

早期臺灣偏微分方程的一些研究活動

1980年到1992年

作者：林松山

作者簡介 林松山現為國立交通大學應用數學系終身榮譽國家講座教授。研究興趣為微分方程與動態系統。

第 25屆微分方程研討會於2017年1月7日及8日在新竹交大舉行，系主任林文偉教授邀我做個十分鐘的開幕歡迎致辭。我就以「臺灣偏微分方程的一些研究活動（1980~1992）」為題，分享我親身經歷的五個活動，當時因為有外國學者在場，所以PPT及祝辭皆使用英文。講完後，一些年輕朋友覺得蠻有趣的，要我多說一些。因此，就把一些記憶尚鮮明的事再回憶一下，寫成此文。文章以活動為主，少提專業，並穿插朋友間的一些故事。我要談的是以下五個活動：

1. 劉太平在中研院主持的雙曲型偏微分方程
2. 中美偏微分方程研討會
3. 倪維明在清華的橢圓型偏微分方程課程
4. 京都大學RIMS的偏微分方程研討會
5. 丘成桐在清華

劉太平與雙曲型偏微分方程

我早已聽聞太平之名。我在臺大碩士班的指導老師張秋俊教授是桃園大溪人，當時他曾跟我提到他有個大溪同鄉及臺大學弟叫劉太平，做偏微分方程做得很好。

後來，我到英國愛丁堡赫瑞瓦特大學（Heriot-Watt University）念博士（1975~1978），當時剛好有博爾（John Ball）及諾普斯（Robin Knops）所主持的三年非線性彈性（nonlinear elasticity）計畫，經常邀請歐美這領域的學者來訪問或開短期課程。其中講到守恆律（conservation law）時，因為方程的解不是唯一的，要挑出適當且合乎物理的解時，就要求滿足某些熵條件（entropy condition）。有天，來自布朗大學的達弗摩斯（Constantine Dafermos）在講到各種熵條

件時：由拉克斯（Peter Lax）的條件開始列出7、8個類似或等價的條件，其中出現劉氏熵條件（Liu's entropy condition）。休息時，我跑去問他劉是誰，他說是馬里蘭的劉，我想大概就是太平吧。

很巧，那年年底我與太太到倫敦玩，住在倫敦大學的研究生宿舍時，碰到來自彰化基督教醫院來倫大進修的林醫生夫婦，他們說剛好也有對來自臺灣在美國工作的數學家朋友來倫敦玩，要介紹給我們認識，在林醫生家一見面，竟然是太平夫婦，大家相談甚歡，那時太平說他會找個時間回臺灣。

1980年的暑假，太平終於回臺灣在南港的中研院數學所訪問，主講守恆律。每周一次我與當時尚在交大服務的鄭國順及許世壁，一早從新竹搭公路局巴士到臺北圓環再轉305公車到南港。一趟路下來要二個鐘頭，中午一起吃便當，下午在聽完演講後，再搭305公車到圓環轉公路局回新竹，當年國順35歲，阿壁與我32歲，青春正茂，能操耐勞。課堂上，太平經常提出一些待解決的問題，讓大家做。若有要緊的問題，就會說：「這裡有個斗大的問題，尚未解決。」

國順在這個暑假解決了一些問題，發了論文。其中有個問題當我正做到三分之一時，他就宣告完全解決了。輸給他，一點都不冤枉。他從小就是讓數學老師害怕的學生，我們老家都在屏東，分住在鄰鄉。他的一個親戚也是我的親戚告訴我國順的小學數學老師經常被他抓包，是個可怕的學生。此外，他還是個圍棋高手，很會心算，他不用紙筆就可以在腦中把一個很長的方程式，左邊算算，右邊算算，移項再整理。有次，我問他，怎麼這麼厲害。他說：「是練出來的，我經常早早就醒來，而枕在我手臂的太太尚未醒，因為怕吵醒太太，不敢抽手或起床，就躺在床

上在腦中算數學。」我相信他太太一定有給他加持，要不然怎麼會贏我們那麼多！

阿壁後來與太平合作完成了一些工作。這暑假我自己用功打下的基礎，對之後在星球穩定性問題的研究及與許正雄、牧野哲（Tetu Makino）合作雙曲型問題時，就勝任愉快了。我們交大三人都各有收穫，太平很開心他這暑假的耕耘，說他會再回來。

再過二年，太平又回來訪問一年。在學期中，太平提議研討會就輪流在南港與交大辦。在這段期間，林紹雄也從柏克萊回來了。他在太平的會裡講氣體動力學。他是丘林（Alexandre Chorin）的學生做燃燒（combustion），快速流動的流體在燃燒，多可怕的場景，多難的數學。他的博士論文在那個艱深的領域是很多年間最好的結果。

