只有詠唱才能學會詠唱（下）

悼威廉 · 瑟斯頓（1946 ～ 2012）

作者：噶拜（David Gabai）與科寇夫（Steve Kerckhoff）聯合編輯　譯者：翁秉仁
作者簡介：噶拜現為普林斯頓大學教授。科寇夫現為史丹福大學教授。

瑟斯頓於 2012 年 8 月 21 日過世。
（取自克累數學研究所的錄影。感謝 Martin Bridgeman 提供。）

明斯基（Yair Minsky）

作者簡介：明斯基是耶魯大學的教授。

我對比爾最早的記憶，是在普林斯頓的范樓（Fine Hall）休息室，他的手在桌上的高處，手指舞動，比擬 n 孔球面的泰希穆勒空間（Teichmüller space），充滿他的視覺直觀智慧與概念的深度。

我在大學部就開始跟比爾做研究多少出於偶然。當時，我認為自己可藉寫程式為數學做出更多貢獻，別人告訴我：「去找瑟斯頓談談，他正在用電腦畫碎形（fractal）。」結果程式沒有寫成，比爾建議我在只運用布勞爾固定點定理（Brouwer fixed point theorem）的條件下，為他的有限臨界有理映射（critically finite rational map）定理給出簡單的證明。與這個問題奮鬥的過程裡，我開始接觸比爾的數學風格，包括清晰幾何直觀的重要以及拓樸的優美。他沒有給我壓力，也不堅持我去學習眾多的背景知識，只提供一種溫和的引導和鼓勵，讓我獲益甚多。我還記得那時曾因為同學已經掌握許多數學手法而感到畏怯，但比爾給我非常清楚的訊號，想做好數學研究，那些並非必要。

我在電腦科學研究所短暫盤桓之後，又回到數學，以更系統性的方式跟比爾做研究。不知是好是壞，比爾談論與理解數學的獨到風格，全面影響我對這個領域的看法。最啟發人心的是比爾堅持盡量以直觀且直接的方式理解任何題材。他認為對數學構造或證明的明晰心象，遠比形式理論或計算來得更有價值。這套想法對比爾以及他所啟發的很多數學家都運作的很成功，但是也有缺點。在他的課堂裡有種 0-1 法則：如果你能跟上他所探索的圖象與結構，便能獲得美妙的洞識；但是如果跟不上，你就什麼也沒學到，下課後不論是黑板還是你的筆記上，什麼都沒有，只有十來個幾何論證的潦草塗鴉。

我不太記得和比爾討論時的許多細節，但我記得他從宏大的概念風景得出洞見的那份感受，還有作為學生時想從這些直觀獲得一點提示的掙扎歷程。當比爾說話時，眼睛半閉，臉帶微笑，好像一切歷歷眼前。

當然，到最後一切仍是數學，而非神祕的物事。所有洞識終將化為證明和清楚的敘述，有時甚至是罕見的公式。當我不理解某個證明時，比爾絕少再重述證明的細節，反而經常用另一個證明來取代，為相互連結的結構系統打開另一扇窗。

我認為比爾的寫作具有「獨特又正確的完整性」。他的書寫清晰而簡疏，在第一次（或第二次）閱讀時，讀者很難搞懂要如何補全他論證所需的細節。我有多次這樣的體驗：我想了很久，最後才意識到某個地方有一個應該提醒卻遺漏的要點或條件，但是重讀文本時，卻才發現那項要點早就寫在文字裡。

有一次，我在比爾的課上自告奮勇去查索某個敘述的證明，由於結局很尷尬，我已經忘記內容是什麼了。我很盡責的研讀證明，理解計算的過程，然後回到班上報告，開始在黑板上解說這些材料。比爾看著我，臉上露出痛苦的表情，最後終於說：「我說的並不是一道公式⋯⋯」

有一年，比爾和蘇利文（Dennis Sullivan）集結兩人的研究生合開一個討論班，輪流在普林斯頓大學和紐約城市大學研究生中心進行。從討論班、環繞他們以及火車旅途的諸多討論，我們學到許多數學。比爾和蘇利文之間的互動，總讓我感覺那兒有一座廣袤又深沈的宇宙，其中蘊藏他們兩人都熟悉無比的結構。

比爾的影響無遠弗屆，遠遠超出我的研究生階段。他提出的問題和他引介的手法，持續屬於我做數學的核心部分。除非我能夠勾勒某種包裹論證的幾何圖象，否則我仍然不覺得自己真正理解某些課題，對證明沒有信心。比爾非常關心數學溝通以及做數學的過程，我嘗試牢記他的堅持：數學所關心的不只是定理，其實是模式和結構。

納塔尼耳（Nathaniel）和戴倫（Dylan）在廚房做家事。
（感謝 Rachel Findley 提供）

莫舍（Lee Mosher）

作者簡介：莫舍是羅格斯大學（Rutgers University）的數學教授。

我第一次聽到比爾的大名，是在密西根州立大學大四時，當時我的老師密勒（Richie Miller）叫我「到普林斯頓跟瑟斯頓做研究」。我照做了，時間始於 1979 年。

普林斯頓大學數學系新范樓。
（維基，Joseph Barillari 攝。）

MSRI 入口。（維基，Søren Fuglede Jørgensen 攝。）

在那個年代成為比爾的學生是十分令人興奮的經驗，我學到數學原來可以這麼刺激。他的訪客絡繹不絕，後來許多成為我的老師或同僚，其中包括艾普斯坦（David Epstein）、韓德爾（Michael Handel）、奧圖（Ulrich Oertel）、庫柏（Daryl Cooper）等人。比爾的數學思想透過他的論文、講義、課程、討論班、對談，以及其他形式的活動而廣為傳播。我第一手目睹與體驗比爾做數學方式的益處，後來在他的文章〈論證明與數學的進展〉（On proof and progress in mathematics）裡 [1]，比爾在一處概括的文字描述如下：「衡量我們是否成功，端看我們的作為能否讓人理解而且更能清晰並有效的思考數學。」

研究所第一年（以及未來幾年）我開始上比爾的課，課內充滿了數學概念、技術、定理、手法，他所傳授的遠多於數學，而是思考數學的方法。我同時也加入研究生討論班，從年長學生如噶拜或梅爾霍夫（Robert Meyerhoff）那裡學到很多背景知識。第一學期，我和比爾幾乎沒有互動，直到有一天，我從新范樓的迴廊往下閒晃，沒想到比爾迎面而來，他微笑看著我，臉上是期待的表情。當我意識到必須說點什麼時，心中有點慌張，一些自己關於簡單封閉曲線的不成熟想法不禁脫口而出，這些想法的基礎都是我在研究生討論班學到的東西。比爾帶我上樓，給我一本書，裡面有他在這項主題的

[1] *Bull. Amer. Math. Soc.*30 (1994), No.2, p.161–177。

研究，包括他關於曲面準阿諾索夫同胚（pseudo-Anosov homeomorphism）的傑出理論。這篇文章是由法蒂（Albert Fathi）、羅登巴可（François Laudenbach）、伯恩納魯（Valentin Poénaru）帶領的法國討論班撰寫的成果。幾年下來，我常發現瑟斯頓不論是在時間上或數學想法上都一樣慷慨。

