人

數學家想要真正成功，必須被保護

2019 年阿貝爾獎得主烏蘭貝克訪談

受訪者：烏蘭貝克（Karen Keskulla Uhlenbeck）
訪談者：傑克森（Allyn Jackson）
譯　者：翁秉仁

訪談者簡介：傑克森原為美國數學學會會刊 *Notices* 之副執行編輯，曾執筆多篇數學主題專文、數學家訪談或傳記。她已離開原職，現為獨立作者。

受訪者簡介

烏蘭貝克 1942 年生，1966 年在布朗戴斯大學（Brandeis University）取得博士學位，指導教授是帕雷斯（Richard Palais）。先在麻省理工學院和加州大學柏克萊分校做博士後，再分別於伊利諾大學厄巴納 / 香檳分校（1971 ～ 1976）、伊利諾大學芝加哥分校（1976 ～ 1983）、芝加哥大學（1983 ～ 1988）擔任教職。1988 年起，她擔任德州大學奧斯丁分校的 Sid W. Richardson Foundation 講座教授。如今烏蘭貝克從德大退休，正在普林斯頓高等研究院訪問。

過去半世紀，烏蘭貝克是分析學界的卓越領導人物之一，特別在幾何分析有深刻貢獻。令她最知名的可能是數學規範場論的研究，為 20 世紀數學最關鍵的進展之一奠定基礎。基於這項成就，於 2019 年她更獲頒數學界大獎阿貝爾獎。她還曾獲得麥克阿瑟獎（1983）等的多項榮譽與獎項。1990 年，她成為史上第二位在國際數學家大會（International Congress of Mathematicians）做大會演講的女性，之前是 1932 年的諾特（Emmy Noether）。

多面向的興趣

童年時，我讀了很多書，什麼東西都讀。我會在圖書館讀上一整晚。我習慣在學校書桌下偷看書……結果我把整棟圖書館的科學書都讀完了，因為無書可讀而沮喪不已。[1]

問▸妳的婚前姓很美：Keskulla。

答▸謝謝。我現在的簽名依然是 Karen Keskulla Uhlenbeck。我的祖父是愛沙尼亞人，雖然他出生在拉脫維亞的里加（Riga）。Keskula 是原來的拼法，源自芬蘭 / 愛沙尼亞語，意思是「村子的中心」。如果在赫爾辛基開車繞繞，你會看到很多寫著 Keskula 的標誌！以上說的是我父親那邊，我祖母是德國人。

問▸妳的父親在美國出生嗎？

答▸是的。我不太確定我祖母的情形，她應該也是在美國出生。我不很清楚自己的家族淵源，我們家不太保存歷史。

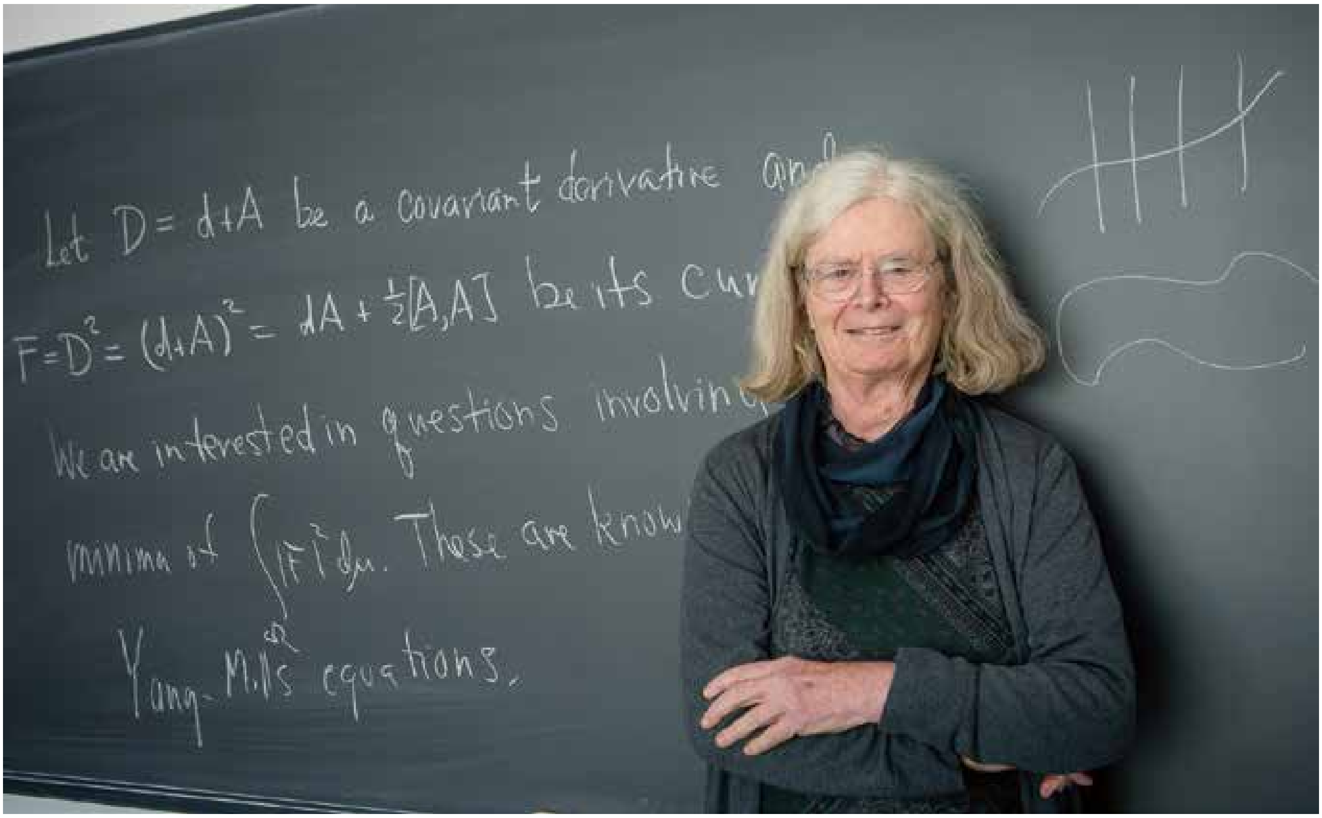
我外公是衛理會的牧師，他有 12 個子女。外公過世時，我母親才五歲，而且我外婆還剛懷孕。我有位舅舅撐起整個家，他們的家境只算小康。

問▸妳母親的娘家在哪裡？

答▸紐澤西的法明岱爾（Farmingdale）。外公家有很多阿姨可以幫忙，我媽至少和某個姊姊感情很好。我的外婆很厲害，身高最少 180 公分高，在當時是巨人般的女人，生養 12 個小孩毫不費力。我見過她，她不是很照顧他人的人，但她的興趣非常廣泛，也很擅長聊天。我的母親家族有很多堅強的女性。

---

[1] 註：引自 S. Ambrose 等人著〈烏蘭貝克個人傳略〉（A Personal Profile of Karen K. Uhlenbeck），出自《女性在科學與工程之旅：非宇宙常數》（*Journeys of Women in Science and Engineering, No Universal Constants*），Temple University Press，1999。



烏蘭貝克於普林斯頓高等研究院。（Andrea Kane 攝，Institute for Advanced Study）

問 ➾ 妳母親是一位藝術家。

答 ➾ 我至少有一個阿姨幫忙我母親踏上藝術的道路。她 1928 年開始讀大專，那是紐約的藝術學生聯盟（Art Students League）。大概一年後，她意識到藝術不能當飯吃，就轉學到紐約城市學院（City College of New York），拿到教育學位。我想接下來幾年直到她遇見我父親之前，她都在高中教藝術，也許還包括小學。她很喜歡教小朋友。

我不確定經濟大蕭條那幾年她過得如何，我想應該也是有養不活自己的時候，1932 年時，她和我父親剛大學畢業，那可不是畢業的好時機。

我父親有一位姑媽是梅西百貨的採購員，因此得以晉身上等中產階級。她資助我父親進麻省理工學院讀機械工程。在 1932 年那個時候，他唯一能找到的是加州黃金礦脈的工作。大約一年後，他轉到猶他州的礦脈任職。我父親從此愛上美國西部的山景。

經濟大蕭條的氣氛瀰漫我們的童年，我父母都是很有進取心而且受過教育的知識人才，卻在他們生命剛踏入社會的關鍵時刻，遭遇十分嚴苛的經濟困境。在這種背景之下，他們眞的很擔心錢的問題，骨子裡卻又是知識份子。