林紹雄先到清華任教，鄭國順和我常去聽他的研討會。後來我們跟他說，很想隨時跟他討論，就把他「騙」來交大，但是最後還是穿幫了。交大校長不同意這麼有學問的人只當副教授，因此國順與我就跟他商量，請他同意讓我們替他代填表格升等為教授，但他就是不答應。最後，受不了我們的騷擾就跑到海闊天空的臺大去了。二年前，他以副教授在臺大屆齡退休。他在新竹的那幾年，我跟他學反應擴散（Reaction-Diffusion），KAM理論（KAM Theory）及納許/牟瑟理論（Nash-Moser Theory）。前幾年，我跟朋友碰到帶引力的星球在邊界出現真空會失掉正則性，導致一般迭代法失效時，就想到該讓納許/牟瑟出場了，經過努力，牧野哲、許正雄與我真的獲得平滑性的結果。

林紹雄也是介紹我們夫妻認識的大媒人。他低我一班，他們班都叫他「頭子」，他很會爬山，很有山感，是臺大登山社嚮導組的一員，我大三加入登山社，跟他們去過玉山，秀姑巒山。研二的寒假，我隨他去中橫爬一座山，夜宿環山部落時，天冷，他又吃壞肚子，山爬不成，就臨時起意去武陵農場，傍晚剛進武陵山莊的大廳，就見兩位漂亮的女孩在吃香噴噴，熱騰騰的泡麵，我們又餓又冷，真羨慕。再上前一聊，發現圍著白圍巾的女孩是同學；

臺大外文系三年級法文課的同學（我選修他們的法文），也就是我未來的太座大人。

有天中午，在中研院聽完太平演講，一起吃便當時，太平突然說，他想找一些美國大數學家來臺灣開會，要聽聽我們的意見。我們提出了一些人選，並半開玩笑地說找丘成桐來。除了太平之外，我們都沒看過丘成桐。問太平丘成桐長的怎麼樣？他說丘長的「方面大耳，虎背熊腰」走起路來「龍行虎步，威風凜凜」望之不怒而威，簡直是個從三國演義走出來的人。談到開會地點時，太平說在交大辦，國順當時是所長，阿壁跟我看著他三人一起苦笑，然後國順就說「好啦」。會議名稱就訂做「中美偏微分方程研討會」，而國順是臺灣的召集人。

過了一段時間，太平來信說他獲得美國國會同意資助的計畫，美國代表團有六人，格林姆（James Glimm）、拉賓諾維茲（Paul Rabinowitz）、史楚克（Daniel Stroock）、尼倫伯格（Luis Nirenberg）、他自己，還有一個不可能的人——丘成桐。時間訂在1985年5月。臺灣代表六人就由太平及國順去挑。作為臺灣偏微分方程的一員，除了努力在老本行分歧問題（bifurcation problem）多加油外，知道尼倫伯格要來，就趕緊去找他最近的文章，其中一篇是他與布瑞季斯（Haïm Brezis）合作在有界區域臨界指數（critical exponent）時的著名文章。二、三年很快就會到。

中美偏微分方程研討會

1985年5月，依規劃，在新竹交大舉辦中美偏微分方程研討會，當年新竹沒有好旅館，我們就安排美國代表團住在臺北仁愛路四段新開不久五星級的福華飯店，再包遊覽車天天載他們來新竹開會。

開幕時，在交大郭南宏校長致歡迎詞後，由太平依序介紹美方代表，他說：「這位是格林姆教授，研究領域是雙曲型偏微分方程。」接著「拉賓諾維茲教授，分歧理論。」再接著「史楚克教授，機率論。」輪到介紹尼倫伯格時，太平說：「尼倫伯格

教授，數學」，最後介紹丘成桐時，太平用中文說：「這是丘成桐。」

美國大師們的演講都很精采，臺灣代表既緊張又興奮，但就像過河卒子，只能向前。最後總算順順利利完成會議。會後國順及清華的王懷權教授決定要做橢圓偏微分方程。



丘成桐（右二）、吳培元（右三）、作者（右四）、許世壁（右五）、鄭國順（左二）。（作者提供，攝於1985年中美偏微分方程研討會）

當時恰好是我當應數系的系主任（1982~1985），美國學者有問題就會先來找我。以下就記錄一些還記得的事：

尼倫伯格

開幕當天下午，尼倫伯格與我在聊天時，突然問我：「在開幕式時，太平說我的領域是數學。我不懂中文，但他沒有說丘的領域是甚麼。」我說：「所有人都知道丘，他是英雄。他打破了華人的心理障礙，他們現在知道自己也可以做出好數學了。」聽後他點點頭。