我在普林斯頓時，比爾和瑞秋（他當時的妻子）在他們的私人時間上也很親切大方。葛雷森（Matthew Grayson）和我經常和比爾、瑞秋以及他們的小孩納塔尼耳、戴倫以及愛蜜莉（Emily）混在一起。我們在普林斯頓的最後兩年，葛雷森住他們家，我住附近。比爾、瑞秋、葛雷森和我組成一個伙食團，一起購物，在他們家煮食，不很成功的維持廚房還算整齊的假象。

比爾在數學發現早期階段的熱情很有感染力。有一次，我坐在比爾家的起居室，他跟我說：「我可以用 grep ❷ 分析這個群」這句話初聽很難懂，不過作為他的學生，我懂的電腦程度足以揣摩他的本意：他有辦法以有限決定式自動機（finite deterministic automata）的架構，用 UNIX 處理正則表式（regular expression）的基本程式進行那個群的計算。從那個時刻起，我們就能興奮的旁觀整個自動群（automatic group）理論如何迅速的開展。

一般人和比爾對話可能很困難，有時是因為他的敘述怪異讓人腦袋當機，或者因為他似乎沒有注意聆聽。葛雷森跟我說過一段往事，他父親和比爾在 1983 年我們的畢業典禮上見面，他們聊了一陣子之後，葛雷森先生過來跟兒子說他聊不下去了，因為比爾的注意力閃爍不定。馬修跟他父親建議：「比爾經常一心多用，你只要盡量說就行了。」葛雷森先生後來跟他說：「你說的對！還真有用。」

比爾樂於分享他的深刻數學知識。1995 年，他已經擔任柏克萊數學科學研究所（MSRI）所長，那年春天法布（Benson Farb）和我在 MSRI 異想天開的想要證明某一類群的性質：可解包恩斯列格 / 索力塔群（solvable Baumslag-Solitar group）彼此都是準保距（quasi-isometric）。結果我們在構造雙曲平面（hyperbolic plane）上的某種準保距映射時遭遇困難，想在這裡這樣這樣改變它，別的地方就會那樣那樣出錯，諸如此類。讓人開始懷疑這些準保距映射比原先設想的更剛性（rigid）。我們向比爾解釋遇到的困難，他告知我們複分析裡一個久知的現象，和我們的問題似乎相關卻又有點含糊。那是雙曲平面上某類保角映射的剛性性質，這類映射似乎和我們想構造卻一直失敗的準保距映射息息相關。結果後來發現這正是我們所需的想法，於是計畫整個大翻身，變成證明這類群的剛性性質。

在我們的研究生時光，葛雷森和我常訝於比爾思想的神祕，彼此感嘆說：「他真怪。」我們感覺比爾多少也承認這一點，因為當我們研三跟著比爾到科羅拉多大學訪問時，他的藍色廂型車保險桿出現一張貼紙，就在熟悉的科羅拉多牌照山型輪廓線上疊蓋「外星人」（Alien）的字樣。由於當時正流行「本地人」（Native）的汽車保險桿貼紙，理所當然的，我們猜測這是比爾的反沙文主義式反應。

我的讚嘆比爾的想法持續到他的最後幾年。比爾

❷ 編註：grep 是 UNIX 作業系統的命令，源自 g/re/p（globally search a regular expression and print），功能為以正規表示法進行全域尋找以及列印。

的近日論文〈一維的熵〉（Entropy in dimension one）[3] 就有一個美妙的定理，刻畫了自由群外自同構（free group outer automorphism）的熵。其中有個例子還持續困惑著我，那是一個熵為 3 的自由群外自同構，和曲面群外自同構熵為無理數的結果形成尖銳的對比。

這個世界因為有了比爾 ‧ 瑟斯頓而變得更豐饒。

威克斯（Jeff Weeks）

作者簡介：威克斯是一位自由幾何學家。

比爾尊重任何人，不論和他交談的是校長還是警衛，地位從來不是重點。他對人也都一樣親切，不知道這是否源於他的貴格會信仰，但那當然是一致的。

我當研究生時，比爾給了我很多數學上的意見。大部分我都忘了，很多就算是當年我也無法全然掌握。但是有項建議令我印象深刻，終生難忘：「不要隨意選擇，只做你必然要做的事。」換句話說，如果想證明一個定理，卻面臨可隨意選擇的情況，那麼你理解問題的方式可能有誤。你得抗拒為選擇而選擇並繼續做下去的誘惑，反而應該停下來，往後退一步，重新思考整個問題，直到不需做出隨意選擇為止。比爾這個忠告多年以來幫了我無數次忙，我也將它傳達給願意聆聽的學生。這項建議不只適用於證明數學定理，對設計軟體也很有用：如果某個特別演算法需要你做隨意選擇，你最好停下來，往後退，重新尋找更好、更自然的演算法。

比爾的才能當然在於他的「眼光」，既直接表明他能看出前人未見的幾何結構，也可延伸說他可看出理解事物的新方法。許多卓越的數學家能理解複雜的情境，但比爾檢視同一複雜情境時卻能發現其中的簡潔特性。例如他賦予結餘空間（knot complement）[4] 雙曲結構的方法，是直白的剪貼拓樸習題。我第一次看到這個方法，就直接被其簡單所震撼。我和我的研究所同學本該早幾年就能自己發現這個手法，因為所有必須工具我們都有了，方法很簡單，幾乎就是顯然。但是我們看不出來，比爾看出來了。

瑟斯頓和他的學生，攝於 2007 年。（感謝普林斯頓大學提供）

法布（Benson Farb）

作者簡介：法布是芝加哥大學的數學教授。

當瑟斯頓的學生很受鼓舞，也很挫折，而且往往同時發生。在我和比爾的第二次面談時，我告訴他我決定研究帶尖端（cusp）負曲率流形的基本群，結果我就看到知名的「瑟斯頓斜眼」（Thurston

[3] *Princeton Math. Series* 51, Princeton Univ. Press, 2014, pp. 339–384。

[4] 譯註：拿掉結（knot）剩下的三維空間。

squint），他注視你，眼神偏斜，看起來挺狐疑，然後望向遠方（仍然斜著眼）。過了兩分鐘，他轉向我說：「喔，我知道了，那就像一堆泡泡，泡泡之間的互動是有限的。」作為一個勤勞的研究生，我盡責的在筆記上寫下：「一堆泡泡，有限互動。」在我們會面後，我就跑到圖書館開始研究我的問題，看著筆記本，「一堆泡泡？」他真的是這樣說的嗎？這是什麼意思？我完全被卡住了。

經歷痛苦的三年，我解決了這個問題。如果要解釋細節，內容非常多。但是如果要用幾個字總結我的博士論文，我會這麼說：「一堆泡泡，有限互動。」

比爾上課的典型開場是，他會先畫一個虧格 4 的曲面，慢慢擦去一個洞，再把它補回來，然後在線條間徘徊。當他快速思考沒有備課的內容時，通常都會拖上一段時間。那我們為什麼還要去上課，答案是偶爾我們會接收到非常優美的洞察思想，在別的地方絕對聽不到。

底下是一個例子：考慮一套組裝益智玩具（Tinker Toy），由單位長的桿子、螺栓、鉸練所構成。桿子可以用螺栓把一端固定在桌上，也可以用鉸練連結。對任何一套組裝玩具 T，在桌上用螺栓固定其中一點，由此可以得到 T 所有可能配置方式所得到的空間 $C(T)$。如果 T 只有一根桿子，則 $C(T)$ 是一個圓。如果在 T 的尾端，用鉸練連結另一根桿子，則配置空間是環面（torus）。用這個方法，還可以得到哪些光滑緊緻流形？當比爾解釋所有緊緻光滑流形都是某 $C(T)$ 的連通分支，而且更甚者，所有流形之間的光滑映射，都可以實際透過連結這兩組玩具的桿子組來表現時，我到現在都還記得當時聽眾的激動之情。

