做數學最美妙的是大量的合作與分享

2000 年沃爾夫獎得主博特訪談

訪談者：**傑克森 Allyn Jackson**　譯者：**周樹靜**

受訪者簡介：博特（Raoul Bott，1923–2005）是匈裔美國數學家，從工程轉入數學，1959 年於哈佛大學任職至退休。博特是 20 世紀重要的幾何與拓樸學家，他最知名的貢獻博特週期性定理是 K 理論的核心骨幹。他是 2000 年沃爾夫獎的得主。

訪談者簡介：傑克森 2017 年底剛卸任美國數學學會會訊 *Notices* 的副主編與總主筆。

問｜首先，請談談自己的早期背景。你所受的教育並非典型的數學訓練，年輕時數學表現並不那麼傑出。

答｜你這樣說還是太委婉了！

問｜不過回顧起來，你覺得那段時間有什麼經驗和後來踏上數學之路有關？

答｜我總認為自己對電學的興趣，正是試圖了解事物的一種表現，雖然那不是數學。我 12 到 14 歲時和一位朋友很喜歡研究電器，那是不折不扣的合作。我們有間實驗室，可以製作像麥克風這類簡單的東西。我們喜歡弄出火花，也希望理解那些小機械運作的原理。我想這一點和數學家最接近，我們都想窮知事物的根源。

問｜這顯然比你研究的數學要實用多了。

答｜當然，非常實用。雖然我的手不算靈巧，但我很喜歡動手做東西。我常說但願我能活在馬可尼（Guglielmo Marconi）的年代 ❶，我會很喜歡在一間小實驗室裡發明各種東西，發現電磁作用的基礎性質。那樣的日子應該會很美妙。

問｜但是在數學裡，你的研究屬於相當純數學的領域，並不是應用數學。

網絡理論：博特 / 杜芬定理

答｜不完全是這樣。在我拿到工程學位之後，曾經做過一段應用數學。我和我的論文導師杜芬（Richard Duffin）曾經解決一個相當知名的問題，那項結果現在稱為博特 / 杜芬定理 [1]，這是一個具有實用性的結果，貝爾實驗室（Bell Labs）曾經應用過一段時間。

問｜這項定理可以幫他們做什麼？

答｜這個定理和建造濾波器有關。那個年代還沒有電晶體，想要打造電路，只有電阻器、電容器、線圈這些標準元件。如果將這些元件任意連接起來，放進所謂的「黑箱」裡，只露出兩條端線，那麼這個網絡穩態的頻率響應（frequency response） 會由一個頻率的有理函數所決定，稱為這個黑箱的阻抗（impedance）。由於箱內沒有電源，因此這個阻抗函數具有一個關鍵數學性質：把複數平面的右半面映回自己。這就得到一個數學問題：如果給定某個這樣的有理函數，是否能夠造出相應的黑箱？這是很自然的問題，因為我們希望用濾波器阻擋某些頻率，通過其他頻率，因此它的頻率響應十分重要。

我就讀加拿大麥基爾大學（McGill University）時就對這個問題很著迷，我把它帶到卡內基技術學院（Carnegie Tech）❷。當我第一次和杜芬面談時，就跟他說起這個問題，燃起他的興趣。其實南非工程師布魯尼（Otto Brune）在多年之前就幾乎已經解決這個問題。他從前述的有理函數開始，以一種遞迴步驟來構造黑箱。可惜的是，他在過程中的某個步驟裡，必須引入所謂「理想變換器」（ideal transformer）的想法。布魯尼的整個構造過程都相當可行，就只差這一步，因為實際進行時，黑箱為了容納這些理想轉換器，可能要蓋得跟房子一樣大！所以我的夢想是以更複雜的網絡為代價，拋棄這些理想轉

博特在麥基爾大學，1942 年。（*Notices*）

換器。這就是我和杜芬處理這個問題的方式。這項研究不是我的博士論文，但是比我的論文有趣得多，而且毫無疑問的，開啟了我的職業生涯。看到這項結果，工程師非常驚訝，因為他們耗費 20 年在撰寫錯誤的論文。數學家魏爾（Hermann Weyl）來訪時聽說了這篇論文，我確信就是因為這個定理，他在 1949 年把我帶到普林斯頓高等研究院。

問｜你們留意過那些工程師寫的論文嗎？

答｜沒有。杜芬和我都不喜歡在文獻中搜尋，即使到現在還是一樣。我們認為應該摒棄理想轉換器的概念，我們知道這些論文都沒有這麼做。在數學裡有非常多文章討論上半平面映到本身的函數，也就是所謂的動差問題（moment problem），不過那些文章其實幫不上忙。後來我們學到李查斯（P. I. Richards）在抽象複變論中的一個定理後，最後的證明就變得非常簡單。我最近請我的朋友兼同事麥克穆蘭（Curtis McMullen）給一個李查斯定理的證明，結果他提出一個從史瓦茲引理（Schwarz lemma）出發的純代數證明，非常天才的應用了這個引理。原來的證明似乎更複雜。

我之所以喜歡這項與杜芬的研究，部分也是因為工作過程帶給我美妙的合作經驗。當時，我們整個下午一直在討論這個問題與李查斯公式，卻看不出什麼進展，只好各自打道回府。半路上，我意識到我們的想法當然會成立，所以急忙衝回家，馬上打電話給杜芬，沒想到他的電話卻在忙線中。原來他也正要告訴我一樣的發現。

