

## 重啟計算機融入教學之帆

### 計算機融入教學緣起

計算機融入教學的建議，最早見於民國 82 年《國民小學數學課程標準》，這之後，各版本國、高中數學課程綱要的實施要點裡，也常有使用計算機的建議。但是，二十幾年下來，計算機教學在中小學只有極少數零星執行。108 數學課綱研修小組成立之初，體認我國學生使用計算工具之能力嚴重落後於國際同儕，訂立的四大目標之一便是重啟計算機融入教學之帆。

臺灣的國中學生在 PISA 國際評量的數學成績名列世界各國前茅，國人咸感光榮。另一方面，PISA 報告指出，臺灣的學生不喜歡數學的程度，也是名列世界各國前茅。林福來教授領銜的「數學領域綱要之前導研究」，對這兩個互相矛盾現象的解讀是，國內中小學數學教學過度強調複雜計算，缺少時間培養基礎概念，因此建議：四則運算的概念性理解，應該利用較小位數運算，在一步驟問題中進行。較大位數的運算，可以允許使用計算機來計算，並能進行合理性的判斷。

歷年的數學課綱建議計算機教學時，都僅在實施要點提及，教科書和教師無暇思考執行細節，再加上全國性大考禁止學生使用計算機，更大大削弱了師生嘗試計算機融入教學的念頭。108 數學課綱在學習內容的條文中，明列教導計算機按鍵；在實施要點也加強說明教師、學生、教科書、評量使用計算機之注意事項。

### 正確使用計算機的態度

計算機的教與學要把握一個重要原則，就是「正確使用計算機的態度」。在數學教學中，重點還是數學概念與基本原理，解題時，只有用盡數學推理，剩下繁雜的計算時，才是計算機進場的時機。舉例來說，要計算  $1 + 2 + 3 + \dots + 496$  的值，不是拿了計算機就從 1 開始，一個一個加，加了 495 次後把答案算出來；正道還是要學會等差級數求和的公式，知道答案是  $496(496 + 1)/2$ ，接著若有必要再用計算機協助求解；對於不需要的人，也不必強迫他用計算機求答。

再以計算莫森尼質數為例，要算  $2^{31} - 1$ ，計算機可以直接得到 2147483647；計算略大的  $2^{127} - 1$ ，計算機可以直接得到近似值  $1.7014118 \times 10^{38}$ ；但如果要算  $2^{82589933} - 1$ ，直接按計算機就會得到錯誤信息，因為它已經超過一般計算機的最大容量  $10^{100}$ ；這時候，數學就要進場。利用  $2 = 10^{\log 2}$  及指數律，得知

$$\begin{aligned} 2^{82589933} - 1 &= (10^{\log 2})^{82589933} - 1 \\ &= 10^{82589933 \log 2} - 1 \approx 10^{24862047.17} - 1 \\ &= 10^{0.17} \times 10^{24862047} \approx 1.5 \times 10^{24862047} \end{aligned}$$

計算機只用來算  $82589933 \log 2 \approx 24862047.17$  和  $10^{0.17} \approx 1.5$ ，其他要靠數學。數學理論永遠優先於工具。

「數學老師的本業是教導數學理論，不可被工具喧賓奪主。」

依據 108 課綱寫出來的國、高中第一冊數學教科書已經上市，九月開學後，老師就要面對計算機融入教學，培養學生使用工具的素養。國一的內容包含加、減、乘、除，高一的內容包含指數、常用對數、三角比。有別於舊教材，新課本不再有對數表、三角函數表，取代的是用更快速更精確的計算機求

值，而且也有一些例題含有無法筆算的數據。這是一個新的嘗試，雖然不難，但也要大家去面對、嘗試。

### 每位學生要有自己隨身攜帶的計算機

計算機融入教學要做的第一件事情是，每位學生要有自己隨身攜帶、要用就可以拿出來用的計算機。108 數學課綱所需的計算主要是加、減、乘、除、指數、對數、三角比，一般 200 元以內的工程型計算機都具備這些功能，更貴的計算機雖然有更多功能，但並不需要。不同型號的計算機，功能類似，但按鍵的標記或排列可能不同，為了教學上容易溝通，同一班級要用同一種型號的計算機，建議