瑟斯頓完全改變了好幾個數學領域，包括三維流形理論、葉層理論、幾何群論、有理映射理論。他的論文包括一系列令人眼花繚亂卻又深刻、原創、影響深遠的概念。這些早已眾所周知。不過從我的觀點，瑟斯頓的影響仍然被低估，那遠遠超出瑟斯頓數學的廣大內容。正如比爾在他的文章〈論證明與數學的進展〉裡所言：「數學家最想要與必須從我身上習得的是我思考的方式，而不是實質學習我對哈肯流形（Haken manifold）幾何化猜想的證明。」

我們的確學習了比爾的諸多思想方式，至少部分相當接近。比爾改變我們的想法，重新認識「遇見」數學物件以及與之「互動」的意義。「我理解 X」的語句有了全新的意思。數學符號甚至數學圖像並不足以達成真正的理解，尤其是在幾何和拓樸的領域。我們必須努力多少要活在我們研究的對象裡，以三維的存在體驗它們。我想這個改變現在在我身上幾乎看不出來了，因為它已經成為我們許多人做數學的結構特性 ❺ ，這種滲透性的影響可以和格羅騰迪克（Alexander Grothendieck）相並比，他改變了許多人思考數學的方式，即使是他自己從未碰觸過的主題。

許多瑟斯頓的學生領受了上述的觀點改變，並超越拓樸學，將其他幾個數學領域給「瑟斯頓化」，眾所矚目的改變了這些領域。譬如施拉姆（Oded Schramm）的研究就是一個很好的例子。在施拉

❺ 這提醒我一段故事：一隻老魚游過兩隻小魚，他說：「早啊，小朋友，今天水怎麼樣？」兩隻小魚互望一眼，一隻問另一隻說：「水是什麼東西啊？」

姆的職涯早期，他解決了很多關於堆圓（circle packing）主題的重要未解問題。這個理論給出實質理解（以瑟斯頓的意義）黎曼映射定理（Riemann Mapping Theorem）的方式，想成迭代過程的極限。然後，施拉姆運用他的幾何洞察，理解統計力學中許多二維晶格模型的尺度極限。所謂的施拉姆 / 婁納過程（Schramm-Loewner evolution）便是對這些極限「長什麼樣子」的幾何理解。

比爾可能是數學史上最優秀的幾何思想家，因此當我知道他沒有立體視覺、缺乏景深知覺時，真是訝異萬分。難道後者竟然是造成前者的原因？有次我把這個想法告訴比爾，他不同意，宣稱自己所有技能顯然出自小學一年級的決心，每天「練習把東西視覺化」。

我認為很多人對瑟斯頓的研究抱持根本的誤解。尤其是關於他後期工作中的證明完整性有時會被質疑。這類抱怨並不公允。瑟斯頓偶有未妥善徵引的缺失，數學論證有時太簡短，但是在大多數情況，他給出了儘管簡明卻完整的證明。這些懷疑似乎源於無法理解比爾嘗試溝通的方式，或想得知更多細節而引發的挫折感。其實一旦能真正理解他的說法，我們就會意識到那些細節原來一直都在。

我和比爾之間有種不對等的關係，但是他的思考方式形塑了我的數學觀點，就和很多人一樣。在與其他偉大數學家的互動中，可以感受到這些人和我們一樣，只是厲害了 100 倍（好吧，500 倍）。相較之下，瑟斯頓卻是奇特的心智，他是外星人，沒有倍數可以測度。瑟斯頓根本垂直於所有人。他的離世，讓數學少了一個維度。

卡格利（Danny Calegari）

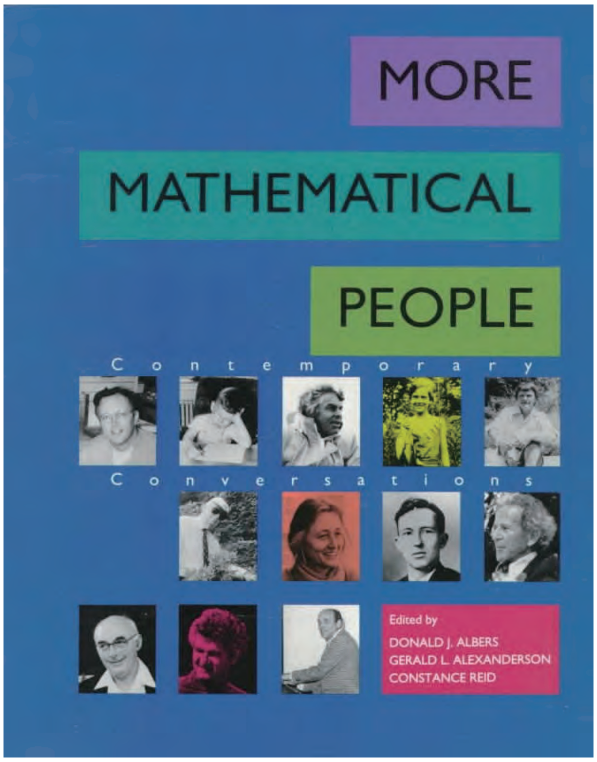
作者簡介：卡格利是芝加哥大學的數學教授。

比爾是我的朋友，也是我的老師。和他在一起的時光，我有很多歷歷在目的快樂回憶。

我記得第一次見到比爾是 1995 年我剛到柏克萊的事。學年一開始，所有新研究生被帶到演講廳與資深人員見面。比爾因為是 MSRI 的所長當然也在場，穿著牛仔褲，膝蓋上有個大破洞。他講述 MSRI 的事務，邀請我們全體上山和所裡的訪問學者見面。他也鼓吹我們用 emissary 的音讀 MSRI，而不是 misery。他沒成功，我們始終稱呼它 misery。

我記得我真的搭了巴士上山（也許是幾個月之後），隱約期待能偶然遇到比爾，希望他能指導我的博士論文（有人已經警告我說比爾「沒有在帶學生」，因為他處理 MSRI 的事務已經太忙了。）我並不覺得自己有很清楚的盤算，知道該怎麼做才能如願。我走進去，就看到比爾和肯紐（Richard Kenyon）正在聊骨牌鋪磚（dimer tiling；domino tiling）的熵與雙曲體積。我頓時屏息不動，默默轉身，離開。

我記得比爾在 MSRI 主持一個很不正式的「葉層理論討論班」，與會的有噶拜、克里斯提（Joe Christy）等人。這個討論班並沒有公告，我基本上是閒晃時，中途走進比爾三小時的講演，他當時正在解釋萬有圓（universal circle）的新概念，以及如何能運用它去解決某類三維流形的幾何化猜想，其中流形必須具有緊閉葉層結構（taut foliation）。當他講完，我就決定要研究葉層結構，而且多少選定



《更多數學人》的封面，瑟斯頓童年在書桌工作照片是在第一排左二。

了我的論文主題。

我記得當比爾要搬到戴維斯時的情景。這是我唯一一次看到他出現在柏克萊數學系的研究室，當時他正在清理房間。我記得貼在比爾門上的小照片，這張他童年在書桌工作的照片曾經出現在《更多數學人》（More Mathematical People）❻ 的封面上。比爾看到我目視他把箱子搬到研究室外面，並且看著他的照片，臉上現出微微尷尬的笑容。