因爲我外公和源自衛理會的德魯大學（Drew University）有些關係，我有些舅舅和阿姨也進了大學唸書。

問 ➾ 妳父親是家中第一個進大學的孩子嗎？

答 ➾ 是的，我很確定這一點。他在紐約的奧西寧村（Ossining）長大。我父親到大西部工作了幾年之後，就轉到如今變成美鋁（Alcoa）的美國製鋁公司任職。他和我母親結婚後，大半生都待在紐澤西州，直到他們退休搬到聖塔菲（Santa Fe）爲止。

問 ➤ 妳母親專精的是哪種畫類？

答 ➤ 我母親終生只鍾意風景畫。很多她早期的作品，充滿 1930 的年代感。我曾在很多藝術館查考，看到很多和我母親畫風相近的畫作。在我的童年，她畫的幾乎都是紐澤西的風景。她試過爲她的小孩作畫，但都不是很成功。

問 ➤ 她不太畫人物。

答 ➤ 是的。我讀大學之後，她從油畫轉攻水彩，可能因爲畫材中牽涉的化學成分。

問 ➤ 妳家有四個小孩，另外三位後來都做什麼？

答 ➤ 各有各的難處。我父親堅持我弟弟攻讀工程學位，他也眞的試了，最後卻轉入神學院就讀，他生活並不寬裕。我最小的妹妹重度殘障，20 多年前已經過世。我另一個妹妹是詩人，和她先生住在麻州卡萊爾鎮（Carlisle），他們對野生生物和生態議題非常感興趣。

問 ➤ 所以妳是老大。

答 ➤ 是。

問 ➤ 年輕時，有什麼重要的因素影響妳對數學和科學的傾向嗎？妳父親有影響嗎？

答 ➤ 當然，我父親有一些間接影響。我們都很喜歡閱讀，他會從圖書館借霍伊爾（Fred Hoyle）和加莫夫（George Gamow）寫的書，最終我也都讀了。比起我，他更擔心我弟弟能否成爲科學家。我母親的朋友都是畫家，他們的生活風格和一般人很不同。當我年輕時，認識許多比較特異的非中產階級人士，這一點我記憶鮮明。

問 ➤ 因爲妳弟弟是男生，所以妳父親希望他成爲科學家？

答 ➤ 沒錯。

問 ➤ 那妳弟弟有表現出對科學的興趣嗎？

答 ➤ 沒有。他的興趣通常是比較神秘的東西，而且顯然厭惡科學。他的成長歷程很悲慘，如今是一位嚴肅的音樂家。

問 ➤ 所以妳有更多的自由做自己感興趣的事？

答 ➤ 是的。我們住在靠近貝斯京嶺（Basking Ridge）的西米林頓（West Millington）。西米林頓遠遠說不上是一方小鎮。米林頓是一個鎮，而西米林頓只是幾間房子的總名稱，是一個很鄉下的地方。這是受我母親的影響，因爲她總嚮往好風景的地方。我父母和當地人很少互動，父親有一些職業上的友人，母親有她的畫家朋友，還有她那一大家子 11 位兄弟姊妹。除了一位住密西根，一位在阿拉斯加，其他人都住紐澤西。

問 ▸ 高中時，老師鼓勵妳讀數學嗎？

答 ▸ 不眞的算，我成績好，老師當然鼓勵我。我記憶最鮮明的是拉丁文老師。當時有很多學生選拉丁文課，我上了四年。之所以能這麼堅持我現在的解釋是，拉丁文是我上過最難的課程。你不能只是讀，還得好好練習！

問 ▸ 妳的數學課不需要好好練習嗎？

答 ▸ 不用。基於自己的課程規劃，我不能選「榮譽」數學課，因此榮譽班數學老師多次在課餘教我微積分入門，這對我通過密西根大學榮譽學院入學考試幫助很大。

我曾經和我父母朋友的兒子約會，他是很怪的小孩。他曾借我一本微積分，我就這樣把它讀完。我父親也有一些麻省理工的教科書，我不很懂的讀完其中一本光學。我對所有東西都感興趣，我不認爲自己是個好搞的小孩。

問 ▸ 爲什麼？

答 ▸ 我人總是很緊張，想知道事情是怎麼回事，很愛問問題。我社會化的不怎麼成功。

不用學，自己發明就好

我在密西根大學新生榮譽課程裡學到數學。我還記得用極限計算導數時的興奮，還有證明海涅／波瑞耳定理（Heine-Borel theorem）用到的小方框。數學的結構、優雅和美麗瞬間攫住我的心神，從此愛上數學。 [2]

答 ▸ 到了上大學的年紀，我進紐澤西的大學是沒問題，只是羅格斯大學（Rutgers）和普林斯頓大學是男的，道格拉斯學院則是女子學院。我母親不希望我讀女子學院，我應該要問她原因，只是從沒問過。

於是我選了三所學校。我有表兄妹住在密西根，因此密西根大學是一個選項。事實上紐澤西和紐約大都會區有很多學生到外地讀大學，包括密西根在內。我父親畢業於麻省理工，所以我也申請了。基於某種原因，我也選了康乃爾大學，感覺那是個好地方。結果每所大學我都申請上了。我能體會父母擔心錢的問題，他們並沒有給我壓力，不然就是他們做得很有技巧，反正最後我選了密西根大學，因爲它比其他學校便宜多了。就我自己而言，這是一個很好的選擇。大概十年之後我在麻省理工教書時，發現那裡的女學生境遇很慘，每一班微積分課只有兩個女生，感覺經常黏在一起。密西根大學不但學術環境佳，社交環境也很棒，比起紐澤西的女生，美國中西部女孩的心胸遠遠更開放活潑。在紐澤西小圈圈很多，我則是「大姐頭」。

我沒碰過喜歡高中的人，不知道值不值得繼續談高中一些不很有趣的事。我參加過樂隊，是隊

[2] 引自《數學家：內在世界的外在視角》（*Mathematicians: An Outer View of the Inner World*），Mariana Cook 攝影，Princeton University Press，2009。

中的單簧管手。我的運動表現也很好，只是那時並沒有女子運動這回事，和現在很不同。另外就是因為我家住鄉間，如果放學後想留校就會面臨通學的問題。

高中時我跟榮譽數學班老師讀了兩三學期的書，他教我的東西十分形式又冷硬。我記得我眞的能掌握微積分是讀大學的時候。

問 ➛ 談談這個掌握微積分的片刻。

答 ➛ 我上了一門很高等的課程，近於大學部的實分析課。有天上完極限後去上演習課，助教展示如何用極限求導數。我記得我站起來，看著旁邊的傢伙說：「你們容許我們這樣做嗎？」在那個時刻我突然意識到，原來在數學裡，你「被容許」做各式各樣的事情。

幾年之後，我遇到那門課的老師律德（Maxwell Reade），他說我經常坐在最後一排看《紐約時報》。我當眞不記得這回事！不過我確實記得上課很無聊，因為他教完某個東西之後，下次同樣的東西又會再講一遍。作為教授和老師，我了解這是合理的。但對著迷於數學的學生，這只是無聊的重複。那是一門榮譽數學課，剛開始有 80 個學生，第二年結束時，全班只剩大約八個人。

問 ➛ 班上有幾個女生？

答 ➛ 原先女生就不多，但最後留下的八個人裡有三個女生。除我之外，另外兩位後來也取得數學博士，不過我不確定能否記得她們的名字。

問 ➛ 還蠻出人意料，八個有三個。

答 ➛ 對的，那是很棒的學習環境，當然也是全然男性的環境，就像中西部大學圖書館的那種味道：橡木桌子，成牆大部頭的書，多少是種男性的氛圍。但因為傳統一向如此，我也就接受了，就像年輕人得接受大部分事情一樣。由於我是相當好的學生，受到很多鼓勵。我在大學部時就修研究所的課，許多人鼓勵我申請研究所。

我還記得其他的「啊哈」時刻。我修了一門課，老師是相當有名的懷爾德（Raymond Wilder）[3]，他是穆爾（Robert L. Moore）的學生[4]。這門課有 50 個學生，懷爾德上課方式跟穆爾類似[5]。這門課裡我的「啊哈」時刻發生在我能做出書中內容的時候，也就是說，我不用學，而是自己發明的。這種上課方式大概對任何學生都很有價值，讓學生意識到自己可以依自己的方式思考而且得到東西。