「教師在開始教學之前，宜和全班同學商定一種共同型號的計算機。」

學生買到自己的計算機之後，應熟悉它的功能及操作。

在購置計算機方面，學校也可適當協助，可行的方案有：

- (1) 由代收代辦會議決議，納入註冊費繳費單中全校一起購買計算機。
- (2) 合作社銷售計算機，讓學生自行採購。
- (3) 提供類似「驗書」機制，學生若已有指定型號的計算機，只要通過檢驗即可，不用重新購買。

### 評量是教學的延伸

計算機融入教學的基本觀念是，教學時如同以往的教，只在遇到需要指對數、三角比、或複雜計算時，才用計算機幫忙；形成性評量、段考、全國性大考都是為了檢視教學成效，應該延續教學理念，

「不必刻意塑造計算機考題，只需於素養導向的試題中引用真實而自然的數據，學生需要時就用計算機幫忙，不需要時也不必強行使用。」

以美國的 SAT 為例，2016 年起新型 SAT 數學考科分兩部分，其中 25 分鐘不可用計算機，另外 55 分鐘「可用」計算機，所謂可用並非一定要用。以其中一份試用卷為例，在 38 道可用計算機的題目中，只有 5 題一定要用計算機，另有 6 題計算機有助於計算能力較弱者，其餘 27 題並不需使用計算機。所以，需不需要使用計算機是學生的選擇，試題應配合教學理念，引用自然的數據，不需要強行設計「計算機考題」。就使用自然的數據這一點，我們覺得，還有一些領域也很需要，數學是工具學科，計算機融入教學的目的是，讓學生在各領域學習時有更大的方便。

如果教學、寫作業時，學生有計算機可以處理複雜的計算，但是考試時卻不能用計算機，這是在為難學生，違反 108 數學課綱要求培養學生計算機素養的精神。我們呼籲教師在小考時、學校在段考時、全國性大考時都應該允許學生使用計算機。

(張鎮華，臺灣大學數學系)

---

108 十二年國教課綱即將上路，計算機融入數學教學是重大的變革之一，引起國人多方的疑慮與討論，本刊特別邀請 108 數學領綱召集人張鎮華教授說明釋疑，期能獲得社會各界對這項改變的支持。

(編輯部)

## 首位女性獲頒阿貝爾獎，以及 2019 年數學大獎

2019 年 3 月 19 日挪威科學與文學院宣布今年的阿貝爾獎，授予現年 76 歲德州奧斯汀大學的退休榮譽教授烏蘭貝克 (Karen Uhlenbeck)，表彰「她在幾何偏微分方程、規範場論 (gauge field theory) 與可積系統 (integrable system) 研究的開創性成就，以及她在分析、幾何和數學物理方面的工作的根本性影響。」目前她是普林斯頓大學與高等研究院的資深訪問學者。

自 2003 年阿貝爾獎設立的 17 年來，她是第一位獲此殊榮的女性。另外特別值得一提的是，她也是 1990 年在京都的國際數學家大會的大會主講 (plenary lecture) 人，講題是「非線性分析在拓樸學中的應用」(Applications of Nonlinear Analysis in Topology)。這是繼 1932 年在蘇黎世國際數學家大會的諾特 (Emmy Noether) 之後的第二位女性大會主講人，中間間隔了 58 年。

由於烏蘭貝克在數學和物理的許多領域重大貢獻，除了阿貝爾獎外，在她的職涯中還獲得許多的大、小獎項認可。有 1983 年的麥克阿瑟獎和 2000 年的美國國家科學獎章……等等。她還在 1986 年當選為美國國家科學院院士，以及在 2002 年當選為美國哲學會會士。

烏蘭貝克在最小曲面、調和映照 (harmonic map)、楊 / 米爾斯理論 (Yang-Mills theory)、非線性波和可積系統方面做了開創性的工作，這些工作在過去 40 年裡塑造了幾何分析領域。她的工作對微分幾何、偏微分方程、拓樸和數

學物理都產生了巨大的影響。她在大域分析 (global analysis) 所發展的工具與技術也已經屬於現今所有幾何學者與分析學者們的「工具箱」。

丘成桐對烏蘭貝克在最小曲面和調和映照的工作讚不絕口 (見本期〈如何在學術上學萬人敵〉以及第 15 期的〈我在普林斯頓高等研究院的經歷〉)，並認為「這是幾何分析領域最有影響的研究之一」。她在規範場論的楊 / 米爾斯方程方面的工作，為量子場論中被廣泛用來描述粒子與力之間基本相互作用的技術提供了嚴格的數學基礎，並啟發了英國數學家多納森 (Simon Donaldson) 關於四維拓撲的研究，他因而獲頒了 1986 年的菲爾茲獎。