我記得 1998 年初曾寄電子郵件給比爾，解釋我關於葉層理論的幾個暫時想法，靈感來自他的「蛇行結構」（slithering）論文。他邀請我到戴維斯當面討論。接下來一年左右，我一個月就會開車南下好幾趟，在高速公路上和我那輛三手破車奮鬥，強風從沒有封緊的車門直灌進來。我們的討論一談就是幾小時，只有午餐或喝咖啡時才中斷。比爾基本上變成我的「非官方」論文指導教授（官方的指導教授是卡森〔Andrew Casson〕，他那時正要轉職到耶魯）。或許是因為他當時在戴維斯沒有很多「實質」的學生，所以我受到他很大的照顧。我們花了很多時間研究萬有圓的理論，過程中我學到非常多的數學，不只是明顯和葉層理論或甚至三維流形相關的知識，還包括組合學、分析、群論等等。而且，比爾會仔細聆聽我的想法，全神貫注的思考。當時我不知道感激，因為資深數學家能這樣對待研究生是很罕見的事。

我記得有次我們正努力完成某個數學結構的細節，比爾變得很熱切，我們走到校園商店去買了一些非常巨大的紙張還有幾盒色筆，全部搬回比爾的研究室，把紙鋪到地板上。比爾真的為這段插曲十分興奮，他說當年在普林斯頓時，很習慣「整天」都這麼做事。我感覺他已經有很長一段時間沒做過這樣的事了。

我記得有次我們想趕在比爾的女兒出生之前完成某項計畫（結果沒來得及）。我的妻子和我那時正考慮懷孕的事，我害羞的問他這方面的經驗。他突然變得很感性而溫柔，說抱著新生嬰兒，讓它躺在你的臂彎裡，全然信任你是怎樣的感覺。

我記得 2008 年冬季去探望比爾時，我家裡正瘋素食。記得午餐和比爾一起等店員為我們做素墨西哥捲餅時，我們討論著嚴格素食主義以及坎貝爾（Colin Campbell）的書《救命飲食 : 中國健康調查報告》（*The China Study*）。比爾的妻子那週不巧正生病，而且他們還正忙著搬家，所以比爾感覺很心不在焉。我最後離開時，比爾向我道歉因為冗務太多無法分心，但他希望我能很快再回去訪問。當然，我跟他說不用抱歉，這趟訪問很棒（這是真

❻ 譯註：阿爾伯斯（Donald Albers）和亞歷山德森（Gerald Alexanderson）主編系列的數學家訪談圖文集。瑟斯頓出現在 More Mathematical People : Contemporary Conversations (1990) Harcourt Brace Jovanovich, Boston。這本書的主編陣容還另外加入李德（Constance Reid）。

的），我希望等兩人更有空時能很快再回來。但那是我最後一次見到他。

阿戈爾（Ian Agol）

作者簡介：阿戈爾是加州大學柏克萊分校的數學教授，曾獲得 2016 年數學突破獎。

我第一次見到瑟斯頓是在 MSRI 的一次研究生討論班裡，他向我們展示如何用手指計數二進位數，並且在走去野餐的路上用他的方法計數，告訴我們一路上走了多少步。後來在討論班，我向他表示我對運用格圖（grid diagram）解決「非結問題」（unknotting problem）很感興趣，他立即否決了我的想法，帶我到電腦實驗室展示 SnapPea 給我看（他之前的學生威克斯等人寫的）。我大開眼界，因為比起我的內在三維取徑，瑟斯頓的幾何策略顯然在研究環結問題時更有威力（然而有趣的是，最近格圖也成為研究結與結不變量的重要工具）。更何況，SnapPea 讓瑟斯頓能研究更深刻的數學構造（也就是他對哈肯流形的幾何化猜想證明），並產生非常實際的圖像，讓非專家也能欣賞。我後來才知道，瑟斯頓的數學之道，是先研究能夠清楚理解其細節的簡單模型，一旦澈底了解這個模型，就能進一步幫忙他處理更一般的情況。舉例來說，瑟斯頓告訴我他重證哈肯鏡射群（Haken reflection group）安德列夫定理（Andreev's theorem）的技巧，能推廣證明哈肯流形的幾何化猜想。這個原理指引了我自己的研究，每當新碰到一個問題，我總是自問：「這個問題最簡單又不無聊的例子是什麼？」

我在戴維斯第一次和瑟斯頓見面的場景似曾相識，我先解釋我的博士論文結果：以格羅莫夫範（Gromov norm）探討哈肯雙曲三維流形的體積，他隨即開始思考另一個可能的證明路線，運用的是貝松（Gérard Besson）、科杜瓦（Gilles Courtois）和嘉羅（Sylvestre Gallot）發展的新技巧。雖然這個想法一開頭沒有成功，但是在帕瑞爾曼（Grigori Perelman）威力十足的新手法出現後，最終卻開啟了我和瑟斯頓長達數年的合作。

瑟斯頓和阿戈爾在加州大學戴維斯分校同教一門課。
（Neil Michel〔Axiom〕）攝，感謝戴維斯加大圖書館特藏組提供）

我參加瑟斯頓每學季都開設的研究所討論班叫做「實驗數學」（Experimental Mathematics），課中他徵詢學生感興趣的問題，然後用 Mathematica 或其他程式來探討這些問題。記得有個西洋棋騎士路徑問題（knight's tour problem）的解讓我印象很深刻，瑟斯頓瞬時就找出解答，他基本上只是不斷把棋盤摺小，直到解答顯而易見。我從這門課學到很多數學程式的手法，對我的研究頗有幫助。

我們也曾合開「幾何與想像」這門課的一種版本，在這堂課我學到的可能比學生還多得多。有次我們給學生一系列「練習想像」的問題，其中包括在一個頂點黏合三個正五邊形，黏出一個正 12 面體。

在學生操作的同時，我們也同時進行這個問題的三維版本，將每個頂點黏合四個 12 面體進而黏出一個 120 胞體（120-cell，dodecaplex）的結果視覺化。在這種過程裡，數學變得非常鮮明與個人化，並能運用到視覺皮層廣大的計算與記憶能力。有一次，他讀到一本談論視覺與大腦的書，向我們解釋影像從眼睛投射到大腦的過程，大致上是一個保角映射。我也學到瑟斯頓認為所有人都能以視覺化的方式做數學，他並不希望自己讓學生對某個特別問題的結果產生偏見，瑟斯頓希望他們做出自己的發現。

離開戴維斯之後，我只有在電子郵件或學術會議中才偶爾和瑟斯頓有互動，但是我發現只需要五分鐘的解釋，他通常都能夠理解我暫時的研究進展。這也是我從他身上學到的事情：想要吸收數學知識，直接跟專家談比閱讀論文要簡單得多。這在低維拓樸這個領域尤其有價值，因為往往一幅正確的圖像就能取代許多頁晦澀的符號，後者是有時必須把結果轉譯成嚴格數學時所付出的代價。

幾年前，魏茲（Daniel Wise）到紐約講演他的研究時，瑟斯頓正巧到紐約接受治療，曾經來聽過幾次演講。儘管他的身體日益虛弱，仍然熱情的向講者提問。有一次瑟斯頓還說，如果我能在任何我認為薄弱之處找出魏茲論證的錯誤，他願意給我 1000 美元。