數學武士

問｜杜芬的數學研究領域是什麼？

答｜杜芬是一個多才多藝的人。他最初是物理學家，我喜歡取笑他做應用數學的方式是反過來的，因為他用的是物理學家的直覺，試著把它轉化為數學。

問｜為什麼說是「反過來的」？

答｜理想上，物理學家希望以數學來預測大自然的行為。一旦以數學預測出想像不到的現象才會更令人興奮，所以我才說他是反過來了。不過杜芬在這方面絕對是大師，而且當然就像我說的，他的研究跨越許多領域。舉例來說，在物理學裡，針對旋量（spinor）的研究有所謂的杜芬基底；他在複變論中也有大量研究。杜芬就像藝術家，經常寫出美妙的短篇論文，完全不是狹窄的專家，這個特點打一開始就讓我印象深刻。

問｜你在一篇《美國數學學會會刊》（*Notices*）的文章中曾說，你試著模仿他成為一個「數學武士」（mathematical samurai）。

答｜是的，那正是重點。你追求的是問題，而不是領域。你必須信任自己的直覺，希望偶而會擊中

❶ 譯註：馬可尼是無線電的發明人，1909 年諾貝爾物理獎得主。

❷ 譯註：全名是 Carnegie Institute of Technology。1967 年合併成為今天的卡內基梅隆大學（Carnegie-Mellon University）。

某個你能有所貢獻的主題。

問｜**你在卡內基技術學院就學時，是否曾和納許（John Nash）接觸過？**

答｜確實有的。納許和我同班，這一班還有溫伯格爾（Hans Weinberger），他是很好的應用數學家，現在明尼蘇達大學任教 [3]，另外，班上可能還有兩三個人。杜芬當時教我們希爾伯特空間（Hilbert space），那是一門很有趣的課。杜芬的教書原則之一就是從不備課！讓我們可以見到他「掛黑板」的模樣，這門課的部分樂趣就是看看我們能否解決他的疑問。我們的課本是馮諾曼（John von Neumann）談量子力學的著作 [4]，書中同時發展希爾伯特空間的概念。很快的事情就很明顯，納許在理解精妙的無窮維現象時，遙遙領先我們。

問｜**他當時是大學生嗎？**

答｜對，只有他是大學生，其他人都是研究生。我和納許算是朋友，他其實並沒有親近的朋友，不過我們常在一起閒扯。後來他生病而且病況很嚴重時，偶而還會寄張明信片給我，上面寫著非常奇特的聯想，常常帶有宗教的暗示。我和納許聯繫最密切的時候就是在卡內基技術學院。我到高等研究院時，他正好也到普林斯頓大學當研究生，但我們只是偶而見個面。後來，他在麻省理工學院開始研究幾何時，很不湊巧我人在密西根大學教書，還沒到哈佛來。我其實很想參與當時安布洛斯（Warren Ambrose）和辛格（Isadore Singer）在麻省理工學院發展的幾何研究。但是，納許並不喜歡這個發展方向，最後他去見安布洛斯，請他給一個「真正的問題」。當然，這就是他卓越的嵌入定理（embedding theorem）。納許的可怕疾病埋沒了他優異的天分。

普林斯頓高等研究院

問｜**在卡內基技術學院之後，1949 年你去了高等研究院。一直到那個時候，你的研究都還和工程有關，在高等研究院這段期間，你的數學觀點是如何改變的？**

答｜我當時感覺就像小孩子進了糖果店。首先，環繞我身邊的人都十分傑出！研究院就像座華哈拉神殿（Valhalla）[5]，周遭都是半神祇的人物。也許這會令人驚訝，我們數學家有種內稟的負回饋態度，如果搞不懂某個東西，就會更想去研究個透徹。我到處去聽演講，大部分內容都殊不可解，而我的本能反應就是「我想弄懂這個」。表面上，我到研究院的任務是撰寫一本討論網絡理論的書，不過一旦我知道這並非義務，我就放任自己參加數不清的演講，呼吸整個研究的氛圍。我在研究院的第一年，一篇論文也沒寫出來。於是當莫爾斯（Marston Morse）在年終打電話給我，問我：「你想不想再留一年？」時，我真的欣喜若狂，馬上回答：「想，當然！」他說：「你的薪水夠用嗎？」當時的薪水是每個月 300 美金。我說：「當然夠！」因為我實在太高興可以再待一年了。我妻子對此略有微詞！不過我們還是捱過來了。

問｜**所以這對你說是很大的改變，從一個從事工程**

莫爾斯攝於 1965 年。（Konrad Jacobs 攝，MFO）

研究的環境，轉換到一個充滿數學的地方。

答｜我倒不是這樣想。

問｜你感受到不是這樣的對比？

答｜不是。因為實際的工作是相同的。我和杜芬一起工作，也是在思考數學，只是探討的概念不同，對我而言，實際發掘新知的過程基本是相同的。網絡理論的代數面向，對於微分幾何和狄拉姆理論（de Rham theory）都是很理想的引介題材，這也包括魏爾當時研究的調和理論（harmonic theory）在內。事實上，網絡是調和論的離散版本。所以當我到研究院之後，主要參加的就是魏爾的討論班，那時小平邦彥（Kunihiko Kodaira）和狄拉姆（Georges de Rham）正在魏爾討論班講演調和形式（harmonic form）。魏爾希望能夠——而且終於在 1949 年——找到一個他滿意的赫吉定理證明。赫吉定理是在 1930 年代證明的，只是方法有點鬆散。最後，這兩位很不同的人物，從不同的數學觀點把這些細節在這個討論班給釐清了。所以我並不覺得特別，這和我的思考模式是相合的。後來這導引我進入拓樸領域，我從史汀洛（Norman Steenrod）上課所學到的經驗，主導了我後來的發展。