問 ➛ 雖然妳一開頭主攻物理，但最後卻主修數學。

答 ➛ 我大三是在國外讀的。我當時的男友是波蘭裔的數學研究生。他認為我的教育背景太美國

[3] 1923 年，懷爾德（1896 ～ 1982）在德州大學奧斯丁分校取得博士學位，指導教授是穆爾。他在 1950 ～ 1951 擔任美國數學學會的會長。
[4] 1923 年，穆爾（1882 ～ 1974）在芝加哥大學取得博士學位，指導教授是威布倫（Oswald Veblen）。穆爾 1936 ～ 1938 擔任美國數學學會的會長。
[5] 所謂「穆爾法」得名於穆爾的教書風格，他要求學生自己呈現大部分的題材，而不是聽老師上課。在今天，穆爾法稱為「發現式學習」（discovery learning）。

了，必須接受更豐厚的教育！我透過韋恩州立大學（Wayne State University）申請大三國外交換計畫。參與這個計畫的學生來自全美：耶魯、普林斯頓、史丹福，麻州惠頓學院（Wheaton College）等等。我到慕尼黑一年，那是很值得的體驗。我學習德文，講得相當好。聽德文數學課確實讓我大開眼界，老師課上得十分完美，所有細節都很清晰易懂。我以前的教授習慣在上課前15分鐘才備課。我還學滑雪，欣賞歌劇，進入戲劇的世界。這眞的是很美好的經驗。

問 ➛ 你記得任何慕尼黑的教授嗎？

答 ➛ 我跟黎格（Georg Johann Rieger）學代數拓樸 6，跟史坦學微分方程和複分析。

問 ➛ 妳說的是卡爾．史坦（Karl Stein）7？

答 ➛ 我想應該是。我可能是從數學的史坦流形才知道他的名字。當然那時我並不清楚，我的數學資歷還不夠深。史坦上課非常優美。

在那裡也有 Übungen（演習課），我記得其他參與這個計畫的數學系學生知道得沒有我多，他們是從耶魯和普林斯頓來的。這個發現很鼓勵人，讓我了解密西根大學榮譽課程所學的東西眞的很好。我很感謝密西根大學。

問 ➛ 除了懷爾德之外，你還記得哪些對你而言很重要的密西根教授？

答 ➛ 我上過雷蒙德（Frank Raymond）的代數拓樸。雖然哈莫斯（Paul Halmos）當時在密西根，但我沒有修過他的課。

問 ➛ 那時沒有女教授？

答 ➛ 沒有，課上倒是有其他女生，現在我還認得其中一些人，像是寶拉切克（Harriet Pollatsek）和史密斯（Martha Smith）。密西根榮譽課程裡有少數女生後來繼續攻讀數學博士。有個理論認爲父親不會送有天份的女兒進入菁英學校，如果是男生故事就不一樣，因此密西根榮譽課程才會有一群很優秀的女生，我不確定自己贊不贊成這個理論。

不完美榜樣的價值

我（在布朗戴斯）的研究生階段有一些女同學，但我跟她們不很熟。如果常和女生窩在一起，很難在數學界出頭，這是不證自明的。人們經常說，因為我們是女人所以不能做數學。於是多少有一種不想和其他女生太友好的傾向。那時有很多公然而露骨的阻撓言論，但也有些微妙的鼓勵說法。很多人喜歡好學生，不

6 1953年，黎格在德國吉森大學（University of Giessen）取得博士學位，指導教授是卡諾德（Hans-Joachim Kanold）。他在1950～1951擔任美國數學學會的會長。黎格1963至1967年任教於慕尼黑大學。

7 1937年，史坦在德國明斯特大學（University of Münster）取得博士學位，指導教授是班凱（Heinrich Behnke）。史坦1955至1981年任教於慕尼黑大學，以他的複分析研究名於世。1990年，史坦獲得德國數學學會第一屆康托獎。

論男女，而我是很好的學生。我喜歡做不該我做的事情，這是某種對正統的反抗。就因為我們是女人，所以別人對我們沒有期待，任何東西只要做的不錯，就被認為是成功。[8]

問 ➤1964 年，你在密西根拿到學士學位。你何時開始考慮讀數學研究所？

答 ➤我是不得不讀。讀大學時我申請過 IBM 或貝爾實驗室的實習工作，卻都失敗。我常想如果當時成功了，人生可能很不一樣。我對教書沒有興趣，因爲人的事務很難應付！數學是我能做的事，所以就陷在裡頭了。我的研究所男友轉學去紐約大學，我忘了自己申請過哪些學校，但最後也去了紐約大學。部分因爲我母親曾在紐約讀大學，也因爲當時紐約大學對待女性有很好的名聲。

問 ➤凱瑟琳 ‧ 摩拉維茨（Cathleen Morawetz）在那裡。

答 ➤她是我唯一修過或旁聽過的女性教師。我得小心說明，因爲這對我很重要。在那個時候，我對她的印象並不深刻，還批評她的髮型衣服、上課風格，甚至她的數學。我對應用數學一向沒接觸，也不感興趣。所以我決心研究做得比我的榜樣更好，足以達成一些目標。多年之後，我認爲是這段歷程救了我。後來的我經歷一段顚沛歲月，我愈來愈稱許這位廣受尊敬的數學家，她不完美的課程、那一段時間的記憶支撐我能夠走下去。一個人不需要完美！一個人只是人而已。所謂榜樣可以有很多運用的方式。

在紐約大學，柏爾曼（Joan Birman）和我是同期的研究生，彼此認識。她的年齡比我大很多，已經有三個小孩。她在紐約市北區有間房子，我會到那裏吃午餐。我的室友叫安德森（Mary Anderson），她先生那時到高等研究院訪問一年，她在週間到紐約大學上課，週末則回普林斯頓。她後來取得數學博士，生活過得很美好。我們仍保持聯絡，對紐約大學有非常不同的回憶。

到紐約大學一年之後，我和在密西根結識的男友結婚，他是生物化學家，我也因此得到婚後姓 Uhlenbeck。

問 ➤他是物理學家喬治 ‧ 烏蘭貝克（George Uhlenbeck）的兒子。後來呢？

答 ➤由於我先生到哈佛，我們搬到波士頓。我有美國國科會（NSF）的研究生獎學金，對我轉校頗有助益。那時大概是 1967 年，就在俄國發射史普尼克人造衛星後不久。我的大學年代，有很多教育計畫鼓勵學生學習數學和科學，他們鼓勵所有人包括女性。

我轉到布朗戴斯大學讀研究所，甚至沒有申請麻省理工和哈佛。我不知哪來的直覺智慧，除了知道自己對女性相關的問卷提問不感興趣之外。我不想成爲卓絕的女人，這是種直觀感受，舉不出什麼可怕經驗來佐證。我只知道自己在那些地方會被孤立。布朗戴斯是規模小一點的學校，感

[8] 引自 <烏蘭貝克個人傳略>。

覺在那邊比較安全。這確實是事實，我認爲那裡的教授並不都很想見到我，其中很多人不想收或不肯定女學生。但我是夠好的學生，不管他們對女生該不該做數學有何看法，我大概都能輕易克服這個問題。

但是我和秘書從來都處不來！應付她們要困難許多。我記得我的職涯早期，由於必須和秘書相處，日子變得十分艱難。不過到了後期，尤其是在德州大學和高等研究院時，我獲得行政人員許多協助，時代眞的變了。

問➛妳在布朗戴斯的論文指導教授是帕雷斯。妳爲何找他當指導教授？

答➛這是我很有自覺的選擇，因爲他當時正參與一項新研究主題，稱爲大域分析（global analysis），運用拓樸解決分析問題，或反過來用分析解決拓樸問題。我研二時，研究無窮維微分拓樸可是件大事。麻省理工有一個我會去參加的討論班，每週五晚上都在探討這個新方向，我深受吸引。帕雷斯曾在高等研究院主持這方面的討論班，還出版了一本書討論阿提雅 / 辛格指標定理（Atiyah-Singer index theorem）[9]。我很有自覺的決定研究這門新數學，不想只是證明某些邊界值問題的小變化。

這個選擇很適切，因爲我是天生的分析學家，我的指導教授則是微分拓樸學家。他爲我架構問題，教導我不太在行的抽象思維。帕雷斯是一位很優秀的闡釋者，確實塡補我永遠無法自行習得的知識。而我則有能力查閱文獻，完成分析部分的技術細節，這部分他就不知道要如何處理。

問➛妳可以談談這些和艾爾斯（James Eells）與山普森（Joseph Sampson）研究的關聯嗎？

答➛艾爾斯與山普森做的是基礎性的工作。他們有篇論文用熱流法（heat flow）構作映到負曲率流形的調和映射（harmonic map）[10]。這是第一次有人眞的在這個架構中運用拓樸條件，其中負曲率和拓樸條件有關。他們的論文顯示在這個條件下，可以在任何同倫類中得到相應解，而且在很多情況，只要曲率負多一點，這樣的映射是唯一的。