我很高興能被帶領到瑟斯頓的遊樂園。我希望自己能以瑟斯頓的願景與洞見啟迪更多的人。

華許（Genevieve Walsh）

作者簡介：華許是塔夫茨大學（Tufts University）的助理教授。

我會試著讓讀者感受在戴維斯當瑟斯頓學生的感覺。1997 年，我剛進入加州大學戴維斯分校，比爾是新來的教授，教微分幾何。他當時非常有名，課堂座無虛席。我還留存這堂課的一些筆記，裡頭充滿了像是把去掉一點的平面轉化成柱體的圖形；把正方體沿著它的面摺疊的圖形；所有六邊形空間的描述；平面場、李括弧（Lie bracket）、標架叢（frame bundle）；結餘空間基本群的計算；「負曲率群」（group negative curvature）和準保距映射的描述；紋理（lamination）和噶拜的遍在定理（Ubiquity Theorem）等等。還有如果住在不同幾何空間會長成什麼樣子的圖形。例如，有幅圖上畫了很瘦長的人，其中頭和腳用段弧線連起來，旁邊的註解寫著：「在 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$ 中，你看起來又高又瘦。（適應鉛直圓的不多，適應水平圓的很多。）」

那一年到最後，只有三個學生留下來。我則是被這門課給迷住了。

我開始跟比爾做研究。我這段時期的筆記上，有許多尖端和彎折紋理（bending lamination）的圖，以及從結餘空間的黏接圖算出該結的計算。很幸運，系裡有很多志趣相投的數學家可以幫我釐清概念。庫波伯格（Greg Kuperberg）、阿戈爾、湯普森（Abby Thompson）、哈斯（Joel Hass）都提供我非常有用的資源。不過我仍然時有困惑。因此和比爾討論後，會試著很快寫下討論內容，讓自己不會忘記過程思路。底下是一些信手拈來的摘錄：

「我實在不確定為什麼我們會開始說這個，我問的是彎折（bending），但他卻開始告訴我複射影結構……」

「這是一種『看到』霍普夫纖形（Hopf fibration）和克里弗德環面（Clifford torus）連結的方法。想想要如何做到。」

「我這個週末有一點小進展，大部分時間都在讀哈徹爾（Allen Hatcher）和瑟斯頓的論文，我還是不能貫通，但瑟斯頓也不想解釋給我聽。」

「我問他二次微分（quadratic differential）和泰希穆勒空間的切空間是否等同，他說是，能等同，但是有時用對偶會更好，他叫我去查書，因為他有可能搞混了。」

「這次討論，主要談庫柏與隆（Darren Long）的論文，他們證明大部分鄧恩填滿（Dehn filling）都是準哈肯（virtually Haken）的。我得把這些寫在紙上，因為這次討論畫了很多圖。」

「所以，我告訴他史瓦茲微分（Schwarzian derivative）是 $f'''/f' - (3/2)(f''/f')^2$。」

除了嘗試理解和描繪許多不同的東西，搞懂他堅持不放入論文的公式之外，我應該也要進行某些研究計畫。問題是我不那麼全然確定該做什麼。有一天，我們不在他的研究室討論，他到外面為我們買了咖啡，還帶了一些鏈狀圓環。我因為能夠到外面談數學而興奮，喝著咖啡，帶著一大袋圓形鑰匙圈到處閒晃。但是我仍然不知道能對這堆圓圈「做」什麼。有次我向哈斯黴詢相關的數學方向，他回答：「不論比爾說什麼，妳照做就是了。」結果，大圓鏈（great circle links）的概念變成好幾種現象的美妙範例，但這些我要晚一點才能領會到。這個課題真是迷人無比，就像比爾其他的許多建議一樣。

幾年後我到康乃爾去演講時，才有機會再與比爾見面討論。比爾當時病得很重，有天下午我們在他小房子的火爐邊談話，他穿著一件非常大的羊毛大衣，讓人看起來很矮小，比爾似乎很疲倦，幾乎無法講話。但是還是問我在做什麼數學，我也很想談。我提到與某種二維球面特殊三角分割在組合上等價的銳角三角分割構成的空間，特別問他這個空間是否連通？我們討論了一下，他讓問題在他腦裡轉，從不同的角度思考。他認為這個問題挺有趣，在某一刻他點了點頭說：「我想這可能是對的。」

伍德（Carol Wood）

作者簡介：伍德是維思大學（Wesleyan University）的數學教授。

瑟斯頓器識非凡，超乎我能想像的聰明，他帶領一整代數學家見前人之所未見，而且不限於數學的物事。悼念比爾，我想要指出他在 MSRI 的見識與功業，最後改造了整個機構的肌理。

隨著時間推移，我很榮幸見過 MSRI 的所有所長與他們的團隊。每一位都在 MSRI 留下印記，既勤勞又聰明，為數學和數學家的利益而努力。我在 1989 ～ 90 年是 MSRI 的成員，1996 ～ 97 年加入比爾的團隊，後來並成為活動籌劃人與董事。比爾任所長的期間是 1992 年至 1997 年，歷任副所長包括奧斯曼（Robert Osserman）、布魯姆（Lenore Blum）、林節玄，最後一年則是我。比爾心思深刻，他設想的願景包含了 MSRI 以及他自己作為所長的角色，其中一部份明確表達於一份稱為〈各種可能性〉（Possibilities）的文件中。我不能一一指出比爾所長任期內所有活動的功勞誰屬，雖然任何那段日子參與 MSRI 事務的人，都知道大眾普及活動的天才發想出自奧斯曼。

瑟斯頓和奧斯曼 1997 年攝於 MSRI，相片中的雕塑出自弗格森。
（感謝作者提供）

在比爾的領導之下，MSRI 的影響戲劇性的大為擴張。底下是一些例子：

○ 數學對話（Mathematical Conversations），其中數學教師和研究者平等討論，也包括關於數學教育的工作坊與會議，例如「微積分戰爭」（calculus wars）。
○ 給學生和年輕研究學者的活動，包括介紹性的工作坊，讓研究生參與研究計畫。（在 1989 ～ 90 年時，我們只能「偷渡」學生進入大樓！）
○ 科普活動。最有名的是 1993 年 10 月在舊金山舉辦的「費馬節」（Fermat Fest），另外還有好幾個把數學相關課題帶給大眾的活動。
○ 介紹最新的科技和通訊技術，包括視訊串流，群播骨幹網路（Mbone）和 Elmo 投影機。 我還記得 1997 年就進行的 3D 列印展示，一直到現在才開始廣泛使用。
○ 推廣多元性。建立人力資源諮詢委員會（Human Resources Advisory Committee），舉辦首創的「非裔美國數學科學家大會（Conference for African-American Researchers in the Mathematical Sciences；CAARMS）；並與數學女性協會（Association for Women in Mathematics）合辦「茱利亞 · 羅賓森研討會」（Julia Robinson Conference）。
○ 開放系所贊助，從原初提議的八所，1997 年擴大到 30 所。（現在已經有超過 90 個贊助系所。）

還有一個比較表面的改變，就是將 MSRI 比較有負面意味的讀法 misery（悲慘）暱稱，改成 emissary（特使），提點這個機構日後的外觀。諷刺的是，這個新暱稱除了作為機關通訊的名稱之外並不普及，某些老戰友堅持使用 misery，但是最常用的讀法，還是將 M、S、R、I 分開讀。我承認兩個暱稱我都不熟悉，所以對這樣的結果感到開心。