數學的主流

問｜在你的論文全集中，鮑恩（Paul Baum）回憶了一些和你工作的往事。其中他提到跟你學到或重新學到的，是數學的發展有其主流。有些數學家如你，總是可以本能的理解數學主流何在。我們要如何知道主流是什麼？這是天分？學習的？還是從環境裡挑選出來的？

答｜說得好！我必須說我總是跟隨著我自己的品味。有時候我的品味會引導我踏入還不流行的方向，但後來很幸運的演變成時尚！但這種事是危險的，流行會改變，回顧起來，你很難說自己是否曾經主流過。我只是深受早期層論（sheaf theory）發展的影響，尤其是當時接踵而來，結合分析與拓樸的思潮。轉眼之間，複變論突然和拓樸融合無間，甚至容納某些數論的面向。所以我認為在當時，很容易就可以察覺這項發展是數學的大道。

不過，在我有生之年已經見識過數學主流的劇烈變遷。舉例來說，如果考慮層論流行之前的普林斯頓，強調的重點就非常不同。當我第一次到那裡時，早期拓樸學探討的是怪異空間的抽象問題、比較 15 種不同的上同調理論（cohomology theory）等等之類。這就是我最初所說的主流，然後拓樸走向我感覺比較實際的世界：研究緊緻流形與其不變量。當時低維拓樸還不受人重視，但是到了 1990 年代它就再次成為研究的焦點。所以這麼多年來，數學研究的重點的確有很大的差異。

❸ 譯註：溫伯格爾 2017 年剛過世

❹ 譯註：*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*（量子力學的數學基礎）。

❺ 譯註：Valhalla 是北歐神話中天堂神殿，也見於華格納知名歌劇《指環》系列。

問｜但是數學難道沒有一個充滿活力又生機勃勃的核心？它超然於流行之上，而其他領域則相對比較邊陲。因此才需要一種判斷力，可以感受何謂中心，哪些或許不是那麼重要。

答｜我不知道我能信服這種說法到什麼程度。譬如，我認為布巴基學派（Bourbaki）有這種判斷力，但我對布巴基總是有所懷疑。數學這個領域實在太大了，並不只有一條大道，還有太多未知的分支。所以就某種意義來說，雖然我深受布巴基的影響，但我對只有一種角度看事情的信念並不太買帳。一個例子就是現在物理和數學之間正萌生的發展，物理學家以一種完全不同的直覺，獲得當今數學家覺得極為吸引人的結果。我相信差異很大的文化影響數學有其好處。如果你只有一條真正的康莊大道，可能很危險，因為大家只好都在上面奔馳。

問｜當你在普林斯頓高等研究院時，有什麼關於相對論的活動嗎？還是愛因斯坦都是一個人工作？

答｜我到高等研究院時，歐本海默（Robert Oppenheimer）已經接任院長，在物理社群裡權勢很大，他主持一個所有院裡物理學家都要參加的討論班。我們數學家總認為他們像羊群一樣屈從，因為我們可以選擇自己想參加的討論班。我覺得愛因斯坦在研究院相當孤立。是的，就我自己而言，我很驚訝我沒有花精神去和他接觸，因為愛因斯坦一直是我的英雄，我從小就把讀懂相對論當作最重要的事。而且我們還喜歡一樣的音樂，講同一種語言，應該可以很容易就熟稔起來。我們曾經有一兩次問候，但總就是「你好，天氣真好……」之類的。不過我在研究院時對拓樸更感興趣。說起來也很合理，畢竟他的研究對我並沒有多少幫助。

愛因斯坦

問｜這很有趣，你和愛因斯坦有那麼多共通點，可以更深入認識他，但卻沒有這麼做。你想要的是不同的東西？

答｜在我到達之前，愛因斯坦有一個助理叫做凱莫尼（John Kemeny），他後來成為達特茅斯學院（Dartmouth Colledge）的校長。凱莫尼和我一樣是匈牙利人。事實上，魏爾有次還把我錯認成凱莫尼，但是我並不想成為凱莫尼第二，也許我不是很擅長當一個弟子。而且就像我說的，我當時著迷的是拓樸學。

在研究院，我有一個非常好的拓樸幫手叫史佩克（Ernst Specker），他是一個很聰明有趣的人，很多人都知道我們是一幫的。史佩克是霍普夫（Heinz Hopf）的學生，他後來改研究邏輯，從我的觀點覺得很可惜。當時賴德麥斯特（Kurt Reidemeister）為一小班人上課，其中包括我和史佩克。他講的是卡當（Élie Cartan）發展的新理論。賴德麥斯特的演說頗為流暢，混合一半英文、一半德文。這對史佩克和我不是問題，那些課程對我的啟發很大。