我很好奇這些大數學家怎麼會來這鳥不生蛋的數學荒漠，就問他：「您們為甚麼來這數學荒漠？」他說：「我們喜歡數學發展起來。」

再有一次談到世界的數學發展時，他說：「北京將會成為21世紀的數學中心之一。」那時是1985年，他已經看到未來。

他很體貼。例如，有天中午用過午餐，他說想去散步，因此我陪他與日本的山口昌哉（Masaya Yamaguti）^①走過交清小徑，到清華湖邊走走。山口

昌哉很客氣，經常走在他後面，尼倫伯格一發現就馬上等他，與他並行，並把話題轉到與山口昌哉有關的方面。

拉賓諾維茲

拉賓諾維茲是分歧理論這一行公認的大師。之前，我已申請到國科會出國進修的資助，預定暑假之後到麥迪遜訪問他一年。有天，二個人在聊天時，我想把在大會報告中所提到的問題拿來請教他：「在處理一些參數很大的分歧問題時，我碰到了困難。」他說：「那這是你的問題。」我有些錯愕，交談立即中止。

他的回答有如禪宗大師，一語雙關，我當下立即明白：「自己的問題，就要自己解決。」從此，我拋棄依賴心，不再寄望朋友，學生或合作者去解決自己想解的問題。

丘成桐

初見丘先生，果然如太平所述，龍行虎步，不怒而威。但與他接觸後，發現他相當親切。丘先生一直是媒體記者與學者的焦點。替他安排的幾場記者訪談，主題皆在數學和臺灣數學現況及未來發展。那二天，報紙對他的成就有大篇幅的報導。現在，臺灣學界都知道丘成桐正在臺灣。數學變成新聞談論的一個主題。

丘先生不參加會後的遊覽，他臨走前跟我說：「什麼時候來美國走走，到聖地牙哥來看我。」我回答他，暑假過後全家要到威斯康辛的麥迪遜住一年。他說：「威斯康辛太冷，聖地牙哥溫暖舒適，對家庭較好。」並邀我轉到他那邊去。在經過國科會同意後，我於1986~1987年轉到加州大學聖地牙哥分校。正如丘先生所說的，聖地牙哥很適合居家，我們一家在那很愉快的住了一年。

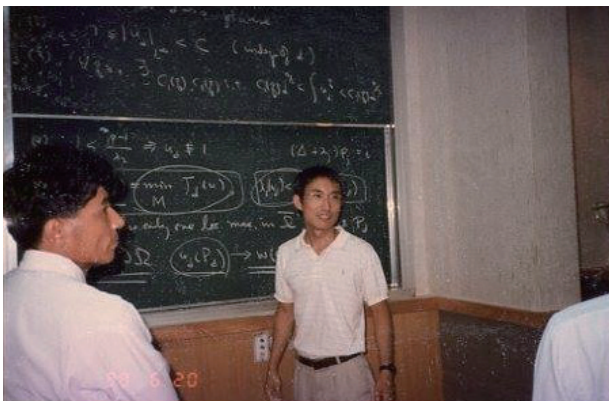
^① 應林紹雄之邀在臺大訪問。

會後，我們安排了一個三天二夜的旅遊行程，由臺北出發，經蘇花公路、太魯閣、天祥、中部橫貫公路、梨山再回臺北。沿途風景秀麗，賓主盡歡。臨別前，尼倫伯格跟我說：「我應該找維明回來看看你們。」

倪維明在清華的橢圓偏微分方程課程

1987年春天，我從聖地牙哥到明尼亞波利斯去看維明，想當面邀請他回臺灣到交大訪問。維明的大哥維斗是物理學家在清華服務，二哥維城與交大的吳培元及郭滄海二位教授在臺大數學系同班（高我一班），維誠曾在交大服務多年，後來再返美工作。維誠做計算數學，也是武術高手。之前在交大就多次聽維城提及他這個尼倫伯格高足的三弟。當然，維明與尼倫伯格的對稱定理早就名聞遐邇。維明在臺大數學系時小我二屆，我大四微分幾何被當，先去當一年的兵，回來重修微分幾何時與他一班，並同年拿到畢業證書，算是同屆畢業的同學。

在維明家時，倪太太也在場。談到回臺灣訪問時，倪太太馬上說：「回清華。」維明才笑著對我說他太太是清華數學系的畢業系友。原先尼倫伯格是要他到交大訪問，但那就這樣吧。在他太太離開客廳時，維明說，他接到清華王懷權的邀請函，但他不認識王懷權，所以尚未回信，問我王懷權這個人怎麼樣，我說，王懷權是個好東道主，可以信任。他點點頭說，那就去清華。知道他預定回臺灣的時