這是連結拓樸與流形分析最早的論文之一。在論及這類連結分析和拓樸的概述型演講中，我也會另外將它歸功於博特週期性定理（Bott periodicity theorem），這是 1950 年代末的成就。博特的定理是以檢視測地線來探討拓樸性質，其中當然要用到分析。另一個例子是前述的阿提雅 / 辛格指標定理，將方程解空間維度和拓樸聯繫起來。

一樣基本的還有帕雷斯 / 史梅爾條件（Palais-Smale condition），史梅爾（Steve Smale）和我的指導教授帕雷斯全然獨立的各自發現這個條件。這個條件顯示摩爾斯（Marston Morse）所發展的莫爾斯理論也可以在無窮維實現。當時是 1964 年，我正開始讀研究所，整個領域正在發

[9] Richard Palais 編 Seminar on the Atiyah–Singer index theorem，共同作者 M. F. Atiyah, A. Borel, E. E. Floyd, R. T. Seeley, W. Shih and R. Solovay，Annals of Mathematics Studies，no. 57，Princeton University Press，1965。

[10] James Eells, Jr. and J. H. Sampson，“Harmonic mappings of Riemannian manifolds”，*American Journal of Mathematics* 86 (1964), 109–160。

展，連結了分析、拓樸和幾何。我很受這種介於事物之間的領域所吸引，那就像你在未來不可知的某地跳船一樣。

問 ▸ 在獲頒史提爾獎（Steele Prize）的回應中，妳說在布朗戴斯時正逢大域分析的熱潮，但後來這個領域就退燒了，這是怎麼回事？

答 ▸ 這項研究主題曾有一年左右非常火紅，卻沒出現了不起的結果。大概十年之後，它以幾何分析（geometric analysis）之名捲土重來，數學家如丘成桐開始證明出重要定理。這並不是一條平順的道路，1960 年代人們心中想的東西，到了 70 和 80 年代才開花結果，中間並不怎麼受矚目。

我應該補充一些那段期間的生活。我的公婆住在紐約，我們經常拜訪他們。我的公公是物理學家，從密西根大學轉到洛克斐勒大學任職，他扮演被我逗樂與鼓勵我的雙重角色，能理解學術家庭的觀點很有趣也很有用。我很珍視他們，因爲我並非出身書香門第，甚至連更寬廣的知識分子生活圈也不算。我的公婆認識各地學術圈的各類學者。我的婆婆也教我烹飪。我從母親那裡連基本煮個飯都學不到，畢竟她不認爲烹飪是門藝術。我的公婆對我來說很重要。

問 ▸ 妳說公公被妳逗樂，也鼓勵妳。逗樂的意思是……？

答 ▸ 我想他很欣賞我的獨樹一格，喜歡用他很不熟悉的方法做事。

問 ▸ 有些人碰到這種事反而會心生嫌惡。

答 ▸ 沒錯，但我公公沒有。

問 ▸ 他的妻子不是學術圈的人？

答 ▸ 不是。他們是荷蘭人，卻都在印尼長大。他們曾在世界各地遊歷。能遇到這樣不同背景的人眞是令我大開眼界。

問 ▸ 拿到博士學位之後，妳到麻省理工教書。1969 到 1971 年，又在柏克萊待了兩年。妳對當時的柏克萊有什麼印象？

1969 年烏蘭貝克於柏克萊。（George Bergman 攝，MFO）

答 ▸ 政治！越戰！也學到很多數學。

問 ▸ 當時在柏克萊數學系的人，妳還記得誰？

答 ▸ 很有趣的是一位老先生叫陶比（Abraham H.

Taub）⑪。他是數學物理學家，我跟他學量子力學，跟他的同事沙克斯（Ray Sachs）學廣義相對論，也學了一點量子場論，可惜因柏克萊示威關校而中斷。我對陶比印象深刻，他研究激震波（shock wave）與流體力學，也在伊利諾大學建造世上第一部電腦時扮演過關鍵角色，他後來轉職到柏克萊。我對如何運用典型分析工具研究如激震波的現象很感興趣，對陶比的研究廣度非常欽佩。

在柏克萊時，我沒有很多人可以一起討論。我做了一些關於特徵值和特徵函數的工作，也研究勞倫茲幾何亦即時空的幾何。這些研究並不是別人的點子，而是我偶然想到的。但是沒有人對這些研究感興趣讓我有點沮喪！我不是要挑剔，畢竟當時的氛圍如此。在柏克萊的最後一學期，我去聽了史梅爾的天體力學討論班，這門課結束時，我力學已經學得很好了。

問 ➛ 柏克萊之後，你在 1971 年到伊利諾大學厄巴納 / 香檳分校任職。妳和先生都拿到那裡的教職。

答 ➛ 我們是密西根大學的大學生，也都很喜歡那裡。我們以爲伊利諾和密西根應該大略相似。但不知道爲什麼，關於我的職位總有雜音。那裡的人似乎很樂於告訴你本來不該拿到這個位子。

問 ➛ 是說妳資歷其實不合格？

答 ➛ 沒錯。他們說他們那年想提供許多工作機會，最後卻只能發出一個，暗示學校行政單位在中間不知道做了什麼事情，這或許是眞的。

當時有四、五個系上教授的妻子在數學系教書，但並不參與研究討論班。系上還有一位女教授哈姆斯聰（Mary-Elizabeth Hamstrom）⑫。

問 ➛ 妳在香檳過的並不快樂。

答 ➛ 很難說我是因此不快樂，還是婚姻出現問題，抑或其他事情。不過我在數學上確實說不上如魚得水，和柏克萊相比有很大的變化。雖然我不記得在柏克萊曾跟許多人談數學，但至少我有更多人可以談。或許是年齡的問題，伊利諾的教師很少落在我的年齡層，和我同背景的更是一個也沒有。

當時數學系教師的妻子扮演休閒娛樂的功能。多年之後回伊利諾訪問時，系上不再有派對，因爲妻子都工作去了！不過在我的年代，系上的男女楚河漢界，截然有別。那種氣氛讓我快窒息，因爲直到那個時候，我的學術經驗一直能逃脫那種被拘禁的感覺。

從映射正則性到最小曲面

（蕾絲莉．希貝納是）一個典型的女性案例，她是研究做得很好的數學家卻不被認可。她待

⑪ 1935 年，陶比（1911 ～ 1999）在普林斯頓大學取得博士學位，指導教授是羅伯琛（Howard P. Robertson）。他是 1952 年在伊利諾大學建造 ORDVAC 電腦研究群的首席數學家。1964 ～ 1978 年，他在加州大學柏克萊分校任教 563。

⑫ 1952 年，哈姆斯聰（1927 ～ 1999）在德州大學奧斯丁分校取得博士學位，指導教授是穆爾。1966 年，她成爲伊利諾大學文理學院四名女性正教授中的一員。

在技術學院工作，唯一的好處是她能不斷收到好研究生，但她的待遇過低，教書負擔又太重……數學家想要真正成功，必須被保護，絕對沒有其他可行的方法。我一直在思考這個問題。[13]

答 ➤ 我在香檳時一定經常旅行，不知道是怎麼做到的，但想必如此。我和蕾絲莉 ‧ 希貝納（Lesley Sibner）變得十分友好，她當時在位於紐約布魯克林的理工學院教書 [14]。我第一次見到她是在義大利迪里耶斯提（Trieste），那是 1971 或 1972 年的某個學術會議。我參加了某個主題我略知一二的演講。由於我根本不認識蕾絲莉是誰，本來以爲會是某個男士站起來說話。結果登場的是一位身著絨面紫色套裝的女士，帶給聽眾一場優美的演講，還是我熟悉並感興趣的內容。見到她我很興奮，很快成爲好友。我到紐約相當多次，每次都期待見到她和她的先生羅伯 ‧ 希貝納（Robert Sibner），他是任教於紐約城市大學的數學家。蕾絲莉是非常卓越的女性，她本來研習表演藝術，稍晚才轉入數學領域。蕾絲莉是非常好的數學家，也是很精彩的人。

問 ➤ 妳和她合寫過論文嗎？

答 ➤ 我們認識 10 年後合寫過一篇 [16]，當時我已經在德州大學奧斯丁分校。

問 ➤ 妳在 1976 年和先生離異並轉到伊利諾大學芝加哥分校。妳覺得那邊的氣氛比香檳好多了。

答 ➤ 沒錯，我在那邊過的很舒服。我從隔壁研究室的梅瑟（Howie Masur）學到一些泰希穆勒理論（Teichmüller theory），在我嘗試理解瑟斯頓的研究時派上用場。

