數

怪獸與月光

●作者：格里斯（Robert Louis Griess, Jr.） ●譯者：張哲睿

悼約翰 ‧ 康威——我的所思所想

作者簡介：

格里斯是密西根大學的數學教授，研究有限單群（finite simple group）和頂點代數（vertex algebra），並以格里斯代數（Griess algebra）構建了怪獸群（monster group）。

紀念數學家約翰 ‧ 康威（John H. Conway）

我見過康威教授兩面，但是不算熟悉。他是數學界公認的奇才，想法傑出而與眾不同，他創作的數學遊戲，不單單是有意思的玩具，也富有理論數學的內容，出名的遊戲叫做生命遊戲（game of life），這個遊戲開發了近代數學一門重要的學問叫做格狀自動機（cellular automaton）。他在有限群的研究和最密堆積（sphere packing）的理論有奠基性的貢獻，在拓樸學中的紐結不變量（knot invariant）和數理邏輯的工作也是舉足輕重的數學家，他是二十世紀在組合數學有最重要貢獻的學者之一！我們哀悼他因疫症而去世！

丘成桐

2020 年 4 月 13 日

數學家康威在 2020 年 4 月 11 日過世了。在這裡讓我來回顧一些我與他相處的經驗以及他在有限群的工作。由於我認識他有 50 多年了，我以第一人稱來寫會比較自然些。

我第一次見到康威是於 1970 年 1 月在劍橋大學的 DPMMS（純數和數理統計學院）。當時我是應我的指導老師湯普森（John Thompson）的邀請，到那裡待五個月，同時撰寫我芝加哥大學關於有限單群的舒爾乘子（Schur multipliers）的畢業論文。

就在 1970 年前，數學界所知的有限單群突然有了驚人的增長（當時並不知道能完成有限單群的分類）。康威透過研究 24 維的李奇晶格（Leech lattice）而貢獻了不少 [1，2]。他的確有資格感到自豪。他描述了在李奇晶格上一個非常大的等距群（isometry group）的結構——這個群有 $2^{22}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 23$ 個元素。此群通常被記爲 C_{O_0} 。該結果也同時找到了一些新的散在群（sporadic group）C_{O_1}，C_{O_2}，C_{O_3}，同時也再度發現了一些當時不久前剛發現的散在群（霍爾／揚科〔Marshall Hall-Zvonimir Janko〕，希格曼／西姆斯〔Donald Higman-Charles Sims〕，麥克勞夫林〔Jack McLaughlin〕，鈴木通夫〔Michio Suzuki〕）。19 世紀所發現的五個馬蒂厄群（Mathieu group）組成李奇晶格的理論。單一脈絡就能找出 12 個散在群！這結果讓他在數學界的大大出名，並接到了許多演講的邀請，其中包括 1970 年於尼斯的國際數學家大會。

康威在 DPMMS 的辦公室就在交誼廳旁，而交誼廳裡放滿了各式的智力遊戲謎題和許多的草稿紙。他很熱衷與任何有興趣的人聊遊戲和數學。他的生命遊戲受到全世界的喜愛。他的機智可以由他在交誼廳和整棟學院館舍裡與人們的日常聊天過程中所感受到。

大約在那之後不久，康威對於某些特定群的「特

殊現象」感到有趣並嘗試將它推廣一般化，這些在當時看似一時興起的另類興趣，確實體現了他對於數學本質的追尋與好奇心的廣泛。在 1960 年代後期，他有個關於群的構想，他把它叫做「三合群」（trine group）—— 這一類的群是由一些大小爲 3 的子群之共軛類（conjugacy class）所生成，並使得任取兩個都能生成給定名單中的子群。以他所舉的例子而言，這個名單有 $Z_3 \times Z_3$，Alt_4，$SL(2,3)$，也許可能有 Alt_5 或 $SL(2,5)$。他和計算數學家麥凱伊（John McKay）一起合作，並找到了一部分的三合群 —— 其中有很多是大康威群（李奇晶格的等距群）的子群。這個短期的探索計畫可以在近期的理論中看到。這些包括了費雪（Bernd Fischer），蒂姆斯費爾德（Franz Timmesfeld）， 阿什巴赫（Michael Aschbacher）等人所研究關於由一個使得任取兩個都能生成限制名單中群的基本交換子群共軛類所生成的有限群的理論。

康威意識到了有限單群的分類正不斷的發展，並隨時準備當有引起他興趣的問題時就投入參與。大約在 1973 年春天，他與懷爾斯（David Wales）利用電腦構造出了魯德瓦利斯群（Rudvalis group），我相信，這就發生在他們聽說這樣的群可能存在的一個月後。他們構造出了魯德瓦利斯群的雙重覆蓋群的 28 維表示，並用 $Z[\sqrt{-1}]$ 的純量表示 [5]。然而，康威並非系統性分類有限單群的工作團隊的一員。

在 1973 年 11 月，費雪和我分別各自找到了證據指出存在非常大的散在群，也就是後來所知的怪獸群（Monster group）。簡而言之，存在性的證明 [7] 比唯一性的證明更早出現 [10]（這之後會再提一下）。大約在 1970 年代初期，不斷湧現可能存在新的有限單群的猜想，但當時沒人知道到底有多少個有限單群、也不知道什麼時候才會從這些研究構造出來。