離開高等研究院之後，我去密西根大學任教，在那裡結識山梅爾遜（Hans Samelson），他也是霍普夫的學生。山梅爾遜是真正的幾何和李群

賴德麥斯特。（MFO）

由左至右：Pitcher、Johnson、博特、山梅爾遜、納許、Rauch1956年攝於 AMS 西雅圖學術會議。（*Notices*）

1950 年代的博特。（University of Michigan）

（Lie group）大師，在我們一起工作的那幾年，我從他身上學到很多東西。但同樣的，這又是因為有個特殊問題帶我進入李群的理論，而不是因為我想要學習這個領域。

問｜如果是因為問題引領你學習一個領域的數學，那麼引導你去選擇問題的又是什麼？

答｜這很難說。就像音樂，一個人在不同時間會愛上不同的東西，像現在我喜歡巴赫的第四號組曲（partita）。是什麼導致這些衝動真的很難說。

問｜那有反方向的動力嗎？我的意思是，你有不喜歡的數學嗎？

答｜通常我不喜歡數學被呈現的方式。我喜歡老一代的方法，用一個例子去揭開證明的秘密，而不是讓聽眾昏昏欲睡。我說不出有哪種數學我不喜歡，不過整體來說，我喜歡比較具體的問題，我有點工程師傾向，譬如早期拓樸的問題就很具體，我們要找的是一個數。

問｜你是一個幾何型的思考者嗎？你做數學時會把牽涉到的物事大量視覺化嗎？

答｜我的記憶確定是視覺的，不過我也喜歡公式，我喜歡古典數學的神奇面向。我的本能是把東西處理得愈明白愈好。

在我和阿提雅（Michael Atiyah）合作的論文裡，最末稿通常是他寫，阿提雅傾向於把文章寫得抽象一點。不過當我和陳省身合作時，末稿則是我寫的。在我們的合作稿裡，陳省身寫的稿子其實又更加具體。

問｜陳省身比你更像「公式人」嗎？

答｜喔，是啊。我已經夠糟了，他更嚴重。奇怪的是，就某種意義，是陳省身教我們以概念來做研究的，但是在他自己的工作裡，他的第一個證明幾乎總是計算的。

莫爾斯方法與李群

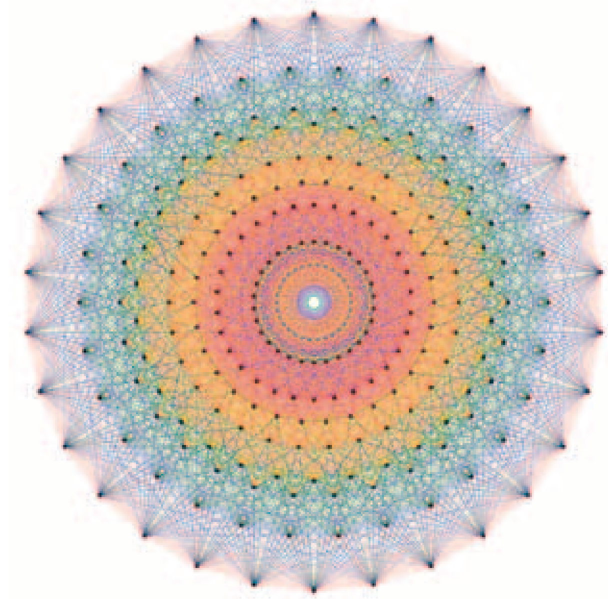
問｜請你談一下最鍾愛的或特別喜歡的研究成果。

答｜我已經告訴你第一項，也就是我和杜芬的工作，這是一項好研究，過程也很有趣。後來非常幸運的，我是第一個注意到用莫爾斯方法可以很容易理解李群迴圈空間（loop space）的人 [2]。大概是這樣的，如果檢視的對象是李群的迴圈空間而非李群本身，那麼李群最大環面（maximal torus）的萬有覆蓋（universal covering）[6] 上的相應圖式（diagram）將扮演重要的角色。比起李群本身，你從李群圖式可以更容易讀出迴圈空間的拓樸性質。這個洞察很令人興奮，我大概1950 年代初在密西根發現這個關係，這仍然是我最喜歡的公式之一。

不過，這段故事中可悲的部分是，如果我像塞爾（Jean-Pierre Serre）那麼有天分又周密，應該當下就能發現週期性定理（periodicity theorem）。

[6] 譯註：這是一個「平的」歐氏空間，其上根系統（root system）與相關圖式是理解李群結構與群表現的重要工具。

陳省身 1977 年攝於柏克萊。（George Bergman 攝，MFO）



248 維李群 E_8 具有 8 維的根系統，其中包含 240 個根向量，構成很大的 Gosset 超多面體，本圖是其 2 維 Petrie 投影。（Jgmoxness 以 VisibLie_E8 程式繪製，維基，本刊重製。）

不過這沒有發生，接下來我和山梅爾遜合作，將這項對李群迴圈空間的洞識，推廣到更大類的對稱空間（symmetric space）[3]。在這段過程中發展的，正是我可以證明週期性定理所需要的所有手法。不過我還需要等好幾年，等到恰當的背景出現後才能夠發展這個想法。這個時機出現在 1955 至 1957 年，當時我又回到高等研究院。