側面向鏡頭是三村昌泰，正面是倪維明。（吳培元提供，攝於1989年6月25日南港中研院）

間是我剛好要回母校赫瑞瓦特訪問，無法參加，因此當面向他致歉。

維明在清華給了一個完整的橢圓偏微分方程課程，在懷權的幫忙下編印成書，名為《半線性橢圓偏微分方程的若干問題》（*Some Aspects of Semilinear Elliptic Equation*），尼倫伯格很滿意這本書，他的學生李岩岩曾寫信跟我索取。我的國外友人來交大訪問時，我都會送他一本（當時沒有版權的觀念）。當然，在臺灣要念橢圓偏微分方程的研究生都要念這本書。今天，在臺灣做橢圓偏微分方程的學者應該都曾經在這本書下過苦功。維明真是造福咱們不淺。

維明認識許多（若非所有）日本重要的橢圓偏微分方程學者，他很積極地安排我們去認識最鄰近臺灣的先進研究社群。他是臺灣與日本橢圓偏微分方程學者密切交流的主要推手。

京都大學RIMS的偏微分方程研討會

透過維明的推薦，鄭國順，王懷權與我三人，應日本鈴木貴（Takashi Suzuki）教授之邀到京都大學的數理解析研究院（RIMS）參加日本國內的非線性方程解研討會（1988年7月12~15日）。當然維明也在場，且是主要的演講者。他很熱心，幫我們一一介紹他熟識的學者，1989年8月30日~9月2日，我應邀再度出席會議。跟日本的一軍更熟悉，如以下的同輩學者：北海道大學的儀我美一（Yoshikazu Giga）和西浦廉政（Yasumasa Nishiura）、東京大學的侯野博（Hiroshi Matano）、廣島大學的三村昌泰（Masayasu Mimura）、早稻田大學的大谷光春（Mitsuharu Otani）、大阪大學的鈴木貴（Takashi Suzuki）、東北大學的高木泉（Izumi Takagi）、以及龍谷大學的四ツ谷晶二（Shoji Yotsutani）。還有較年輕的學者北海道大學的神保秀一（Shuichi Jimbo）及東京工業大學的柳田英二（Eiji Yanagida）。

以後，臺日經常互訪。每隔一、二年我都會去日本找他們一些人。1989年維明在日本就規劃好要辦



許世壁（第一排左二）、大谷光春（第一排左三）、林長壽（第一排右三）、侯野博（第二排介於林與倪之間半蹲者）、倪維明（第一排右四）、高木泉（第一排右五）、三村昌泰（第一排右六）、四ツ谷晶二（第二排介於倪與高木之間蹲者）、作者（第二排左二）、西浦廉政（第三排右一站立者）、柳田英二（第三排右二蓄鬚者）。（作者提供，攝於1994年京都的龍谷大學）

中日研討會，因此在1990年12月3~7日，就由維明，長壽，我及日本的三村昌泰在中研院數學所辦第一屆的中日非線性偏微分方程研討會——以反應擴散觀點為重點。

第二屆日中會議分二次，第一次1994年1月10~14日在京都，同年7月25~29日的第二次在京都近郊的龍谷大學，由四ツ谷晶二主辦。

被日本學者邀請與會並不容易。他們制度與我們不同，我們請國外學者來，可向國科會申請補助他們的生活費（甚至機票）。當年日本學者辦的會，是由他們眾人集資補助我們，可見維明在日本學界的影響力。與日本學者來往，除了學問交流外，還可學到很多東西，以下就介紹互動較多的幾個學者：

山口昌哉（京都大學及龍谷大學）

山口昌哉是日本應用數學界的祖師爺，前述畢業於京都大學的學者幾乎都是他的學生。第一次看到他應林紹雄之邀到臺大數學系講一系列與混沌

有關的函數理論。

之後，又有多次機會與他長談。他告訴我戰後日本偏微分方程的研究有二個主要領導人，他是其中之一。當時他們研究方向走到一個分歧口，另一位領導人選擇發展線性理論，而他選擇走非線性方程並與應用數學（含物理，化學，工程計算等……）結合。為此，他收不同科系畢業的學生來念碩、博士。如三村昌泰及西浦廉政皆來自工科。更重要的，身為領導者，為了儘速擴大到應用數學各個面向的發展，他把自己定位為應用數學各領域的先行者或領路人。他考察國際潮流，就定出幾個日本該發展的領域，並以五年為一期逐漸轉行。譬如，他看好反應擴散的未來，就自己先跳下去做個二、三年，等到弄清楚該領域的重要問題後，再帶二、三個京大的博士生下去做。過二、三年，等這些學生能自己上手後，他再轉去開發另外一個新領域。二十年下來，他開拓了四、五個方向，也培養一群在不同領域的學者。今天日本能在非線性偏微分方程多方發展，是他奠定的。