問 ➤ 在伊利諾大學芝加哥分校時，妳和薩克斯（Jonathan Sacks）合寫了一篇論文 [17]。

答 ➤ 薩克斯到香檳時是博士後，並開始和我討論。我對最小曲面了解不多，不過我們一起討論，一起做研究。他引入最小曲面的知識，而我提供主要的點子，其實那只是複分析裡的簡單想法。我們合寫了一些文章。有好幾年我們十分親近，然後才失去聯繫。

問 ➤ 妳剛提到主要點子是借用複分析的想法，大致上是什麼？

[13] 引自 Claudia Henrion 著《數學中的女人：差異的總和》（Women in Mathematics: The Addition of a Difference），Indiana University Press，1997。

[14] 1964 年，蕾絲莉（1934 ～ 2013）在紐約大學庫朗學院取得博士學位，指導教授是博爾斯（Lipman Bers）和摩拉維茨。她的職涯一直是布魯克林理工學院（Polytechnic Institute of Brooklyn）[15] 的教授。

[15] 譯註：1985 年改稱理工大學（Polytechnic University）取得大學資格，2014 年改隸紐約大學，現名紐約大學坦登工程學院（New York University Tandon School of Engineering）。

[16] Lesley Sibner, Robert Sibner, Karen K. Uhlenbeck，"Solutions to Yang–Mills equations that are not self-dual"，*Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.* 86 (1989), no. 22, 8610–8613。

[17] Jonathan Sacks, Karen K. Uhlenbeck，"The existence of minimal immersions of 2-spheres"，*Annals of Mathematics* (2) 113 (1981), no. 1, 1–24。另一篇相關的論文是 "Minimal immersions of closed Riemann surfaces"，*Transactions of the American Mathematcal Society* 271 (1982), no. 2, 639–652。

答 ➛ 就是把問題變換尺度（rescaling）的想法。如果問題和尺度無關，就可以將它炸開（blow up），在不同的尺度檢視。

問 ➛ 這個變換尺度的想法就是你們在文章中稱為「吹泡泡」（bubbling）的過程嗎？

答 ➛ 是的。

問 ➛ 為什麼叫吹泡泡？

答 ➛ 假設有一個 $\mathbb{R}^2$ 上的問題，必須考慮某特殊點。如果把它的周邊小圓盤放到很大，結果發現那一點裡面隱藏一個球面的映射，那就像一個泡泡。其他種類的問題也可能有泡泡現象，不過通常都必須具備某種尺度不變的性質。

問 ➛ 後來妳在楊 / 米爾斯方程（Yang-Mills equations）中也運用了泡泡想法，是嗎？

答 ➛ 是。尺度不變問題的行為都很類似。另一個我當時並不知道的是山邊問題（Yamabe problem），它也是尺度不變的。許多純幾何問題都是尺度不變的，也就是說，如果你有個想尋求某種度量（metric）的問題，若問題本身沒有先天的外部尺度，就可以變換原先檢視的尺度。

問 ➛ 談談妳和薩克斯研究的問題。

答 ➛ 就概念而言，這是尋找最小曲面的問題。我從未學過最小曲面，而且到現在依然不懂使用幾何測度論（geometric measure theory）的費德勒 / 弗萊明（Federer–Fleming）研究理路。另一種研究策略，則是藉由保角參數化來尋找。問題是這些保角參數和尺度無關。也就是說，如果你寫下表現局部最小曲面的 $\mathbb{R}^2$ 區域上的積分，那麼如果你變換 $\mathbb{R}^2$ 區域的尺度，你事實上還是會得到相同的答案。這是一個變分學的問題，而我在研究所時已經學了很多變分學。其中的想法是寫下可產生最小曲面的能量函數，再做非保角小擾動，這樣可證明它滿足帕雷斯 / 史梅爾條件，因此就可運用摩爾斯理論。這種情形有很多臨界點。然後我們讓擾動趨近於 0，這時雖然有些地方不收斂，你就在這些地方變換尺度，一直到有結果出現為止。

變換尺度得到的是一個 $\mathbb{R}^2$ 上的映射，映到你想尋找最小曲面的流形。重點是因為這個積分是保角不變，因此無法分辨 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{S}^2$，於是你雖得到 $\mathbb{R}^2$ 上的映射，但也可想成 $\mathbb{S}^2$ 上帶著一個奇點的映射。接著就是正則性定理（這也是我在博士論文研究的題材），如果一個從球面映到流形的映射滿足調和映射條件，則我們其實可以填補這個奇點，並證明新映射在這一點是正則的。以上這些是我 40 年前的工作，現在已經是標準技術了。

在當時，我只和少數的數學家有聯絡。我是在布朗戴斯拿到博士，不是哈佛、麻省理工或柏克萊。就算我在柏克萊或麻省理工時，我也幾乎沒和別人合作過。就某種意義而言，這很值得，因為我並不知道別人如何看待最小曲面。因此當薩

克斯教我這個問題時，我心裡並沒有什麼既定成見，所以才能以自己的方式研究。

問 ➤ 這算是好處。

答 ➤ 這絕對是一種好處。我有好幾個問題，研究背景都是不知道其他人發展了什麼想法。

問 ➤ 妳和薩克斯的研究比起妳以前的研究更幾何嗎？

答 ➤ 是的，更幾何，這得感謝薩克斯。

有件事我應該說一下。當我是研究生時，碰到一個技術門檻非常高討論映射正則性的問題，它的頂階項具有惡劣的非線性特質。這是我論文的一部分。我所探討的不是能產生如最小曲面方程的積分，而是有點不同的積分項。我證明這個問題有摩爾斯理論機制，現在通稱爲 p 調和映射。困難在於它們只是在某巴拿赫空間（Banach space）中的弱解，並無光滑性。有好幾年，我一直孤自研究這個問題。它的緣由是這樣的，我讀了一些橢圓型偏微分方程的論文，然後在我應該是第一個參加的學術會議中碰到莫澤（Jürgen Moser）[18]。他給了我好幾篇研究預印稿，探討後來被稱爲莫澤迭代格式（Moser iteration scheme）的方法。我的研究就是從遇到莫澤以及閱讀他給我的論文開始。那是我做過最困難的數學問題 [19]。

結果丘成桐注意到那篇文章，邀請我去訪問他，他當時在史丹佛大學。我訝異極了，因爲從來沒有任何人問起這篇文章，我也從來沒跟別人談過。於是我應邀與丘成桐和賽門（Leon Simon）討論，也見到他們的研究生孫理察（Rick Schoen）。我甚至不確定自己現在能不能讀懂那篇文章，那眞是一篇非常艱澀、非常技術性的論文，我爲那個問題耗盡心力。我用了好幾年的時光研究，一年是麻省理工的講師時期，兩年在柏克萊。這就是我和丘成桐美好關係的開始。

問 ➤ 在這篇論文裡有大域分析的影子嗎？

答 ➤ 沒有，內容是單純的偏微分方程，不過動機的確來自大域分析。我有一些滿足摩爾斯理論的泛函，想要證明對應的臨界點映射確實是正則映射，亦即它們不會太不連續。就某種意義，這正是延伸到最小曲面論文的部分。目標是尋找二維最小曲面，而我們想要極小化的狄利克雷積分（Dirichlet integral）幾乎滿足帕雷斯 / 史梅爾條件。因此只要加入小小的 ϵ 項，就能滿足帕雷斯 / 史梅爾條件。因此想法就是進行小擾動，然後檢視擾動趨近於零時發生的現象。

所以，我的最小曲面研究源自這個非常技術性的偏微分方程問題，這是當我研究大域分析時就無意中被捲入的研究。其他好幾個也在研究大域

[18] 1952 年，莫澤（1928 ～ 1999）在德國哥廷根大學取得博士學位，指導教授是雷里克（Franz Rellich）。莫澤的職涯大部分都待在紐約大學，並擔任庫朗研究所的所長，然後他轉職到蘇黎世聯邦理工學院（ETH），並出任數學研究所（Forschungsinstitut für Mathematik，FIM）的所長。1983 ～ 1986 年，Moser 擔任國際數學聯盟（International Mathematical Union，IMU）的主席。

[19] Karen Uhlenbeck，"Regularity for a class of non-linear elliptic systems"，*Acta Mathematica* 138 (1977), no. 3-4, 219–240。

分析的研究生，繼續做更抽象的問題，而我則是繼續做很技術性的東西。但是既然我的訓練是拓樸 / 幾何觀點，自然也能處理拓樸問題。雖然如今的我去聽拓樸演講時總是會感覺迷失。