週期性定理

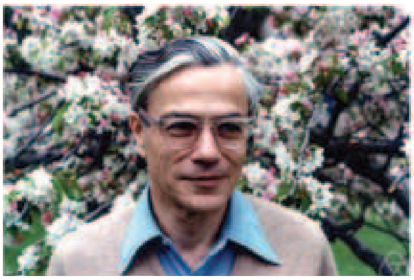
那段時間，數學界有一個關於同倫論（homotopy theory）的爭議，牽涉到酉群（unitary group）的 10 維同倫群。同倫學者認為這個群是 $\mathbb{Z}_3$，但伯瑞爾（Armand Borel）和賀茨布魯赫（Friedrich Hirzebruch）的研究得到這個群是 0。這個矛盾激起我的好奇心，我覺得運用山梅爾遜和我發現的莫爾斯理論技巧，應該對解決這段公案有所助益。最後為了獨立檢查這個謎題，我找到一個非常複雜的方法，其中還涉及異殊李群（exceptional group）G_2。我的好友沙比羅（Arnold Shapiro）和我花了整個週末計算。最後的結果和伯瑞爾／賀茨布魯赫一樣，所以我相信他們是對的。而且如果他們是對的，那麼酉群的同倫群就有一長段看似具有週期性，其中奇數維度一直到九維都是 $\mathbb{Z}$，而偶數維度則是 0。所以我心想「說不定這個週期性會一直維持下去。」我記得我向米爾諾（John Milnor）提起這個可能性。不過米爾諾不喜歡誇誇其談的猜想！他希望能有更具體的證據。很快的，我就明白我過去的想法真的可以解決這個問題。

於是，酉群的部分解決了。我開始改而思考正交群（orthogonal group）的情況，這個問題可就困難多了。我到現在都還清楚記得自己突然意識到如何解決這個問題的瞬間。那個時機發生在我正要搬家離開研究院的時候，你知道做數學就是這樣：當一個人在拆開書籍包裹或做類似的無感事務時，會突然理解某些事情。於是就這樣靈光一閃，我看到所有東西都拼搭在一起了。[4]

問｜就你所言，週期性定理是因為原初計算的錯誤而被隱藏了，沒有人能做出這項猜想。

答｜是的，尤其是研究拓樸學和同倫論的學者，他們的導引來自另一方向，以一般接受的方法來研究這個問題。另一方面，我很幸運的是用莫爾斯理論來研究同倫論，這是一個非常不同的策略。

這真是一座高峰，但那只是一個純粹同倫論的結果。在 1950 年代晚期，我受邀到德國波昂，認識了賀茨布魯赫，學到所有關於黎曼 / 羅赫定理（Riemann-Roch theorem）的美妙結果。這些結果開始強烈的吸引我。事實上，同一年我在高等研究院寫了一篇我很喜歡也很有影響力的論文：〈齊性向量叢〉（Homogeneous vector bundles）[5]，以一個好方法計算某些齊性空間（homogeneous space）的全純（holomorphic）上同調群。這篇論文顯然得益於 1956 年我在高



由左至右。伯瑞爾、賀茨布魯赫、辛格。（George Bergman 攝，MFO）

等研究院的學習，包括伯瑞爾、賀茨布魯赫、塞爾、辛格的教導。這篇論文是由黎曼 / 羅赫定理得出的某個猜想，而我在實際的上同調層次證明出來了。

問｜**黎曼 / 羅赫定理只給出依維度的交錯取和，而你在這個情況把每個維度都各別算出來了。**

答｜是的。我將所有的上同調群連結到某個李代數（Lie algebra）的上同調群。這個想法後來被科斯頓（Bertram Kostant）非常澈底的發展了。因此這個理論有好幾種版本。

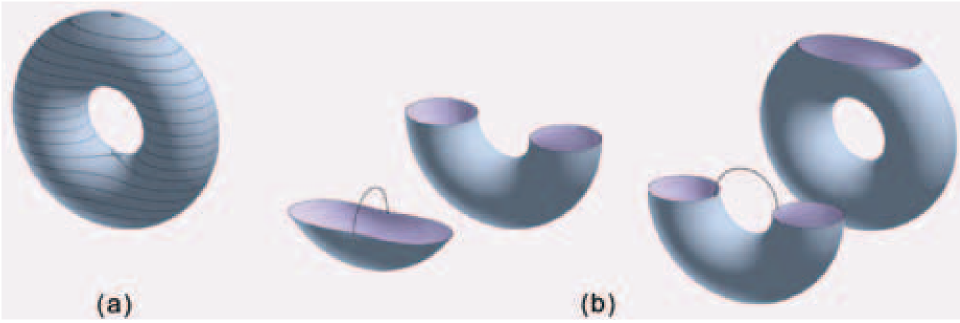
問｜**這就是所謂的博特 / 伯瑞爾 / 魏爾定理**（Bott-Borel-Weil theorem）。

K 理論與指標定理

答｜是的。再下一步的發展就是格羅騰迪克（Alexandre Grothendieck）登場了，他的研究大大的影響了我們所有人。有一天我收到阿提雅和賀茨布魯赫的一篇論文，談的是一種廣義上同調理論，現在稱為拓樸 K 理論（topological K-theory）。這篇文章宛如天啟，我從來沒有想過有這種作法，這個理論不但和週期性定理相合無間，而且全新的詮釋了我的計算。這開啟了我和阿提雅長久且美妙的合作生涯。我們首先在 K 理論的架構之下，重新證明了週期性定理 [6]。而且多少年來，阿提雅和不同的人找到愈來愈多不同的新證法，和原先的莫爾斯理論方法迥然有別。K 理論從此蓬勃發展，能參與這波發展實在頗為愉快。許多知名而困難的老問題被 K 理論輕鬆解決。在大部分的上同調理論裡，自然的運算不但罕見而且難以計算，但在 K 理論裡，由於處理的是向量叢，其外冪（exterior power）運算非常自然，而且在新架構下，計算也變得十分可行。

