軸的電影，我在場聆聽。故事很有趣，當然也很令人感傷，但至少他



納許。(Peter Badge 攝，維基)



科爾賀。(Paul Macleod 攝，維基)

已經從久病中康復。在這個活動裡還碰到很多有趣的人，像我就在下榻的另一個旅館遇到一號人物——巴西作家科爾賀（Paolo Coelho），他的名聲很大。我們剛好在一場合同台<sup>16</sup>，他並不怎麼在意數學，不過算是一位大人物。所以我們會碰到各式各樣的人，包括音樂家、詩人等等。

**問 |** 你最近有一篇論文談論數學與美的關係？

**答 |** 我有一位合作的朋友哲吉（Semir Zeki），他是神經生理學家，和我一樣來自黎巴嫩。有時我們會一起做黎巴嫩菜，順便討論一些話題。他對藝術非常有興趣，曾經寫過一本討論藝術與視覺的書，比較畫家試圖完成的藝術和他大腦中的過程，他運用的技術是大腦斷層掃描。於是，我們自然而然的談到數學的問題。我問他是否知道思考數學時的大腦過程，最後我們合作，寫了一些東西，最近的一篇談的是「美」<sup>17</sup>。當數學家談到美時，他們了解自己在說什麼，但是這和藝術和音樂中的美是同一種美嗎？生理現象相同嗎？他和團隊的實驗結果，基本上是肯定的，有一個共同的腦區亮起來了，不管你談的是數學之美或藝術之美都一樣。當然，有些其他腦區的活躍與否和脈絡有關，但是有一部份是相同的。因此美的抽象觀念內建在大腦中，不論對象是數學、繪畫、音樂，都是相同的經驗。當我們使用「美」這個詞的時候，是沒有問題的。

**問 |** 所以你也有一些數學和其他藝術關聯的體驗嗎？

**答 |** 我們都知道自己心中的美是什麼。我們透過音

樂和藝術來體驗美，我們也知道如何藉由數學來品賞美。我認為兩者是一樣的，可是別人不知道這是否客觀。但現在證明出現了，用科學來證明而不僅止於主觀經驗。美的觀念在生理上有相同的經驗基礎。

我們的結果一發表，馬上獲得全球矚目，《紐約時報》、《倫敦時報》、一家馬德里的報紙等等都有文章討論這項結果。由於大家都能理解論文的意義，流傳才會這麼迅速。其實最剛開頭的時候，我們的文章連發表都有問題，因為那些守著傳統的人不太能接受這樣的東西。但是，顯然大眾覺得這項結果極為迷人。

**問 |** 所以，你覺得一般人在見到或證明一個美麗的定理時，也會受到感動，就像我們聆聽或演奏一段優美的音樂一樣嗎？

<sup>15</sup> 譯註：2014年7月，阿提雅接受訪談的場合，是參加法國勒白格研究中心（Centre Henri Lebesgue）在布赫斯特（Brest）舉辦的實向量叢學術會議，會議主題是阿提雅50多年前的一篇重要論文：“K-theory and reality”, *The Quarterly Journal of Mathematics* 17 (1966) No. 1。

<sup>14</sup> 譯註：這是舉行於2007年3月的第一屆 Festival della Matematica “La bellezza dei numeri e i numeri della bellezza”（數學季「數之美與美之數」），地點在羅馬，主辦單位邀請了許多知名數學家與會。

<sup>13</sup> 訪談時，納許還在世。

<sup>12</sup> 譯註：原訪談有點模糊，其實這是另一個夏季活動：LA MILANESIANA 2008（2008米蘭節）。阿提雅和科爾賀連續兩天同台，參加名為〈生命的元素〉（Elementi della vita）與〈激情的幾何〉（Geometria delle passioni）的論壇，與談者還包括其他知名作家、音樂家、歌手等。

<sup>11</sup> 譯註：關於這段討論的主題，可參看〈掃描數學家的腦〉（《數理人文》第2期）與〈數學之美〉（《數理人文》第7期）。



哲吉。(Paul Macleod 攝, 維基)

**答 |** 當然。我知道這兩者明顯不同，但是音樂和繪畫也很不一樣，有很大的差異，但我們在欣賞這些藝術時，有一部分是相同的。我認為如此。

**問 |** 但是要欣賞數學比較困難，不是嗎？

**答 |** 的確更難，但這正是重點所在。本來我們並不確定使用「美」這個字眼是否妥當。作為數學家，我們知道何謂數學之美，我認為數學的美和音樂的美是可以比較的。它們並不相同，但是可以比較，這一點無可置疑，我們知道什麼是真正美麗的定理（笑）。這是一種主觀感受，卻是真實的。魏爾曾經說過一句話：「我大部分的人生都在追索真和美。一旦有所懷疑，我總是會選擇美。」有些人覺得這句話很荒唐，你怎麼可能懷疑真理呢？不過我不認同這種想法，真理是某種你永遠無法企及的東西，你總是在追求真理的過程中獲得別的東西，在任何時刻，我們能掌握的只是真理的逼近，是一種部分真理，它甚至可能只是幻象。不過美是主觀的，是一種立即而直接的經驗。我們可以看到美。我會這麼說，美是引領我們前往真理的火炬，人們可以見到它散發的光芒，指引前進的方向。經驗告訴我們，美麗的東西會導引到真確的結果。所以我認為真與美之間有非常有趣的連結。我想魏爾會同意這個說法，有人說他的話是笑話，但我很確定他真的這樣認為。

**問 |** 談到美，快到晚餐的時間了。

**答 |** 是啊（笑）。



左起 Henrik Pedersen、希沁與其夫人、阿提雅、作者、西格爾、Jacques Hurtubise，以及 Jean-Pierre Bourguignon。2016 年 9 月 10 日攝於牛津的希沁 70 歲生日學術會議。(EMS)

**問 |** 所以我不該占用你更多的時間。非常感謝你接受訪問。

**答 |** 當然，很謝謝你。

**問 |** 真的很感激，我非常享受這段聆聽你談話的時光。☺

#### 本文出處

這篇訪談進行於 2014 年 7 月 10 日。本文最先以西班牙文出版於西班牙皇家數學會的 *La Gaceta de la RSME* 19 (2016) No 2。後來再以英文登載於歐洲數學學會的 *EMS Newsletter*, Dec. 2016，本文翻譯自後者。本刊感謝作者與歐洲數學學會同意轉載翻譯。

#### 譯者簡介

翁秉仁為臺灣大學數學系副教授。

#### 延伸閱讀

► Minio, Robert "An Interview with Michael Atiyah" *Mathematical Intelligencer* 6 (1984) No.1。這是 30 年前的阿提雅訪談。當時指標定理在物理的應用才剛起步，因此訪談的重點有一些根本的不同，值得比較閱讀。

► 2004 年，阿提雅和辛格獲得阿貝爾獎，底下是當時官方公佈之說明文件，包括兩人的自傳、作品列表，以及希沁介紹阿提雅 / 辛格指標定理的文章。

<http://www.abelprisen.no/binfil/download.php?tid=56995>

► Raussen, Martin & Skau, Christian "Interview with Michael Atiyah and Isadore Singer" *EMS Newsletter* Sep. 2004。這是 2004 年，阿提雅和辛格獲得阿貝爾獎，*EMS* 對他們兩人所做的訪談。