改變幾何的面貌

目前只牽涉到物理學家的楊 / 米爾斯方程故事，下一步主要發展來自數學家！阿提雅 / 辛格指標定理可用來計算楊 / 米爾斯方程解空間的維度，數學家有些事情可以告訴物理學家，就在這一刻數學和物理社群的關係開始轉變。在此，雙方的合作和交匯真正開始。

我不知道如何描述這一切所造成的差異有多麼巨大，數學在科學社群內的位置全面改變了，數學家真的有些東西值得大家聆聽。[20]

問→怎樣的問題吸引妳？一個問題必須具備什麼特性才會攫取妳的注意？

答→問題得結合相當程度的具體，因此我可以理解具體的例子，以及能連結許多其他概念。例如我們可以看到最小曲面方程的分析面，但也意識到它和其他幾何問題的關聯，而不僅止於分析。我誠然很著迷於這種理念：數學具有許多不同面相，其間又存有內在連結。

問→有許多分析問題來自物理學。

答→我對這一點印象很深刻。我感覺數學家在某種方面並不是很有創造力的思想家。數學家拿到一個想法，就會把它挖掘到底，不斷往前推廣。但是對大部分鑽研這個問題的人來說，問題背後的想法卻消失了。

問→物理學家更有原創性嗎？

答→他們想的絕對很不一樣，但是我從來都無法理解他們看待問題的不同方式。數學在尤其過去 50 年，非常受益於外部的想法，但是卻缺乏內在的自我發展。

我收回這句話。數學不同領域也會影響彼此，例子如朗蘭茲綱領（Langlands Program），還有偏微分方程的機率法。重點是數學不是一部機器，你只要寫下定義、定理、證明，再加上一個例子就可以。數學比這些有趣多了。

如果我再年輕一點，會很有興趣學習更多非核心數學的東西，更多連結到其他領域的數學。

問→妳心裡有什麼想法嗎？

答→例如電腦科學還有生物學中的所有東西。

問→還有物理學？

答→這我試過了。我想試試不同的方向。不管怎樣，

---

[20] 引自 2012 年 2 月 Karen Uhlenbeck 在天普大學（Temple University）的 Emil Grosswald 講座〈規範場論方程〉（Equations of Gauge Theory）由 Laura Fredrickson 筆記。

物理想法所導致的數學概念總是很有趣，只是多半行不通。物理學家對於構造想法的標準比較寬鬆。

問 ➤1970 年代末，你去聽了阿提雅（Michael Atiyah）在芝加哥大學的演講。

答 ➤阿提雅在芝加哥大學給了四場演講，內容是關於楊 / 米爾斯方程和規範場論（gauge theory）。

問 ➤這是妳開始對規範場論發生興趣的時刻嗎？

答 ➤是的。大部分數學家對此一無所知。關於纖維叢（fiber bundle）有兩本教科書，其中一本作者是史丁洛（Norman Steenrod），另一本是赫斯穆勒（Dale Husemoller）[21]。兩本書都很抽象。物理學家常來找我們詢問他們該如何學習，我們就只能提供他們這兩本抽象教科書，其中的語言對他們無疑太困難，對於想學的數學家都夠難了，更何況是物理學家。

問 ➤楊 / 米爾斯方程是物理學家發現的，這不是數學家會自行研究的東西。

答 ➤數學家或許可以，但卻沒能做到。畢竟數學家已經掌握所有的工具，但這不是他們思考的對象。

問 ➤爲什麼不？

答 ➤我還眞希望知道爲何或是什麼讓數學家和物理學家有這樣的差異，他們看待事情的背後有不太一樣的脈絡。我一直在研究變分問題。以楊 / 米爾斯方程爲例，這個二階方程源自一個變分問題的解，這是很自然的，很容易可以處理。但後續有一個一階方程，就需要一些拓樸資訊才能理解。對大部分數學家解釋這種事情，他們很快就能理解，並不是什麼神秘的東西。

我記得做完畢業論文後，帕雷斯鼓勵我去探討楊 / 米爾斯方程。當時我對纖維叢一無所知，必須從頭學習聯絡（connection）和曲率的意義。但是我有興趣，也做到了，我可以從分析的角度理解這個問題。於是我開始研究其中比較明顯的問題，也就是規範變換（gauge change），以致我可以掌握其中的分析特性。

1979 ～ 1980 年，我到高等研究院參加丘成桐籌辦的幾何年。當時陶布斯（Cliff Taubes）還是哈佛的研究生，他的女友在普林斯頓，後來成爲他的夫人。陶布斯到普林斯頓待了一陣子和我一起討論。他說的第一件事是「告訴我一些變分法的東西。」而我告訴他的第一件事是「變分法做不到你想要的東西」這大概就是專家能夠給新手的最好忠告：不，你想做的並不是這件事！這就是我和陶布斯長久友誼的開場。

問 ➤妳剛說學習規範場論時，提到分析面的「明顯問題」，可以談談那個問題嗎？

答 ➤我記得當時問別人規範場論是什麼，答案是：

[21] Norman Steenrod，*The Topology of Fiber Bundles*，Princeton University Press，1951；Dale Husemoller, *Fibre Bundles*，McGraw-Hill，1966。

在交換叢（阿貝爾叢，abelian bundle）時，它只是赫吉理論（Hodge Theory）的特例。聯絡的定義具有某種模糊性，容許某種變換。這種情況很像流形上覆蓋一塊塊的坐標域，你得定義不同坐標域間的變換。在廣義相對論寫下度量時也有很大的模糊性，我們在某坐標域寫下度量，然後將它轉換到另一個坐標域，這種轉換比規範場還複雜。比起廣義相對論和黎曼流形上的方程，規範場論無疑是更簡單的問題。

最開始思考規範場論這些問題的是幾何學家，做偏微分方程的人並不把這些當作領域中的面向。接著是卡拉比猜想（Calabi conjecture）被解決了，其中討論的是流形如何在正確拓樸條件下找到匹配的度量條件，這是丘成桐在 1977 年完成的 [22]。在流形上眞的有可解的偏微分方程，喚醒這個事實的過程其實很緩慢。

流形是一堆點，可以賦予坐標，但坐標可以改變，因此寫下流形上的偏微分方程，就必須理解方程如何隨坐標轉變而變換。艾爾斯與山普森的研究總被認爲是最根本而基礎的突破之一，因爲他們眞的求解流形上的幾何方程，不過他們運用的是熱方程法，和大家學的橢圓方程相似，並沒有運用坐標。他們提供的是一個可以應用的新數學想法。關於何謂幾何的觀點有非常大的變化，物理學家需要數學解答的問題的確是促進這些改變的原因之一。

問▸妳剛提到丘成桐在高等研究院籌辦幾何年，在當時他對妳來說是一個重要人物。

答▸我看得出他很讚賞我的數學。他了解我在做什麼，而且他很誠摯地認爲我是一個好數學家。其他數學家給我的鼓勵比較像是父親對女兒，但是丘成桐不一樣。我非常感謝他，因爲它讓我感覺自己是眞正的數學家。他那時已經發表一系列很傑出的文章，每篇都有新想法，我覺得他是一位了不起的數學家。

問▸因此當他認爲你是好數學家時，對妳意義重大。

答▸是的，非常重要。這和因爲聰明而鼓勵我很不一樣。

規範場論：領養的小孩

規範場論如何在短短幾年內成功成為數學界注目的理論？基本的數學素材早已到位（纖維叢、向量叢、聯絡、陳 / 威伊理論〔Chern-Weil theory〕、狄拉姆上同調群〔De Rham cohomology〕、赫吉理論）。以後見之明來看，楊 / 米爾斯方程只是等著被發現而已。但是數學家自己卻不能發明它，規範場論是我們領養的小孩。 [23]

問▸妳的規範場論研究，爲後來許多發展奠立分析

[22] 丘成桐，“Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry”，*Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.* 74 (1977), no. 5, 1798–1799。

[23] Karen Uhlenbeck，“Instantons and their Relatives”，*Proceedings of the AMS Centennial Celebration*, August 8–12, 1986, AMS, 1992。

基礎，包括多納森（Simon Donaldson）的工作。

答 是的。在一個小鄰域內經常可以選擇某規範場，這相當於叢坐標的選擇，這時一切都很容易理解。從偏微分方程的角度，我們很清楚必須提出額外方程，藉由選取正確的坐標得到眞正的方程。有一個我奮鬥很久的問題是如果一個聯絡的曲率有界，我希望在某種坐標的聯絡也有界。結果證明如何達成這項目標的論文仍然是我影響力最大的文章之一 [24]。事實上，這篇文章並不困難，但是要拿捏其中的點子很難，足足花了我好幾年才想出證明。