1960 年代早期，阿提雅和我到史丹福大學，有一次我們去參加一場雞尾酒會，當時霍爾曼德（Lars Hörmander）也在場。那是我第一次聽到指標（index）這個詞一般用在分析學的意思，也就是作為一個算子（operator）的指標。我記得阿提雅非常非常感興趣，他放下酒杯，只和霍爾曼德不斷的談論指標的概念。（不過我繼續喝，事實上那晚我差點被警察逮捕！結果我運氣好，竟然迷迷糊糊的脫身了。）

突然之間，黎曼 / 羅赫定理有了全新的轉折。賀茨布魯赫原先的想法是運用共邊理論（cobordism theory）和美麗的代數幾何，其中赫吉（William Hodge）的指標定理連結了拓樸和分析。這個想法非常美妙。接著，格羅騰迪克從純粹的代數脈絡，運用他的 K 理論以形式的代數方法給出截然不同的證明。然後從指標的觀點，突然這個問題似乎又有了另一個解釋的理路。在此之前，我們用的是複分析或代數幾何，因此微分算子隱而不顯。但是在這個情況，方程之中出現了帶著拓樸扭連（twisting）的微分算子。當然，阿提雅和辛格很快就發現透過算子所謂的符徵（symbol），這個扭連可以被古典群的同倫群所度量。最終，整個指標理論的發展將週期性定理納入主題，整合成一個整體。阿提雅非常正確的找辛格合作來推動這項計畫，而我的研



（a）環面上的等高線圖。（b）由下往上，觀察等高線的拓樸變化，發現每穿過一個臨界點，等高線的拓樸型態就發生變化：從無到有；從一圈變兩圈；兩圈變一圈；或從有到無。其拓樸變化以中間兩個臨界點為例，可用加上一條細線（一維 cell）來說明。數學家因此可利用莫爾斯方法研究流形的結構。（維基。本刊重製）

究則放在另一個方向，我希望檢視的是微分方程的局部基本解（fundamental solution），希望以此為工具證明指標定理，用一般的說法，這就是以「伽克風格」（Čech manner）將局部答案拼合得到整體解。

K 理論與固定點定理

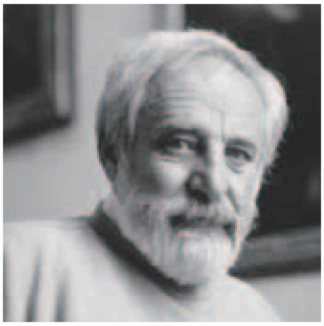
1964 年，阿提雅和我在麻州伍茲賀爾（Woods Hole）的代數幾何會議見面。當時我們已經知道如何定義橢圓複體（elliptic complex），因此能夠以嶄新的眼光看待舊的狄拉姆理論：也就是能將偏微分方程橢圓特性的古典概念，自然的推廣到向量叢的情況。在這個會議裡，阿提雅和我發現了我們的固定點定理──在這個新脈絡下的列夫謝茲固定點定理（Lefschetz fixed point theorem）[7][8]。這是一個很可喜的洞識。起初，

博特和阿提雅攝於 1970 年代早期。（博特家人提供）

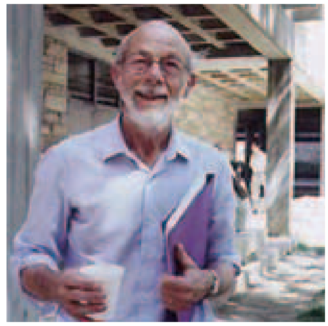
數論學家告訴我們，一定有什麼地方弄錯了，但結果證明我們是對的，我們很享受這一刻。

在某種意義上，我總認為列夫謝茲定理是理解指標定理很自然的第一步。在指標定理中，你計算的是全同映射（identity map）的列夫謝茲數。全同映射的固定點集合非常大 [7]。所以一旦你知道列夫謝茲數和固定點有關，那麼當然一開始先處理較低維的固定點集會比較簡單。阿提雅和我在伍茲賀爾證明的固定點定理正是處理零維固定點集的情況。這些年來，我一直鼓勵大家去研究更高維的固定點集，以這樣的角度去得到最終的答案。我們所處理的列夫謝茲定理，用到的分析比起真正指標定理使用的要簡單很多，儘管如此，這個特例仍然和很多東西十分能配合，我們甚至用這個定理來證明有限群在球面作用的若干定理等等。

下一個我很鍾愛的研究出現在 1977 年，當時我剛從印度回來，到牛津大學去拜訪阿提雅。在這次訪問裡，我察覺到數學和物理之間出現一項令人興奮的嶄新關係。在這樣的氛圍之中，我們開始用規範場論（gauge theory）的角度來思考黎曼面上的穩定叢（stable bundle）。我們有兩個想法：首先，必須使用某種莫爾斯理論的同變（equivariant）版本對付這個問題，其次，接著得用某種減法過程取得最終答案。這項研究的明顯特點是，同變莫爾斯理論裡的最小值扮演很特殊的角色，會讓更高的臨界點「自完備」（self-completing）。這篇論文 [9] 連結了幾個不同的領域，一邊聯繫到曼弗德（David Mumford）的穩定論（stability theory），另一邊則與動



博特 1972 年攝於哈佛（Harvard Department of Mathematics）



海夫里格。（Université de Genève）

瑟斯頓 1991 年攝於柏克萊。（George M Bergman 攝，MFO）

量映射（moment map）以及桂勒明（Victor Guillemin）和史騰柏格（Shlomo Sternberg）的研究相關。這篇文章甚至與某些哈德（Günter Harder）和納拉辛罕（Mudumbai Narasimhan）的數論研究有關。