在此我想介紹一下諾頓（Simon Norton），他是劍橋大學的一個年輕數學天才。大概在 1970 年代初期，康威延攬了諾頓來研究有限單群以及探索其他關注的主題。在 70 年代晚期，康威和諾頓建立了怪獸月光理論（Monstrous Moonshine）[4]，它涉及一個假定存在的散在群：怪獸群（在當時還不清楚是否能證明怪獸群的存在，因爲它的大小約爲 8×10^{53}）。起因是麥凱伊的驚人觀察 $196884 = 1 + 196883$（196884 是橢圓模函數的第一個非無聊的係數）。預期 196883 會是怪物群的非無聊不可約（nontrivial irreducible）表示的最小維度（無聊表示是一維）。

他們的理論是在 1970 年代後期有限群理論社群正在發展中兩個感覺所構思的。第一個觀點是有限單群「有可能」完成分類，因爲結論的框架已經觸手可及了。第二個觀點是有限單群的理論這幾年一直越來越深入，因此（無意間）與其他數學領域漸顯疏離。康威和諾頓的怪獸月光理論斷言了假想的怪獸群與模形式理論之間廣泛且戲劇性的關係。大致上來說，根據他們的發現怪獸群的共軛類以及已知虧格爲 0 的上半複平面函數體所成的集合有一個近對射（near-bijection）的對應。頓時間研究這兩個數學上重要領域的關聯就多了很多可能性。非屬有限群論社群的數學家也很感興趣。數年後，證明怪獸群存在了（見後文）[7]。怪獸月光理論及其相關問題的研究也持續到今日。

康威 2005 年 6 月 19 日於加拿大班夫國際研究站的組合賽局論研討會。（維基，Thane Plambeck 攝）

在 1980 年初期，我發表了怪獸群的建構方法，那是一個非常大的散在單群，其元素足足有 $2^{46}3^{20}5^{9}7^{6}11^{2}13^{3}\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot41\cdot47\cdot59\cdot71$ 個，大約是 8×10^{53} [7]。證明這個群的存在是有限單群分類的最後一步，事實上，我同時也建構出了一個 $196883=47\cdot59\cdot71$ 維的可交換但非結合（nonassociative）的代數，以及一個代數自同構群（group of algebra automorphisms）。利用這個代數來構造的想法是受到諾頓關於在一個假定存在的 196883 維不可約模（irreducible module）R 上的怪獸群不變量研究的啟發。諾頓猜想 R 會自我對偶並且有個秩爲 3 的不變對稱張量。這代表 R 會有可交換的代數結構並且怪獸群會以代數自同構的方式作用其上。康威和諾頓常常在討論這個代數（如果存在的話）以及與較小的有限群相關的類似結構。據我所知，對於這類代數從未有人確立過可用的公理。

我在一個 196883 維不可約模上的可能代數結構

做了很多方面的研究。在一個符合特定性質的有限群有合適生成元（generator）的 196883 維向量空間上，要定義代數結構是很困難的。在這個不可約模上給定一個代數結構，就會有多參數族的方法來定義一個有單位元與相同自同構群的 196884 維代數。最後，就會有個很自然的選擇，這會關係到將原本代數中的一個 299 維的子代數提升成一個 300 維的代數，且後者會和 24×24 對稱矩陣的約當（Jordan）代數同構。

許多人檢驗過我的證明，提茲（Jacques Tits）做了很多改進及研究，包括 196883 維的代數以及自同構群的判定（例子可見 [12，13] 及其他文章）。1984 年，康威給出一個更有效的怪獸群構造方式 [3]，他利用了帕克迴圈（Parker loop），就是一個透過 12 維模 2 整數體的二元高萊碼（Golay code）所建構的牟芳迴圈（Moufang loop，一種非結合群），有 2^{13} 個元素。這個迴圈讓康威有辦法寫下緊湊的公式來表達代數乘法，並證明了存在一個「額外自同構」—— 這個部分特別困難 [7]。他的公式和我原本的公式是兼容的。這樣的迴圈直到 1980 年代初期才被人們所知，已是怪獸群首次建構以來好幾年之後 [6，7]，有關迴圈的背景可見 [8，9]。目前怪獸群的存在性有個更短的證明，運用頂點代數理論作出相對較少的計算，這正是由林正洪與我所完成的 [11]。怪獸群的唯一性最終得到了證明 [10]。符號 $\mathbb{M}$ 是現在怪獸群的通用記號。

無論是講授初等數學課程、給數學教育者的演講（例如 1990 年於維多利亞島的加拿大數學大會的演講）或面對不同程度學生的演講，康威都是很受歡迎的講者。他經常以實際物品作生動的示範（粉紅橡膠手套、特大號撲克牌、木製拼圖），而且喜歡與聽眾互動（像是最近在密西根大學的大學部討論會，利用一些緞帶爲例來說明辮群〔braid group〕的作用）。他很樂於分享數學的愉悅。∞

致謝：我很感激瑞巴（Alex Ryba）給了此篇文章很有用的建議。

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉
https://yaucenter.web.nctu.edu.tw/?lang=tw

譯者簡介

張哲睿是新竹交通大學應用數學系大四學生。

延伸閱讀

- ▶https://playgameoflife.com/ 這是生命遊戲網站。
- ▶https://www.youtube.com/playlist?list=PLt5AfwLFPxWIL8XA1npoNAHseS-j1y-7V 這是 YouTube 的 Numerphile 數普教育頻道所有有關康威的鏈結，其中有他自己對關於生命遊戲的看法、怪獸群的通俗簡介，還有他的 Podcast 訪談錄音。
- ▶羅勃茲著《天才在遊戲 —— 康威的好奇心》（Siobhan Roberts, *Genius at Play: The Curious Mind of John Horton Conway*, Bloomsbury, 2015）這是康威的訪談傳記。