問 妳是如何得到這個想法的？

答 我就是猛把頭往牆上撞啊。我想丘成桐解決卡拉比猜想的證明可能有些模糊的影響。我證明的方法是給曲率增加條件，證明曲率有界的聯絡空間大概是某個大小，然後說明它同時是開和閉的（open and closed）。這是偏微分方程中的連續法（continuity method）。如果想解一個方程，先給問題某個拓樸，然後證明在這個拓樸之下，方程的解空間在除去其他條件之後是開和閉的。

連續法可能是非線性分析中最基本的技巧，也可能是最有價值的方法之一。說起來很有意思，因爲非線性分析充斥著華麗的東西像是阿提雅 / 辛格指標定理，各種華麗的拓樸，各種華麗的固定點定理。但事實上該學的第一件事是連續法，也就是解空間是開和閉的。

問 這是概念上很簡單的東西。

答 簡單到解決問題時常會被忽略。

問 妳獲得 2007 年史提爾獎時，這篇論文是得獎因由之一，其他的還有什麼？

答 另一篇是關於可移除奇點 [25]。這是一個很有趣的問題，是物理學家開始研究的。他們在 $\mathbb{R}^4$ 中計算出楊 / 米爾斯方程的解，而且有辦法說明那些解可以連續延伸到無窮遠。這些方程稱爲保角不變（conformally invariant），意思是說，如果在 $\mathbb{R}^4$ 取一個解，則在做完坐標保角變換（基本上是在四維中將 x 送到 $1/x$ ）之後仍然會得到原方程的解。問題是每次你在 $\mathbb{R}^4$ 寫下一個方程，是否總是可以連續延伸到無窮遠，這個問題懸而未決好多年。

問 這就是妳在這篇論文中解決的問題。

答 對。我現在已經知道有非常簡單的證明，有了額外的工具，事情會變得簡單多了。

問 所謂的「烏蘭貝克緊緻性」（Uhlenbeck compactness）出現在這兩篇論文中嗎？

[24] Karen Uhlenbeck，“Connections with L^p bounds on curvature”，*Communications in Mathematical Physics* 83 (1982), no. 1, 31–42。
[25] Karen Uhlenbeck，“Removable singularities in Yang–Mills fields”，*Communications in Mathematical Physics* 83 (1982), no. 1, 11–29。

答 ▸ 是的。烏蘭貝克緊緻性在二維和三維比較容易描述：如果曲率平方的積分有界，就能構造出一個弱收斂的子系列。如果函數範（norm）有界，那在分布意義下構造弱收斂子系列幾乎是廢話。但是在規範場論時，我們得先調整規範限制，此時收斂性並不易證明。這個性質在四維方程解最重要，但是也經常用到其他情況。如果有四維的方程解，而且在某鄰域內曲率夠小，就能構造出收斂的子序列。如果問題中的泛函類似四維的楊 / 米爾斯泛函，而且方程解有界，那麼運用計數論證（counting argument），就可證明有一個子序列會在有限點之外收斂。

這也是前述最小曲面問題解的一部分。也就是假設做了擾動，再檢視其解的極限，它們會在一組有限點之外收斂。而在那些點旁邊，你可以將這些點炸開，這種現象同時存在於楊 / 米爾斯場與最小曲面。這種論證方式在現在的偏微分方程領域內已經是家常便飯。

緊緻性論證主要用於求解偏微分方程的情境，你想要知道何時解會存在，你必須知道解空間是緊緻的且有可辨識的邊界。多納森定理中我貢獻的部分是證明解空間是緊緻的，並且邊界必須具備某種形式。陶布斯接著證明這樣的邊界確實存在。我最驚訝的是，現在這種構造幾何不變量技術的應用比比皆是。這種「新穎」的觀點拒制了老一輩數學家，而年輕數學家視之為「眾所周知」的接受它，而且更有信心的運用這項技術。

問 ▸ 當妳聽到多納森的博士論文結論時有何感想？

答 ▸ 那可真是出人意表。多納森當時還是研究生，如果他更世故一點，可能永遠無法想像可以做出這樣的結果！我印象非常深刻。給定了這些工具，對我或領域研究者如陶布斯老說，這並不算是困難的定理。但多納森的過人之處，是把這些東西擺在一起，而且真的得出結果。我甚至不期待自己能做出這個結果，因為太跳脫我的思考了。

問 ▸ 妳和弗里德曼（Mike Freedman）在柏克萊的數理科學研究所（Mathematical Sciences Research Institute ，MSRI）籌辦了長達一學期的討論計畫，目標就是研究多納森的結果。

答 ▸ 是的。那一年我認識了弗立德（Dan Freed）。他協助籌辦了很多事，而且非常積極的寫下這些演講的筆記 [26]。我們從此成了朋友。

一整個學期，有許多人來參與討論班。就某種意義而言，這項主題隨著學期的推進而變得明白易懂，因為主要困難是分析和拓樸的先備知識。一旦你將所有東西整合起來，證明本身其實非常清晰優雅。所以問題不在於材料愈來愈難，而是因為能掌握所有技術的人非常少，你必須懂分析又必須懂拓樸。

我立即理解多納森的證明。唯一的問題是我不知道怎麼證明他構造的解空間是可賦向的（orientable）。在數理科學研究所那段時間，我

[26] Daniel S. Freed and Karen K. Uhlenbeck，*Instantons and four-manifolds*，Mathematical Sciences Research Institute Publications，1，Springer-Verlag，1984。

爲模空間（moduli space，按：即解空間）找到自己眞的喜歡的賦向方法！結果原來方程解本身就給定典型賦向，這個想法可以從有限維推廣到無限維。

問 ➛ 那是 1982 年的事，那時妳還在伊利諾大學芝加哥分校任教。MSRI 之後的下個學期你待在哈佛大學。

1982 年烏蘭貝克於柏克萊。（George Bergman 攝，MFO）

答 ➛ 是的。那段時間我和陶布斯變得很熟。我很喜歡那段時光，我從來沒有機會教研究所的課程，我覺得很困難，必須花了很多小時準備。

問 ➛ 妳在伊利諾大學芝加哥分校沒有教過研究所？

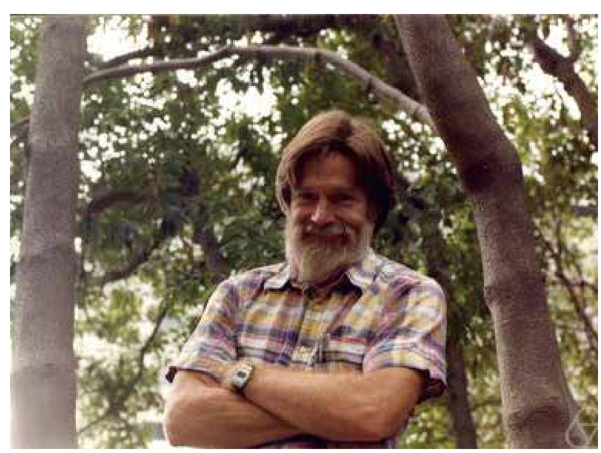
答 ➛ 沒有，是我不想教。那裡沒有學生學我研究的這種拓樸和分析。我可從來沒想過要上一種沒有人知道我在說什麼的課。

問 ➛ 這是 1983 年妳轉到芝加哥大學的原因之一嗎？

答 ➛ 是的。轉到芝加哥大學是因爲我想要收博士生。結果很棒，我很快就有一些很好的研究生。我的薪水也增加很多！不過這不是主要原因。

問 ➛ 但是你並沒有在芝加哥待很長。

答 ➛ 沒有。因爲通勤比較麻煩。當時我住在艾凡斯頓（Evanston），我先生（威廉斯〔Robert Williams〕）是西北大學的教授。我在伊利諾大學芝加哥分校有更多人可以談，我從來沒有在芝加哥大學這種地方待過，那是一個非常菁英的所在。每個人都自我感覺非常良好，我感受到很大的壓力，可能是人生第一次。那裡的研究生，尤其是女學生，讀書生活很掙扎。



1982 年威廉斯於柏克萊。（George Bergman 攝，MFO）

答 ➛ 丘成桐當時在高等研究院，他的妻子在聖地牙哥有工作，她不想住在紐澤西，因此丘成桐設想了一個宏大的計畫，想要在加州大學聖地牙哥分

校建立一個幾何研究群，他找了很多人，包括我、孫理察、漢米爾頓（Richard Hamilton）、賽門等。我在聖地亞哥待了一個冬天，當地高山不遠可以滑雪，我也上了衝浪課，雖然我當時幾乎 40 歲！我已經準備好搬到聖地牙哥去，但是整件事情卻功虧一簣，也許這樣的計畫註定失敗。我們並不清楚，湧入一幫人聖地牙哥每一個人會不會高興。那大概是 1986 年的事。