烏蘭貝克除了在數學方面的有開創性成就之外，她同時也還是數學和科學中性別平等的堅定倡導者和教育家。她是在普林斯頓高等研究院的猶他州「公園市數學研究所」(Park City Mathematics Institute, PCMI) 的創始人之一，該研究所的目標是鼓勵年輕研究人員從事高水準的數學研究與交流；及提供各個階段學生的數學培訓與數學教育推廣，並他們理解數學方面的困難和興趣。她也與滕楚蓮共同創立了普林斯頓高等研究院的「女性和數學」(Women and Mathematics, WAM) 計劃，旨在鼓勵與幫助女性成為數學研究的領導者。

### 數學沃爾夫獎

今年的數學大獎沃爾夫獎頒給了二位機率學家：現年 64 歲任教於芝加哥大學的勞勒 (Gregory Lawler) 和 60 歲的任教於巴黎第 11

大學的勒高 (Jean-François Le Gall)。

勞勒在機率論的發展有全面和開創性的貢獻。他在布朗運動的許多特性取得了出色的成果，例如覆蓋次數、相交指數 (intersection exponent) 和各種子集的維數。勞勒透過在隨機曲線的研究，引進了一個現在已是經典的模型：迴圈擦除隨機漫步 (Loop-Erased Random Walk, LERW)，並建立了許多它的性質。雖然 LERW 很容易定義，但事實上它具有基本性質，並且被證明與均勻的生成樹 (uniformly spanning tree) 和二聚體鑲嵌 (dimer tiling) 有關。這項工作為施拉姆 (Oded Schramm) 引入隨機婁納演化 (stochastic Loewner evolution, SLE) 曲線之後的很多研究突破性的進展奠定了基礎。勞勒、施拉姆和維爾納 (Wendelin Werner, 德裔法籍數學家，是勞勒的博士生，也是 2006 年的菲爾茲獎得主) 計算了布朗相交指數，證明了曼德布洛特 (Benoit Mandelbrot) 猜想：平面的布朗邊界 (Brownian frontier) 具有豪斯朵夫維數 (Hausdorff dimension)  $4/3$ ，並且確定 LERW 具有共形不變的縮放極限 (conformally invariant scaling limit)。接下來，這些結果也為勞勒和其他人更驚人的研究進展鋪平了道路。

勒高對隨機過程理論做出了一些深刻而優雅的貢獻。他關於布朗運動的精緻性質的研究解決了許多難題，例如集合的多次訪問刻劃以及鄰域體積的行為——布朗香腸 (Brownian sausage)。勒高在分支過程理論 (theory of branching processes) 方面取得了突破性進展，這在許多應用中都有出現。特別是，他

對布朗蛇 (Brownian snake) 的介紹及其對其性質的研究徹底改變了超過程理論 (theory of superprocesses)：將馬可夫過程 (Markov process) 推廣為不斷演變的消亡和分裂粒子雲。然後，他使用這些工具中的一些來實現對 2D 量子重力的數學理解的驚人突破。勒高建立了均勻平面映射與規範隨機度規 (canonical random metric) (布朗映射) 的收斂性，並證明它幾乎處處具有豪斯朵夫維數 4 並且與 2 維球面同胚。

### 數學突破獎

有「科學界奧斯卡獎」之稱的突破獎 (Breakthrough Prize) 的頒獎典禮，2018 年 11 月 4 日在加州矽谷的 NASA 艾姆斯研究中心 (Ames Research Center) 舉行，由美國國家地理頻道全程實況轉播。今年的數學突破獎頒給了法國的文森·拉福格 (Vincent Lafforgue)，他是 2002 年費爾茲獎得主羅倫·拉福格 (Laurent Lafforgue) 的弟弟，現在是格勒諾布-阿爾卑斯大學 (Université Grenoble Alpes) 傅利葉中心的國家研究中心 (CNRS) 資深研究員。獲獎的原因是「在數學的多個領域有重大的貢獻，尤其是在朗蘭茲綱領中的函數體。」

繼上一屆頒獎典禮中有歐陽娜娜的大提琴演奏，這一屆又有香港歌手鄧紫棋演唱她自己創作的中文歌《光年之外》，即便如此，似乎仍未引起任何一家臺灣主流媒體關注及報導這則重要的科學新聞。(編輯室)