當一個開拓者，他沒空深入特定領域，也幾乎沒

有在某些特定領域留下大定理或大結果。但是，跟日本朋友提到他時，對方都會敬稱「山口先生」或「先生」，許多學者說他做的事都跟大家不一樣。

他家族是京都西本願寺信徒，龍谷大學是西本願寺成立的大學。他從京都大學退休後找四ツ谷晶二等人去成立名為「數理情報學科」的應用數學系。

1990年國際數學家大會（ICM）在京都舉行。我去參加大會並到龍谷大學的大津校區看他，在吃飯時，他突然問我：「這麼多年來，有一個問題我一直想不通，就是在日本大部分人是佛教徒的國家，怎麼會發動第二次世界大戰。」我很久以前就想過這個問題，就跟他說我的看法：「神道是日本的傳統信仰，已深入人心。當神道高漲到壓制佛教的規範時，侵略戰爭就變成可能。」他想了一下，無奈地說：「或許是這樣吧。」

後來，我們曾邀他在1994年在高雄中山大學舉辦的臺灣數學會年會做過大會報告。接著就到交大講〈混沌與時尚流行〉，如迷你裙的長短變化是個混沌現象。他有個做複動態系統的高足，京大的穴田光広（Mitsuhiro Shishikura），也曾應邀來臺訪問。

山口先生曾向我說過一個很奇特的故事——他年輕時，他們家族的依止和尚告訴他，他在打坐時，曾經看到一些奇異的圖形在做一些怪異的運動。當時他不知道大和尚說的是什麼，直到多年後，在研究混沌動態系統時，他才恍然大悟，大和尚是看到碎形在做混沌運動。幾年前山口先生過世時，日本學界為他辦了非常隆重的追思會。

鈴木貴

在維明推薦我們去參加RIMS的會議時，他跟我說主辦者鈴木貴跟我一樣也在做環上問題。那幾年我在讀過維明與尼倫伯格的球上解對稱定理後，就去做環上對稱破壞問題。想法是由分歧出發，球對稱的解，在環變薄時如何產生非球對稱（即與角度有關）的解。用分歧方法去做時，就要去算原先球對稱解線性化方程式的固有值及固有函數。其中二維

有著名的呂維耳方程（Liouville equation）：

$$\Delta u + \lambda e^u = 0$$

三維以上稱葛爾方德方程，是由葛爾方德（Israel Gelfand）在做燃燒問題時考慮的方程。葛爾方德用相平面（phase plane）方法證明3到9維球對稱解會無窮多次的依某定點繞來繞去，10維以上，卻只有唯一解。鈴木貴當時也考慮該方程。

二維的線性固有值問題，我做了一、二年，突然在某一個晚上「如有神助」般，竟然把它的解明確的寫出來。因此，在二維問題就領先鈴木貴一步發了論文。我以為二維問題做完了就去做三維以上的環上球對稱解。沒想到後來鈴木貴用複變函數理論得到二維呂維耳方程有更漂亮的結果。這下子我丟掉了一大片山。

更不幸地是，我在1993年應他之邀去東京看他時，他臨時有事外出，要他的合作者接待我。我就把三維葛爾方德方程環上球對稱解的初步結果告訴他——挖掉一小洞的環，可以對定點繞進繞出很多次，洞越來越小，圈子會繞越多次，直到環變成球時變成繞無窮多次且不再繞出去。等到第二年春天「日臺研討會」在京都舉行時，鈴木貴的報告一開始就說他們解決了林松山的猜想。內容比我告訴他合作者多不了太多。他講完，我在上前致意時，略帶不悅的問他，他合作者沒告訴他，他們前面的結果是我去年訪問他時告訴他合作者的嗎？他很不好意思地說沒有，他告訴我他的合作者說是他自己做的。一時間我們相對無言。我真是「人財兩失」，不僅掉了一篇文章，更糟糕的又減損了友誼。鈴木貴是個正派的人，我不該急躁的去質疑他的誠信。

許多年後，長壽在研究二維的呂維耳型的冒泡現象（bubbling phenomenon），有更深刻的發現。做學問真是依個人境界去決定你能看到什麼，下面再說吧。

大谷光春

第一次到京都開會大谷光春就帶我去看妙心寺，他

也向我介紹日本的曹洞宗^②。大谷光春在早稻田大學，去東京時，我經常會去看他。他告訴我在大東京地區，東京大學之外的私校做偏微分方程的學者有二，三十人會在每個禮拜六全天開討論會，晚上再找一家酒店喝個痛快。用這個方式，私校教授們互濟互助，一起成長。