問➜弗里德曼不是到聖地牙哥去了？

答➜他已經在那裡了，漢米爾頓也在那裡，而且待了好幾年。重點是我已經同意離開芝加哥，雖然沒還有簽署任何東西，但我已經決意離開。我之所以轉到德州大學動念於此。那段時間德州大學正試著聘任大人物，蘇利文（Dennis Sullivan）和丘成桐都曾經在德州待了一個學期。他們邀請了很多人去訪問，也造成很大的困擾。我想我被這種求變的氣氛所吸引。我的先生在奧斯丁長大，家也在那邊。這雖然不是理由，但顯然是正面的理由，不會有很多人必須因此遷到那裡。對我來說這好像冒險。另外物理系的溫伯格（Steve Weinberg）和史溫尼（Harry Swinney），以及數學系的高登（Cameron Gordon）對我和我先生都有很大的吸引力。

我實在受不了芝加哥的通勤生活。當我在伊利諾大學芝加哥分校時，每天往返火車站可以散步一小時，又可以在火車上做事。但是到芝加哥大學就有開車的問題。如果我花了一早上開車上班，就想要留在學校，但是深夜開車很危險，尤其是冬天中間。我是戶外型的人，並不想住在海德公園（Hyde Park，按：芝加哥大學所在），我們在艾凡斯頓的家有一個大院子。同時，和我友善的兩個芝加哥教員瓊斯（Peter Jones）和波納（Jerry Bona）都離開芝加哥了。這顯然也影響我的決定，他們雖然和我不同領域，但已經近得可以相互討論。

為何 KdV 到處出現？

> 基於如今大家對於知性刺激的沈迷，我試著跟隨物理以韋頓（Edward Witten）之名對幾何學的影響。我在可積系統的研究就源自和物理的這項連結。[27]

問➜妳如何對可積系統產生興趣？

答➜就一瞬間的事，因爲可積系統在物理的保角場論中占有重要地位。我的確學了很多可積系統，在這個領域做研究，不過我的動機是爲了解物理現象，不過沒有成功。當然這不表示我不享受研究這個題目。我的朋友滕楚蓮和我在可積系統寫了一些很好的論文。她和我的論文指導教授結婚，因此我們相識很久了。雖然她生於台灣，在那裡成長，但我們共享許多興趣和經驗。我們一起做研究到現在已經好幾年了，我們的合作有部分

[27] 引自烏蘭貝克對 2007 獲頒美國數學學會史提爾獎的回應，見 *Notices of the AMS*（2007 年 4 月）。


2009 年帕雷斯與滕楚蓮於德國上沃爾法赫數學研究所。（Ivonne Vetter 攝，MFO）

也和「數學女人」（Women in Math）計畫有關。

從 1990 年代開始，我開始涉入許多非數學的事務。我是開創帕克市數學所（Park City Mathematics Institute，PCMI）的少數人之一。我和弗立德成爲好友，他也轉職到德州。弗立德當時很年輕，精力十足，想要參與所有這類事務，所以他慫恿我一起參與 PCMI 計畫。

透過 PCMI，我開始參與女性議題。過去我從未接觸這些討論，因爲我對政治不感興趣。但就在某一剎那，我意識到我在這兒，40 幾歲，很成功，但是所有女人在哪裡？我們這些女數學家總這麼想：是啊，日子是有點難過，大家對我們不怎麼友善，但是事情總會改變。但是在 1990 年代早期，我這個年代的很多女人都面臨一個關口，發現自己是系上聘任的最後一個女性。我們的後面看不到許多女性。我覺得我的成功總有所虧欠，於是滕楚蓮和我開始研究可積系統的同時，也開始推展「數學女人」計畫。它本來是 PCMI 的夥伴計畫，後來由高等研究院接續與支持。滕楚蓮和我一起做數學，也一起籌組「數學女人」的活動。

問➛兩者一起進行很好。

答➛是啊！我的動機來自數學中我認爲的謎團：爲什麼 KdV 如此遍在 [28]，各種幾何和物理問題中都可以發現。

問➛爲何如此，妳有任何線索嗎？

答➛還不清楚。我唯一的揣想是，它是無限維環面（torus）上的自然構造，因此出現在很多地方，只要問題中有無限多可交換的變數，多少涉及某個環面的結構。另一個可能是一旦成爲數學模型，它就能在某段時間內用來解釋計算出現的模式。一旦它不再適用，就會再找到或發展更有用的模型。我們永遠不要忘了，數學和以它爲模型探討的現象是不同的。

問➛談談妳和滕楚蓮在可積系統上的工作。

答➛我們對於各種幾何偏微分方程如 KdV、sine-Gordon 等的散射理論（scattering theory）和逆散射理論有相當的理解。我們發現與其去談大量複雜公式，其實大部分構造之下都存在黎曼 / 希爾伯特問題（Riemann-Hilbert problem），我們能給出像維拉索羅代數（Virasoro algebra）和函數這類東西的定義（這給我們一種幾何的愉悅），於是就能夠運用矩陣函數的分解，得到許多文獻

[28] 譯註：KdV 方程（Korteweg-de Vries equation）是 1895 年荷蘭數學家科特韋格（Diederik Korteweg）和德維茲（Gustav de Vries）重新發現的偏微分方程，是淺水表面的波模型，可用逆散射轉換求解，是少見確切可解的偏微分方程，其解稱爲孤立子（soliton）。

挪威國王哈拉爾五世（Harald V）和烏倫貝克於2019年阿貝爾獎頒獎儀式的合照。（Trygve Inderlid/NTB scanpix）

中記載的許多構造。

滕楚蓮是一位古典幾何學家，不是偏微分方程專家，她了解很多這些方程所描述的幾何曲面與幾何子流形構造。而我的研究動機則來自這些方程出現在量子場論。這兩種觀點有助於我們的研究。

問 ➛ 哪個數學領域使妳覺得「早知道我就去研究這些」？

答 ➛ 代數幾何。當我是布朗戴斯的學生時，那裡教的代數幾何非常抽象。在我的年代，大家說代數幾何有兩種，一種透過哈特夏（Robin Hartshorne）的書學習 [29]，另一種是葛里菲斯（Phillip Griffiths）和哈里斯（Joseph Harris）合寫的書 [30]。我當學生時的環境，學習代數幾何得透過哈特夏，這對我而言毫無意義，但是葛里菲斯/哈里斯的方式卻充滿了各種美妙的空間示例。如果我可以重來，一定會認眞讀代數幾何。

問 ➛ 爲什麼代數幾何這麼吸引妳？

答 ➛ 因爲裡面有很有趣的幾何結構。

問 ➛ 妳的思路是幾何型的嗎？

答 ➛ 是也不是。我的思考非常具體，因此每當研究一個問題時，總會繞著它做一些小微積分計算，看看結果如何。我的思考並不極端抽象。我用很多範例協助思考，尋找作爲複雜現象模型的簡單構造。我願意學習複雜的東西，但希望是基於我能了解、基本上很簡單的動機。我的研究要用到很多不等式，雖然我不會爲不等式的各項取名字，但我對待它們如個人，一旦浸淫不等式一段時間，箇中經驗就變得非常個人，這些算式變成你的好朋友。∞

本文出處

本次訪問由傑克森在 2018 年 3 月完成於普林斯頓，同年刊登於數學網站 *Celebratio Mathematica*。本刊感謝傑克森授權與翻譯。

譯者簡介

翁秉仁為臺灣大學數學系副教授。

延伸閱讀

- ▶〈有朋自遠方來——專訪烏倫貝克教授〉，《數學傳播》30 卷 3 期 3-10（2055）。https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d303/30301.pdf。
- ▶丘成桐〈我在普林斯頓高等研究院的經歷〉，本刊第 15 期。在文中有丘成桐與烏倫貝克在 1979 年在高等研究院「幾何分析年」時的許多點滴紀錄，讀者可參照本文閱讀。
- ▶多納森〈烏倫貝克與變分學〉（Karen Uhlenbeck and the Calculus of Variations），*Notices of the AMS* (66) 2019 No. 03。文中有作者討論烏倫貝克自 1980 年代起在幾何變分學問題的研究成果與貢獻。

[29] Robin Hartshorne，*Algebraic geometry*，Springer-Verlag，1977。
[30] Phillip Griffiths and Joseph Harris，*Principles of algebraic geometry*，John Wiley & Sons，1978。