大部分比爾完成的變革，也許在今天看起來不是那麼原創或革命性，但是在當時的數學文化裡這些可謂劇變，更何況這些改變出自本意要致力於卓越數學的學術機構，結果這些變革把 MSRI 放到潮流的最前端。比爾的倡議被後來的兩任所長艾森巴德（David Eisenbud）與布萊恩特（Robert Bryant）發揚光大，他們也添加了自己的想法。在今天，無論是數學學生、教育家、數學系所，以及世界各地的數學家都擁有 MSRI。比爾的遠見確實打開了這座大門，其他人想要再關起門來的可能性微乎其微。

在 1996 ～ 97 年，比爾任 MSRI 所長的最後一年，我加入他的團隊擔任副所長，這項人事任命出乎意料。但這並非第一次，自從我們在 1990 年代初認識以來，比爾就曾建議我擔任一些我從未想過的角色，不過這項職務是直到當時責任最重大的一個。在和別人談及這項職務時，我聽到許多

對 MSRI 的抱怨、不滿，甚至將導致危機的預言。不過我信任比爾的判斷，也受到葛倫包恩（Alberto Grunbaum）的支持，他認為我能勝任這份工作。當我到達 MSRI 時，比爾就像他當時歡迎其他訪問學者一樣，展現了他的手工膠帶模型，顯示人類和豬 DNA 的驚人相似度。我當時以及後來多次目睹他追求純粹玩趣的小孩天性。這個令人畏怯的職務其實可能也很好玩，這些是最早的暗示。

與我共事過的人，比爾是其中最寬厚、最不做作，也最和藹可親的。而且，他還聚集了一群非常有天分的幕僚，為本機構理當服務其社群的概念努力奉獻。我的工作很清楚：及時做出決定，讓他人能完成工作。比爾是不修邊幅又完美主義的人，對我這個實際又不那麼前瞻的副所長職責，這種個性組合有時是很大的挑戰。然而在他很可能認為是「可怕的一年」（annus horribilis）裡，我從未聽過比爾埋怨，也沒聽到他向任何人口吐忿言（對自己，我就不敢這麼說）。這個監督 MSRI 所有業務能準時完成的職務，長久以來都令人兢兢業業（24-7 job）。我當時很後悔，比爾早逝後益發遺憾的是，我應該更常停下腳步，享受在比爾身邊的時光。當我這樣做時，真是愉快無比。

我最後一次見到比爾，是在 2012 年 1 月波士頓的數學會議上。他說起計畫訪問柏克萊，這樣離他的家也比較近。他想那一年再造訪 MSRI，這是他 1997 年卸任之後的第一次。我知道布萊恩特也很遺憾造化如此弄人。比爾在領取史提爾獎（Steele Prize）的感言措辭強烈：他感謝數學社群能接受他和他的想法。在數學家最美好的時刻，我們頗能容忍其他同仁的奇言異行，這是我始終引以為傲的事。然而談起能更有效又更寬大的接受他人，沒有人比得上比爾。對於比爾在 MSRI 的領導以及他的數學成就，數學界欠他一份感激之情。

譚蕾

作者簡介：譚蕾是法國昂惹大學（Université d'Angers）的數學教授。

1986 年冬季，我到康乃爾大學訪問哈伯德（John Hubbard）。對於瑟斯頓新發現的有理映射特徵定理，哈伯德的學生威特納（Ben Wittner）和我同屬探索該定理的第一代學生。這個威力強大的定理給出若且唯若的條件，讓一個有彈性的物件：分支覆蓋（branched covering）上的動力學，可以表現一個剛性的物件：有理映射的動力學。這是有理映射迭代理論的基本定理之一。威特納和我決定到普林斯頓一日遊，親自向瑟斯頓討教。我對他生動無比的研討班印象十分深刻，那是午餐時間，滿滿圍在他身邊討論數學的，是邊吃漢堡邊喝可樂的年輕學生。

多年之後，我向比爾提及此事，他說午餐研討班並不是常規的作法，他們只是想帶入非正式的氣氛，降低學生的防衛心，讓他們可以更自然的討論心中實際的想法。比爾也表示自己在普林斯頓被寵壞了，他的周圍是一大群研究生和年輕數學家，讓他扮演蜂后的角色。我想他在這段時間，同時指導好幾位博士生。

儘管比爾在全純動力學（holomorphic dynamics）是重要人物，他卻很少參與這個領域的活動，可能是因為他完全被其他興趣所淹沒（了不起的興趣！），這個領域的新人都沒有機會親身見到他。

我們很幸運，比爾在他人生的最後兩三年又對有理映射動力學重燃興趣，開始參加我們的研討會。在 2011 年 2 月班夫（Banff）舉行的米爾諾（John Milnor）八十歲慶祝會議中，比爾說明他是因為想將佩隆數（Perron number）實現成各種動力系統的成長因子而回到這個領域。這次演講的錄影可在下列研討會網頁看到：

http://www.math.sunysb.edu/jackfest/Videos/Thurston/

這套錄影就和比爾的其他演講錄影一樣，充分展現了比爾的工作風格：他絕對偏好以幾何視覺來設想問題，大量使用電腦做計算和繪圖。當他描述數學對象時，經常讓自己置身其中，就比如他討論射影空間時，就會抬頭遙望著無窮遠線。後來，我和比爾有許多以這種風格親炙或電子郵件的討論。我必須說，要了解他的意思不總是那麼簡單（事實上經常很困難）。要嘛，我掌握到正確的直觀，瞬間洞若觀火，如不然就毫無所獲。有時我偏好以電子郵件和比爾對話，這樣可以對他的描述字眼所呈現的世界慢慢建立正確的直覺。一旦你領略比爾的本意，頓時雲散天開，一切清澈澄美。

比爾的幾何洞察力真的很驚人，即使古典的結果如高斯 / 魯卡斯定理（Gauss-Lucas Theorem），透過比爾的妙眼，馬上看出我從未想過的深刻幾何意義。後來，歇伊達（Arnaud Chéritat）和我合寫了一篇悼念比爾的文章，描述他對這個定理的觀點，文章登在法文網站 *Images des mathématiques* [7] 上。

身為幾何學家，底下是比爾的夫子自道：

我對計算採取的態度總是「懶惰」。我總是耗費過多的時間，試圖找出觀看事物的簡單方式，最好是能在我腦袋中直接看到，不用寫下一長串的推理步驟。我很早就確信，一步步的證明或描述，與找到方法平行於此，卻能立刻掌握全貌的作法，兩者之間有很大的差異。但是後者經常要經歷許多掙扎才能達到。我想一般人通常都認為，逐項與逐步的冗長證明與計算是紛雜卻必要的過程，而不是試著去找到迴避的方法。到現在，我已經找到很多「大圖像」的方法，去檢視我理解的東西，因此這不真的那麼困難。

比爾深信的另一個觀點是所有數學是貫通連結的。

當你建立越多的連結，就越來看出事物是互通的，因此就更想找出更多的連結。

有一次我就實際見識到他卓越的連結手法，那真是一次不同凡響的經驗。2011 年 3 月，比爾正在研究迭代三次多項式的空間，每一個這樣的多項式都可以組合的用圓盤上的有限紋理來刻畫，稱為「本原三次主集」（primitive cubic major）：圓的內接正三角形；或一對端點在圓周、弧長為 $2\pi/3$ 的圓弧段。當要將這樣的紋理空間視覺化時，比爾意識到一個熟悉的模式，底下是他對 3 月 26 日發現的描述：