日本當時已經「南進」，他自己前後就幫助幾個菲律賓大學講師來唸博士學位。每年都會花幾個禮拜時間自費到菲律賓去帶老學生及找新學生。

他太太是個醫生，很忙，又賺很多錢。他需要做家事，煮飯做菜。這事經常被他的朋友取笑。我問他，他卻怡然自得，笑得很開心。

四ツ谷晶二

此外，我經常會去看的朋友還有龍谷大學的四ツ谷晶二。我們女兒結婚時，他剛好帶太太來中央大學開會，我們請他夫婦來參加婚禮，臺式熱鬧開心的婚禮，讓他們大開眼界，入境隨俗，他們也包了一份大紅包。

儀我美一

目前在東大的儀我美一的年紀比我們朋友都小，但出道很早，1994年1月在日臺京都會議後，我應他之邀赴札幌看他。為此還添購厚雪衣，到時大雪紛飛，積雪及膝，我這輩子沒有這麼涼快過。後來他也多次來臺開會或訪問。

高木泉

維明多年合作者，東北大學的高木泉，是個典型重友情的人。他知道我1990年要到ICM開會，特別南下京都來看我。長壽曾經邀他去訪問中正大學，順道來交大訪問幾天，他帶了太太小孩來，小孩在新竹剛好感冒發燒，很著急。我太太帶他們去看熟的醫生後，就穩定下來了。311海嘯前二年，我與

太太去福島玩，再去看他。大海嘯來時，他有幾天失聯，最後接到四ツ谷晶二的電子郵件說他闔家平安，只是太震驚了，暫時不與外界聯絡。患難見真情，臺灣人對日本大災難時的友誼與真情，他們是感受到了。

丘成桐在清華

1991年，清華的劉兆玄校長禮聘已在哈佛的丘先生到清華訪問一年。

在此先說說1986~1987我在聖地牙哥訪問他時的見聞。1986年上學期，他到奧斯汀去，因此較少見到他。我就去聽孫理查(Richard Schoen)的調和映射(harmonic map)及漢米爾頓(Richard Hamilton)的黎奇流(Ricci flow)。晒得紅紅穿短褲的漢米爾頓常在課堂上提到「若這個可證明，則龐卡赫猜想(Poincaré's Conjecture)就出來了。」或「若這個可以排除，則龐卡赫猜想就出來了。」下課後，他就到拉荷雅(La Jolla)海邊去戲浪。

在聖地牙哥我見到了林長壽，尼倫伯格曾跟他提過到臺灣的事，因此長壽知道有我這個人。他問我正在做什麼問題。我跟他說，在做與尼倫伯格及與布瑞季斯工作有關臨界指數(critical exponent)時 \mathbb{R}^n 的球對稱解問題。他聽了很感興趣，要我仔細講給他，我把這二、三年的成果跟他說，講了二、三次後，我就知道，他了解的比我多了。接著下來二個禮拜我們天天討論，這時，他就在帶著我跑。有一天，他身體看來有點不舒服的跟我說：「我已經很用力的想了兩個禮拜，現在頭都痛了，你要趕快跟上來。」我想我已經很用力啦！他又說：「我常常拼命了一陣子後，就要生病了！」最後，我們得到了一些漂亮的結果。藉這個問題，我看到當他碰到一個深刻問題時，怎麼去想，如何在無路中走出來。

^② 禪宗始於達摩東來，興盛於中國隋唐。有五家七宗。目前僅剩二大宗派：臨濟宗及曹洞宗，皆出自六祖慧能大師門下。唐宋時又東傳日本，並在日本在地化。



丘成桐（第一排右三）、尼倫伯格（第一排右六）、神保秀一（第一排左二）、布瑞季斯（第一排左三）、林長壽（第一排左五）、許世壁（第二排左四）、作者（第二排右二）、孫理查（最後一排左四）。



林長壽（左側站立者）、尼倫伯格（第一排右一）、作者（第一排中）、劉太平（第二排右一）、以及孫理查（第三排右一）。（作者提供，攝於2000年9月7日新竹理論中心「慶祝尼倫伯格75歲大壽國際偏微分方程研討會」）

那三個月的合作經驗，讓我的數學脫胎換骨，終身受用不盡。

除了無法學的天生創意外，我問他，他的估計能力怎麼那麼強？他說他在臺大念碩士時，想學偏微分方程，就自己把吉爾巴格/楚丁格的書^③先讀一遍。仔細去驗證定理證明，過了二、三個月，定理證明的細節都忘了差不多後，就將書合起來把書本定理重新証一遍，看哪裡過不去，再去比較書本的證明方法及技巧。整本書做完後，再等個半年，證明細節淡掉之後，再重做一遍。這樣下來，真正有「眉角」會過不去的地方，就可以清楚地看出來，接著再去看別人怎麼走過去的。這真像金庸小說裡的周伯通在練功。