最近，阿提雅和我在 1980 年代的一些研究也獲得許多很好的應用。這項所謂的同變固定點定理，就在最近被俄國與中國學人用於證明所謂鏡猜想（mirror conjecture）的部分個例 ❽。

葉層結構

讓我再吹噓一下另一個我證明的定理！這次關注的問題是流形上的葉層結構（foliation）。所謂葉層結構就是流形切叢（tangent bundle）中滿足可積條件（integrability condition）的子叢。我認為了解這個可積條件的拓樸意涵是很迷人的研究主題，到今天仍然沒變。1960 年代末，我開了一門講述特徵類（characteristic class）的課，一如往常我從無開始，因為我沒有筆記，也不喜歡讀書。不過那一次方向有點不同，因為當時我很受到海夫里格（André Haefliger）想法的影響，然後我很快注意到可積性的一個拓樸結果。如果你的向量叢是流形切叢的子叢，如果想在在該子叢的同構類中把它變形到可積子叢，會出現一個確定的阻礙（obstruction）類，也就是說，該子叢的特徵類必須滿足某項消失條件（vanishing condition，即等於零）。在這項研究 [10] 之後，自然導致研究葉層結構的外特徵類（exotic characteristic class）理論，也就是葛比倫 / 威不變量（Godbillon-Vey invariant）的推廣，這個研究伯恩斯坦（Joseph Bernstein）也同時獨力的完成了。我和海夫里格在這個領域工作很多年 [11]，這也是一段很美好的合作經驗。

問｜你曾經在高等研究院見到海夫里格嗎？

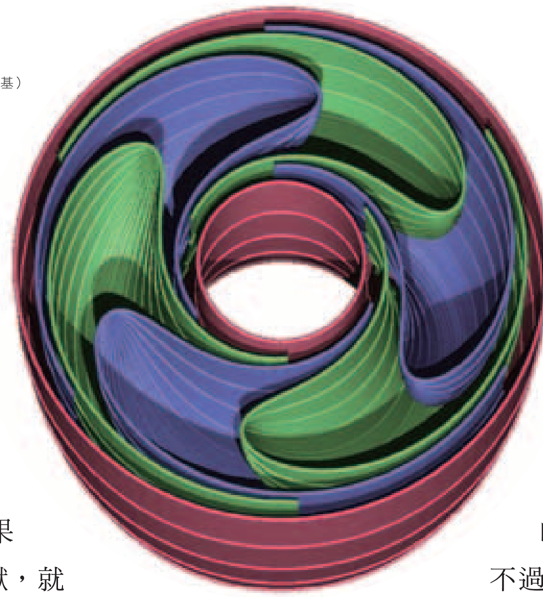
答｜我們確實在普林斯頓見過，但從來不曾一起長期待過。附帶一提，這整個領域和所謂的葛爾方德 / 富克斯上同調群（Gelfand-Fuks cohomology）也有關。西格爾（Graeme Segal）在我些微的協助下，證明這個上同調群其實是一個同倫不變量的函子（functor）。獨立完成這項證明的還有包括海夫里格在內的其他人。在這個領域裡最令人興奮的發現出自瑟斯頓（William Thurston），他證明了病態葉層結構的存在性。我在當時的研究，很受西格爾以及他的單體空間（simplicial space）概念所影響。

問｜在你和杜芬的研究時，存在許多錯誤的工程學論文，但你們起初並沒有意識到。後來，同倫學者在計算上犯錯，但這並沒有阻止你找出正確的答案。就打個比方，你會否覺得如果你先知道那

❼ 譯註：全同映射的固定點就是整個空間。

❽ 譯註：這裡指的是 1990 年代，連文豪、劉克峰、丘成桐、Alexander Givental、Maxim Kontsevich 等證明部分鏡猜想的工作，他們用到了同變上同調群的阿提雅 / 博特局部化公式。

實心環體中的 Reeb 葉層結構（Ilya Voyager 製，維基）



些工程學論文，有可能會讓你完成不了你和杜芬證明的定理？

答｜這還真的頗有可能。如果杜芬或我曾努力去查考文獻，就會找到許多克服不了的問題！雖然我自認是一個蠻懶散的人，但我經常能發現事情的錯誤。所以我是個多疑的人，希望能看到證明的本質，喜歡理解事物的徹底細節。有時我的學生對我很生氣，因為我要求他們論文必須重寫，直到變成像是一本毫無疑點的書籍。要不然，就是我太笨了，才會讀不懂。

問｜你的研究觸及許多領域：拓樸、幾何、李群、偏微分方程、分析等，但沒有數論。你對數論感興趣嗎？

答｜是的！這是秘密。事實上我正在那個方向學習。我對物理學家坎德拉斯（Philip Candelas）的研究很感興趣。舉例來說，他有篇文章叫做〈在有限體上的卡拉比 / 丘流形〉（Calabi-Yau manifolds over finite fields）。讓我在今年夏天極為沈迷，所以或許在我的老年……!