該圖式可以嵌入 S^3 中，這應該跟參數空間的圖像有關……這（幅圖）也是三次多項式判別式軌跡餘空間的脊線（spine），不過我不確定那項描述要如何整合進來。

一旦意識到新物件和熟悉的老東西之間有所關聯，比爾顯然就開始尋索真正的連結關係。判別式

[7] 譯註：*Images des mathématiques* 上（《數學的映像》）是法國國家科學研究中心（CNRS）的數學普及網站，網址為：https://images.math.cnrs.fr。

軌跡的餘空間是由無重根的多項式所組成。不過，想從兩條圓盤曲線段得到這種多項式的方法一點也不顯然，但是其中必然有什麼關係。到了某一刻，比爾決定嘗試反過來的方向：為什麼不從熟悉的東西導出新的物件呢？為什麼不嘗試從無重根的三次多項式造出兩條曲線段呢？這個想法讓他走向正確的道路，他很快就看出構造方式很容易，不但能反過來，還能推廣到任何次數。底下是他 4 月 1 日的描述：

任取一無重根的 d 次多項式 P，考慮 $\log(P)$，想成一個從 $\mathbb{C}\setminus\{根\}$ 映到無窮圓柱的映射，對每個 P 的臨界點，畫出兩條朝「上」的分隔線（也就是過 P 臨界點，透過 P 映射後會變成圓柱垂直向上半線的線，在 $\mathbb{C}$ 上的方向會遠離原點。❽）

然後在圓盤上連結分隔線的終角，就可得到有限紋理，這就是 d 次主集。反過來，對於每一個主集，存在一個可縮（contractible）系列的多項式，其分隔線的終端正是相應的角對。

如果想要選出每一多項式系列的典型代表，可以選擇其中臨界點都落在單位圓上的多項式，這會構成 d 次多項式判別式軌跡餘空間的一條脊線。

這就是全部了！一則優美的定理誕生了，一座令人意外的橋樑造好了。比爾顯然對這項發現很自豪，我們可以從他一年後如何呈現這個結果的方式看出來。❾

結果是所有「臨界」d 次多項式的集合可以近似的用圓盤上的一組曲線段來描述，其中這些曲線段端點之間的角度形式如 k/d。我花了一些時間才領悟到，這些曲線段的集合，再加上一些端點重合以及多出來的隱藏線段的極限情況，可以描述 $\mathbb{C}$ 上 d 相異點的脊線，而且其基本群等於辮群（braid group），而高維同倫群皆為零。

有機會認識比爾的人都知道他是一個和藹而友善的人，你可以感受到他對其他人的尊重，以及讓所有人覺得舒適的敏銳。我記得有次在一個研討會的晚餐上，他帶著微笑和全神的專注，問在座每一個人：「你是如何進入數學的？」我們其中之一的洛許（Pascale Roesch）說起，她最初一直在選擇心理學或數學之間游移不定，這個回答促使大家活潑對談，長久不斷。

有段時間，某個機構邀請比爾參與關於創造力的大腦研究，他們對他的大腦測試、掃描並製作模型。有次我到康乃爾訪問，正當我戮力深思某個問題時，比爾看著電子郵件，憑空冒出一句話：「我的大腦明天會來。」在好一陣大腦紊亂之後，我最後才領悟到他說的只是要送給他的大腦黏土模型。之後比爾自豪的展示他的「大腦」給所有人看，我必須說，手拿著這顆特異的「大腦」，在我心裡激起莫大的悸動。

令人惋惜的是我們從此失去了這顆大腦，一個思想的領袖，還有許多他將要證明的定理。但是最重要的是，我們失去一位十分珍貴的朋友，我們永遠懷念比爾。

麥克穆蘭（Curtis McMullen）

作者簡介：麥克穆蘭是哈佛大學數學教授，1998 年費爾茲獎得主。

❽ 譯註：把圓柱想成 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$，原點相當於原柱的下方無窮遠。

❾ Topology Festival, Cornell, May 2012, from Kathryn Lindsey。

簡單曲線 Simple Curves

瑟斯頓是以新鮮又奇特的方法觀看事物的大師。還有什麼比曲面上的迴圈簡單？但是在瑟斯頓的手裡，所有簡單迴圈的集合一旦完備化後，就成了卓然自立的幾何物件，也就是射影測定紋理（projective measured lamination；$\mathbb{P}\mathcal{ML}$）空間。目前它扮演的核心角色是泰希穆勒空間的邊界，也是瑟斯頓最廣被應用的發明或發現（尼爾遜〔Jakob Nielsen〕已經預期這一點）。這個概念就像實數從有理數突現出來一樣，突現自基礎拓樸學。

圖 1 出自他的普林斯頓講義《三維流形的幾何與拓樸》（*The Geometry and Topology of 3-Manifolds*，1979 年），顯示 $\mathbb{P}\mathcal{ML}$ 上球極坐標的部份構造，證明這個空間為球，當泰希穆勒空間考慮的曲面虧格 $g > 1$ 時，維度為 $6g - 7$。

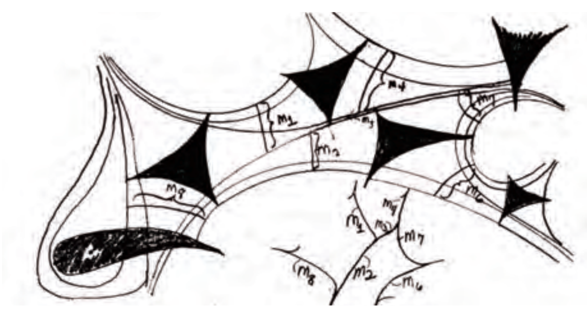


圖 1

1980 年代哈佛的觀點

我第一次聽到瑟斯頓的工作是我在哈佛大學當研究生時（1981 ～ 1985）。他當時剛發現一種 S^2 分支覆蓋的刻畫方式，其中這個覆蓋源自有理映射的動力系統，不過細節還沒寫下來。在這樣令人興奮的氣氛裡，當時正訪問哈佛一學期的哈伯德給了一個小演講，說明證明中大膽的構思：在泰希穆勒空間上的迭代策略，而其固定點就是所需的有理映射。在那段日子，瑟斯頓的油印講義打字書頁內充滿插圖，有時會和本文混在一起。他的講義放在系圖書館的保留書架上，旁邊是更令人生畏的文獻，需要預設有概形（scheme）、L 函數、算子符式（symbol of operator）等等知識才能閱讀。他的講義通常感覺更不羈，充滿圖、直覺，甚至範例。有時我們會聽人說起瑟斯頓的講義充滿「偉大的概念」，暗示其中缺乏嚴格的論證，這些書因為數學內容輕俘，或許應該扣押起來。

普林斯頓的瑟斯頓

身為普林斯頓的教授，瑟斯頓成為我 1987 ～ 1990 年的國科會博士後指導人。很快我就意識到，瑟斯頓其實具備不可思議的能力，能將他的洞識化為透明的邏輯證明，整合（而非掩飾）背景的幾何直觀。

瑟斯頓普林斯頓課程的聽眾，包括前排的多伊爾（Peter Doyle）和我，一群志同道合的研究生，後排則是來自高等研究院（IAS）的訪客。在我的第一年裡，瑟斯頓講授他的哈肯三維流形幾何化定理，這是另一個泰希穆勒空間迭代的傑作，也就是知名的皮表映射（skinning map）。

課程開始先討論克萊恩群（Klein group）極限集的凸閉包的邊界：這是一個沿測定紋理彎折的雙曲曲面。看起來近似的摺面（pleated surface）在凸核的各面之間內插，每個曲面的面積則可用其歐拉示