此外，我發現他經常在做「頭腦體操」，當我講一個論文給他聽時，他常先問：「他們做到了什麼？」我說以後，他想了一下再問：「他們是不是用xxx方法做的？」通常，他猜的與別人做的經常八、九不離十。若有不同再來做仔細比較。再試試看能不能得到更好的結果。好文章可以拿來參考，也可以拿來自我鍛鍊。

跟長壽熟了後，有一天很好奇的問他，他怎麼做出等距嵌入（Isometric Imbedding Theorem）來。他說事出偶然，有天他去找尼倫伯格，在他的研究室看到他正與其博士後在討論等距嵌入問題，他就坐在旁邊等，看著他們的討論，覺得他們的「看法很不自然」。回去後，就想去找一個「自然的看法」

做這個問題，幾個禮拜後就真的做出來，這時連尼倫伯格都嚇一跳。長壽說：「每個數學問題，應該都有個自然的看法。我們做數學就是要找到這個自然看法。」他也常說：「不要亂挑問題做，那是在浪費生命。」

之後，我在想，像我這種天分普普的人怎麼去發現一個「自然的看法」呢？有天唸到寂天^④的「未得熟悉親切之前，不曾見有易與之事。」後有了體會：就把待解的數學問題當作朋友，不再把它當作攻擊對象，慢慢跟它熟悉、親切之後，看看它能否把真面目露給你瞄一眼。因此1987年回臺灣後，就連教二次吉爾巴格/楚丁格，先蹲馬步練功，再去找要緊又困難的問題來做，讓困難的問題帶我成長。但是境界不同，同一件東西，不同的人看到的也不一樣。就以呂維爾方程為例，我、鈴木貴及長壽看到的都不一樣，而且我還是最先去看的人。

丘先生在下學期開學前，從奧斯汀回來。我去上他的課，也經常接近他，但一直無法明白他怎麼做學問的，這不能只怪我。他的學問浩瀚如大海，不可蠡測。話說1970年代他年方20來歲才出道時，就震撼了國際學界。一些西方學者急著知道像他這樣的中國人有多少？最後發現就只有他一個，這才

^③ 編註：Daivd Gilbarg and Neil Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (2001) Springer。

^④ 佛教大師，《入菩薩行論》的作者。

放下心來。因此，我就談一下他與學生的互動吧。

我參加了丘先生與學生的第一次討論班，十來個大陸與臺灣來的學生，翁秉仁與高淑蓉也在場。丘先生列了這學期要唸的文章分配給學生做報告。在討論班時，丘先生都在場，學生也經常講得頭頭是道。對學生，丘先生是超有耐性的。課堂上，從沒有聽過他說過一句重話。他的討論班，我是真的努力去了幾次，還是有聽沒有懂。有次問翁秉仁，你們怎麼這麼厲害，文章都看得懂，說的出來？秉仁說他們會三三、二二的組成討論班一起把論文先唸懂，再上場，否則憑一個人之力那有辦法啊。後來，丘先生跟我說他決定到哈佛長待的一個重要原因是哈佛的學生都夠優秀，又能自己積極主動組討論班一起前進。

在聖地牙哥，丘先生常帶學生們去他家，經常一次就來了十幾個，也夠熱鬧了。大家在他家又吃又喝談得好開心，師母也經常在場。當今有好幾個重量級學者的他的高足，更是把他家當自己家一樣。丘先生家學淵源，看他尊翁的《丘鎮英教授文集》就可看到他尊翁待學生如子女。丘先生也是如此，當他的學生，就是能盡情享受他的關愛與提攜。回臺灣以後，面對自己的學生，當我的「豬肚臉」要翻出來時，經常會浮起丘先生在課堂上的這一幕，自己何德何能可以去生學生的氣？

1991年，丘先生在清華講幾何分析的一些論文。前幾堂聽眾多一些，接下來的主力只剩下做幾何的呂輝雄、張樹城和他們的學生，做方程的只有我和我的學生。課堂上，丘先生經常提問題，甚至指名說：「xxx，這個問題你可想想。」張樹城被眷顧最多次，我也被點到三、四次，是純粹偏微分方程問題，但都做不出來。做不出來，頭垂低一點進教室就是，反正他也不會繼續追究。

中間他花了三、四堂課講長壽的等距嵌入，他手拿長壽的論文，第一堂講完時，突然問我：「林松山，你看長壽的東西，在歷史上會不會留下來？」我點點頭，下個禮拜第二堂課講完後，他再問一遍：「林松山，你看長壽的東西留得下來嗎？」我再用