數學家本色

問｜你會嘗試那些千禧大獎難題（Millennium Prize Problems）嗎？可以贏得一百萬獎金。

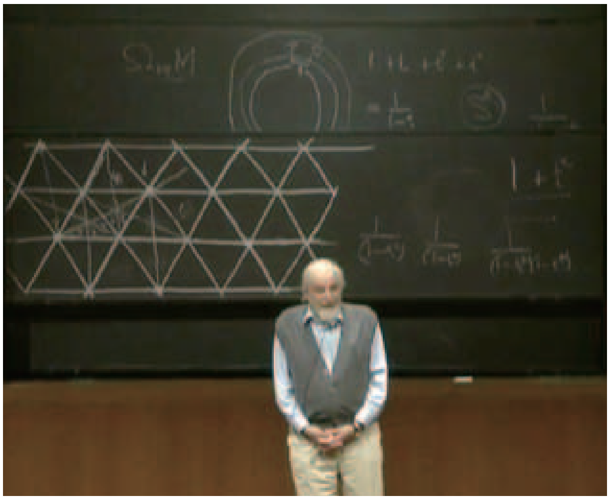
答｜不會，我寧願研究自己夢想解決的問題。

問｜你對提供巨額獎金的看法如何？你覺得這對數學界是好事嗎？

答｜我們在一定程度上可能是假清高，覺得引入大量的金錢貶低了這個遊戲的價值。不過換個角度想，這也可能為數學界引入一些天賦優異的人。舉例來說，在蘇聯成功發射人造衛星的時代，大家對俄國人的關注，讓美國的理論科學更為活躍。當時有一群非常聰明的人進入數學界。如果是今天，他們可能會去研究生物學。所以我的確認為增加數學的能見度是件好事，只是我希望不要用那麼功利的方式。不過，美國是一個講求實際的國家，得看看效果如何才能分曉。

問｜讓我們回到物理學。比起物理學家，數學家好像更加個人主義一點，不像在物理學界會有「帶領風潮者」（tastemakers），數學界似乎不像那樣，而是更加多元化。

答｜感謝上天，在各式各樣的數學領域裡都有非常好的學者，所以我們才能有更多的分支可以發展。當然物理學在某種程度也是一樣。研究固態物理的人並不關心新潮的東西，他們受到物理學其他面向的吸引。不過比起數學，物理學還是受到更大的限制，畢竟物理學家必須密切注意實驗結果，但是數學並沒有這樣的約束。有人對於數學家愛怎麼走就可以走多遠的狀態覺得不安，他們認為我們未免也太自由了！我自己必須承認有時候聽到某些演講，我的基本反應也是「老天，他們為什麼要做這種東西？！」但是在數學裡，



Bott, Raoul "What Morse missed by not talking to Weyl"。博特病逝於 2005 年底，這是他該年 3 月在普林斯頓高等研究院慶祝 75 週年的演講截圖。（YouTube）

的確有一些很美麗的領域在發展當下絲毫無人賞識，但是我覺得他們有一天會卷土重來。

問｜你指的是什麼？

答｜這很難說，不過新發展經常會帶動老問題重見天日。不過也有人比較悲觀。像我的朋友山梅爾遜就經常說：「數學最終會沒有東西可做。我們用的都是相同的想法、相同的基本東西，時間久了，汽油終究會燒光。」以李群來說，可以追根溯源到很早之前，然後在 20 世紀被大量開採。不過我認為總是會有不同的看法讓我們持續向前進。

說實在的，數學還有非常多的謎題未解，解決這些問題，會帶領我們前往非常出乎意料的嶄新方向。昨天有一個電視節目報導黃石公園的間歇泉（geyser），那裡有幾千座這樣的溫泉會噴發蒸氣和水。但是生物學家發現在這些沸水裡有東西生存！他們在間歇泉中發現的生物，生活在很深而漆黑的洞裡，不但沒有光線，而且周遭溫度以及存身的化學溶液，都是過去認為和生命絕緣的環境！所以我相信宇宙有非常多的謎題，足以讓我們研究上很久的時間。

我很高興投入數學界，也很意外結果會這麼愜意。我們這個領域最美妙的事是有大量的合作，我們很樂意分享彼此的長處，而且大體來說，不像大部分其他領域有那麼多爭執。這真的非常罕見。我想你不會在文學界、生物學界、歷史學界看到這樣的氣氛。他們不會把一半的時間花在聽別人的講演上。我們容許從彼此身上學東西，而且雖然我們會註明所受到的協助，但比起能簡單註明的，通常我們學習到的遠多於此。我們有時透過不經意的評論，傳達出長年思考的洞識，這樣的意見或許能啟發一整個領域，或者融入某人的大腦，恰恰揭開了某些新鮮的想法。我們真的對彼此非常的慷慨。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉
http://yaucenter.nctu.edu.tw/periodical.php

本文出處

本文是 2000 年 10 月傑克森兩度訪談博特的編輯稿，以 "Interview with Raoul Bott" 之名發表於 *AMS Notices* Apr. 2001。本刊感謝訪談者與 AMS 同意翻譯和刊載。

譯者簡介

周樹靜是臺灣數學科普譯者。

延伸閱讀

▶ Tu, Loring W.（杜武亮）edit. "Rememberig Raoul Bott （1923-2005）" *Notices of the AMS* 60 （2013）No.4。

▶ Loring W. Tu "On the Genesis of the Woods Hole Fixed Point Theorem" *Notices of the AMS* 62 （2015）No.10。

▶ Bott, Raoul "What Morse missed by not talking to Weyl"。博特病逝於 2005 年 12 月。該年 3 月，他在普林斯頓高等研究院 75 週年的慶祝活動中，給了這個演講。Morse 和 Weyl 都是他在訪談中談到的研究院前輩。

活動網頁：http://www.math.ias.edu/75

從網頁中可看到，同一天的講者還有阿提雅和賀茨布魯赫。