性數（Euler characteristic）來控制。這些想法很快轉成一系列的緊緻性結果（近似於莫司特剛性定理〔Mostow's rigidity theorem〕），以此支撐皮表映射迭代的收斂結果——有界推得均勻收縮。

上課有人提出問題時，瑟斯頓通常會將視線放在中段距離，感覺好像要抓住某種他個人的動覺 / 幾何模型（kinesthetic-geometric model）。他幾乎總是在現場即時的把結果做出來，尤其是在課上。瑟斯頓的想法似乎是無中生有，這就好像他在年紀很小時就走上另一條軌道，從那時起都用新鮮的眼光注視萬事萬物。如果想要欣賞他的研究可能需要全面重新教育才行。

為了解釋軌形的概念，瑟斯頓有一次帶了三面鏡子和一個藍色小精靈的玩偶到幼稚園去上課。改變兩面鏡子的夾角，小孩可從最初看到三個、四個，然後更多原來玩偶的分身，然後他再加入第三面鏡子，排成三角形。小朋友就擠在周圍，從上面望向鏡子，看到無窮的小精靈宇宙，分身不斷在不同角度反覆出現。

另一次課程以「五邊形問題」(pentagon problem）的討論開始，這是 1986 年國際高中數學奧林匹亞競賽的問題 : 在五邊形的五個頂點上給定五個整數 $(x_i)_{i=1}^5$，且其和滿足 $\sum x_i > 0$，對這五個數進行如下操作：選定某個 $x_i < 0$ 的頂點，將其值改為 $-x_i$（變成正數），但將其兩相鄰頂點的數值分別減去 $-x_i$（所以總和不變）。持續這個過程，最後所有的數都會變成正數嗎？很快黑板就畫滿了錐流形（cone manifold）、多邊形、蝴蝶移動（butterfly move）。雖然瑟斯頓在課堂上沒有提過，他在這個學期結束時，已經將這個奧賽問題和畢卡（Émile Picard），以及德利涅 / 莫司特（Pierre Deligne-Daniel Mostow）在超幾何函數（hypergeometric function）的研究連結起來，重新發現他們在 $PU(1,n)$ 中構造的非算術格（nonarithmetic lattice），其中 $n > 1$。

在 MSRI 的瑟斯頓

圖 2 出自〈餘維大於 1 的葉層理論〉（The theory of foliations of codimension greater than one）[10]。瑟斯頓在這個領域的研究是 h 原理威力的範例：以足夠的想像力盡量壓榨光滑構造的彈性，可以構造出實現任何同倫資料的葉層結構。相同的方法可以運用於球面外翻（sphere eversion），見瑟斯頓製作的電影《翻轉》（Outside In）。

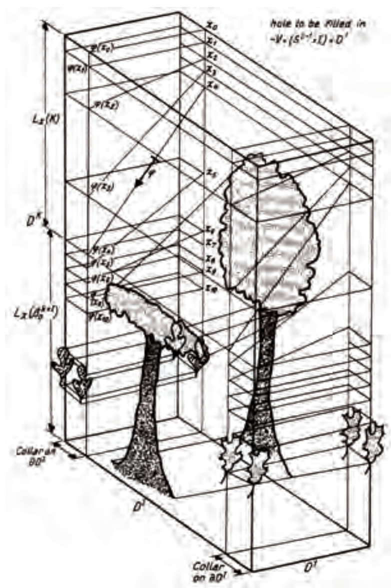


圖 2：開窗。

[10] 出自 *Comment Math. Helv.* 49 (1974), 214–231。

在當 MSRI 所長時（1992 ～ 97），瑟斯頓有次講演一個特殊問題：任何歐拉示性數為 0 的流形都存在餘維 1 的葉層結構。演講充斥著停車塔和上上下下的坡道，還有初等的流形三角分割。當時博特也是聽眾，他對這種手作構造方式不太滿意，在演講最後博特提問說，難道我們不能用微分幾何的演化方程來完成這些過程，將切超平面場慢慢形變到可積的情形嗎？瑟斯頓當下回覆：像演化方程這類拋物方程的解是實解析的，但是眾所周知（海夫里格〔André Haefliger〕的研究）實解析葉層結構比光滑葉層的構造要困難得多，譬如在 S^3 上就沒有實解析的餘維 1 葉層結構。

班夫的瑟斯頓

最後的插圖（圖 3）出自瑟斯頓最後的論文〈一維的熵〉，顯示區間上臨界有限二次映射之擴張因子在 $\mathbb{C}$ 中的迦羅瓦共軛（Galois conjugate），其中擴張因子指的是考慮帳棚映射 $x \mapsto \lambda(1-|x|)$ 時，若 $\lambda > 1$ 且 $x = 0$ 具有有限朝前軌道時的 λ 值。

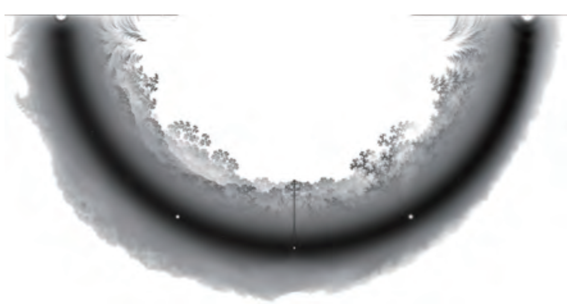


圖 3

這篇文章回到米爾諾和瑟斯頓 1970 年代開始的研究，刻畫多峰映射（multimodal map）和自由群自同構的熵。後者當實現在車軌（train track）上時也是一維動力系統，而且這兩個主題和曲面映射類群（mapping-class group）的基本統一性也於焉浮現。

2011 年，瑟斯頓在為米爾諾賀壽的班夫會議中講演了這項研究，在當時他精力無窮的透過電子郵件和 dropbox 建立了一個研究網絡，包括一群來自世界各地的年輕數學家，其中許多人都與會。班夫會議之後，在他的油印講義寄到哈佛的 30 年後，哈佛的研究生和博士後正舉行每週一次的研讀小組，討論瑟斯頓這篇新論文。

瑟斯頓注視事物的基進方式，持續不斷的形塑數學的風貌，一如他最深刻的定理。∞

本文出處

本文出自 “*William P. Thurston 1946-2012*” Notices of the AMS (63) 2016 No. 1。
這裡是下篇（上篇請見數理人文 14 期）。感謝 AMS 同意翻譯刊登。

譯者簡介

翁秉仁是台灣大學副教授。

延伸閱讀

▶ 泰密娜（Daina Taimina）《雙曲曲面上的編織冒險》（Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes）（2009）A K Peters。《～：給所有人探索的觸覺數學、藝術與工藝》（Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes: Tactile Mathematics, Art and Craft for all to Explore）, 2nd Edition,（2018）CRCPress。本書獲得 2012 年歐拉圖書獎，第二版加入了作者與前版讀者的新體驗，包括在醫學、建築、時尚、量子計算的最新雙曲幾何應用。

▶ 瑟斯頓的 MathOverflow：http://mathoverflow.net/users/9062/bill-thurston
有瑟斯頓的數學相關的隨筆以及與網友的互動問答。

▶《非結》YouTube 網址： http://www.youtube.com/watch?v=zd_HGjH7QZo

▶《翻轉》YouTube 網址：http://www.youtube.com/watch?v=wO61D9x6lNY