力的點更多的頭。最後，第三堂課結束時論文也講完了，他下個結論：「長壽的東西，會留下來。」這時大家都鬆了一口氣。這一年在清華呂輝雄及系主任賴恆隆竭盡全力讓丘先生一家人生活得很愉快，看起來丘先生也很滿意。

1992年9月我應尼倫伯格的推薦來到墨西哥的哈拉帕（Xalapa）開會，尼倫伯格知道丘先生在臺灣待了一年，他問我說：「丘演講的聽眾一定很多吧！」我說：「哪有啊！只來了十幾位聽眾。」他面露不可置信的神情說：「在丘的演講中打瞌睡，總比在研究室裡工作好吧！」記得禪宗大師說過：「寧可在大廟睡覺，不要在小廟辦道。」就是這個意思。

後來他又問我：「長壽還好吧？」我說：「他正在一個很困難的問題上遇到瓶頸！」長壽那時正在阿里山下吹泡泡但未完全成形。尼倫伯格接著說「告訴他——作你能做的！」

回臺見到長壽後，我有把話傳到。臨別時向他說：「嗨，路易斯！每次見到你，我總能從你身上學到很多東西。」他笑著說：「你言過其實了！」

僅以此文衷心感謝劉太平，尼倫伯格，倪維明及丘成桐四位先生，接續在這十二年中替我們開門。讓我們在還年輕的時候有機會找到新路，因而重塑未來。

延伸閱讀

- 本刊第1期的〈成為數學界的鍾理和——林長壽院士訪談〉。
- 本刊第8期的〈面對岔路，要毅然走進去——2015年阿貝爾獎得主尼倫伯格訪談〉。

《數理人文》訂購單

(請填妥資料後傳真至 03-5731915 或郵寄至交通大學丘成桐中心)

數理人文自 2017 年起回復為半年刊，固定於每年之 1 月及 7 月各出版一期。

訂閱方案	優惠價
一年 2 期 (印刷品)	450 元
一年 2 期 (掛號)	490 元
二年 4 期 (印刷品)	900 元
二年 4 期 (掛號)	980 元

自_____年_____月號開始訂閱。

(未填寫期數者，將由最新一期寄發)

續訂依原訂閱到期後續寄送。

客服專線：03-5731915

客服信箱：alicefsy@math.nctu.edu.tw

yushan.deng@intlpress.com

■ 基本資料 (請以雜誌收件者之資料為主)

姓 名：_____ 性 別：先生 小姐

電 話：日() _____ 夜() _____ 手 機：_____

E-mail：_____

收件地址：□□□ _____

■ 付款資料

付款總金額：優惠價_____元 × 份數_____ = _____元

郵政劃撥 (劃撥帳號：50286754 戶名：美商波士頓國際出版事業有限公司台灣分公司)

您可以使用本頁所附之劃撥單訂購，並將交易憑證傳真至 03-5731915，或使用郵局之劃撥單訂購，並請在劃撥單上寫明訂閱方案、聯絡方式及 E-mail。

ATM轉帳 (銀行名稱：合作金庫銀行六家分行 代號：006 帳號：3410717207666)

轉帳帳號後五碼：_____ 轉帳日期/時間：_____ 請將交易憑據及本訂購單，傳真至 03-5731915

網路訂購 (<http://yaucenter.nctu.edu.tw/journal/index.php>) 期刊之網站提供電子平台的訂購連結

■ 發票資料

抬頭：_____ 統一編號：_____

98-04-43-04 郵政劃撥儲金存款單									
收 款 帳 號	5	0	2	8	6	7	5	4	金 額
									(阿拉伯 數字)
									億 仟 萬 佰 萬 拾 萬 仟 佰 拾 元

通訊欄 (限與本次存款有關事項)

- 自_____年_____月號訂閱
- 續訂依原到期數接續寄送
- 一年 2 期 (印刷品) 450 元
- 一年 2 期 (掛號) 490 元
- 二年 4 期 (印刷品) 900 元
- 二年 4 期 (掛號) 980 元

訂戶姓名：_____

連絡電話：_____

E-mail：_____

統一編號：_____

發票抬頭：_____

收 款 戶 名	美商波士頓國際出版事業有限公司
寄 款 人	<input type="checkbox"/> 他人存款 <input type="checkbox"/> 本戶存款
姓 名	申請人請於瞭解「郵政儲金匯兌個人資料直接蒐集告知聲明」內容後，填妥本單提交郵局辦理。
地 址 與 電 話	經辦局收款章戳
	主管：_____

虛線內備供機器印錄用請勿填寫

◎寄款人請注意背面說明
◎本收據由電腦印錄請勿填寫
郵政劃撥儲金存款收據

收款帳號戶名

存款金額

電腦記錄

經辦局收款章戳