

用數學看穿 混亂的洗牌手法

●作者：楊秉翰

模式預測型吉爾布雷斯撲克牌魔術

作者簡介：

楊秉翰是美國菲利普斯安多福學院（Phillips Andover Academy）的學生，喜歡表演變魔術且熱愛數學。

《數理人文》出版以來，得到很多朋友熱心的支持，至為感激！我們刊登的文章，一方面給讀者講解當代科學，一方面發揚東西方的人文思想。雖然作者們免不了會有他們主觀的看法，我們卻盡量希望大家保持科學客觀的精神，絕對不去嘩眾取寵！

在討論前沿知識之外，我們也希望培養年輕人對大自然的好奇心和對人類社會的興趣。近年來，中學生喜歡玩遊戲，尤其是電腦遊戲。有時候，玩物喪志！浪費太多時間在沒有意義的遊戲上，確是不妥。

但是也存在很多很有意思的遊戲，能夠幫助孩子們推理思考，增加對數學和科學的認識，那是相當有意義的事。記得二十多年前，我的兩個小孩，在小學時玩三國演義的電腦遊戲，竟然興致勃勃，讀完了三國演義原文，中文大有進步，真是始料不及！

所以我們也想鼓勵年輕人能夠寓科學於遊戲中，發表一些這方面的小品文！去年有一位中學生，他在美國安多福第一流的高中唸書，很喜歡玩魔術方塊表演，結果寫了一篇很傑出的文章，他介紹數學在魔術遊戲的用場，推理有趣深刻。我希望以後在數理人文中，也有一些這樣有深度而又有趣味的文章，所以我們決定刊登這篇文章如後。

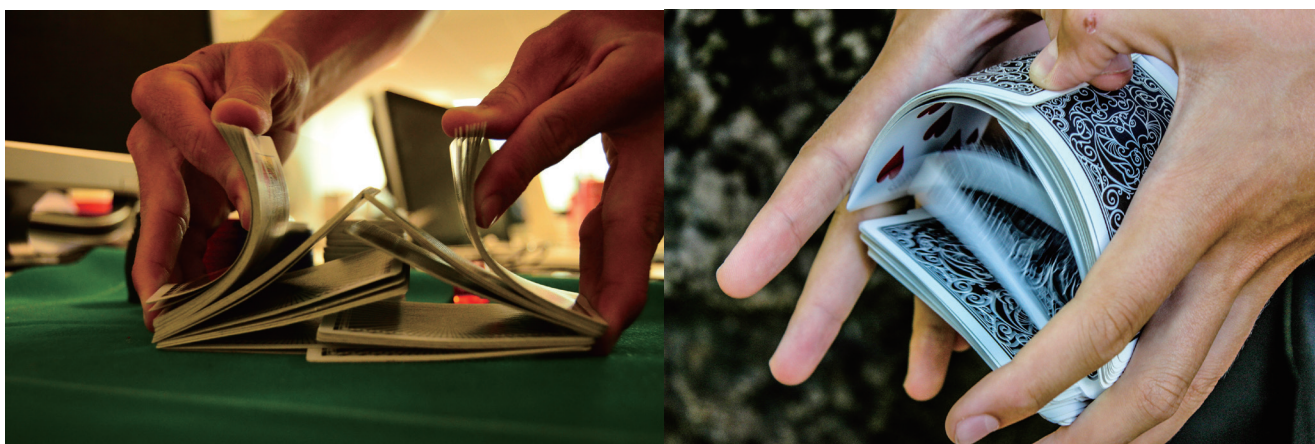
丘成桐

1. 序幕

台上魔術師拿出兩副牌背顏色不同的撲克牌，正面朝下擺在桌上。兩副牌各自切成兩半，然後兩副牌各自拿起半副，由魔術師本人或是交給觀眾成員，用交錯式洗牌法（riffle shuffle，又稱梅花間竹式洗牌法）洗牌，讓原本的兩副牌混在一起，成為兩副洗過的新牌。魔術師拿起第一副牌，兩張牌為一組，將撲克牌亮給觀眾看，但亮牌前先請觀眾猜猜看，接下來亮出的一組牌是什麼顏色組合（黑紅、黑黑，還是紅紅）。觀眾或許可以猜對幾個組合，但一定會有猜錯的時候，因為 26 個組合全部猜對的機率是 $(1/3)^{26}$ ；然而，魔術師卻能成功預

測每一組兩張牌的顏色組合。接著，魔術師拿起第二副牌，提高預測的難度，還要預測每一組牌的花色強弱組合（方塊與梅花弱、紅心與黑桃強）。提高難度後，魔術師還是每一組牌都能正確預測。

這樣的「模式預測型吉爾布雷斯撲克牌魔術」（Pattern Predictive Gilbreath Card Trick），是知名的吉爾布雷斯撲克牌魔術（Gilbreath card trick）加入互動元素的變化版。表演吉爾布雷斯撲克牌魔術時，一副牌洗過之後，兩張牌為一組，每一組都剛好有一張紅色牌、一張黑色牌。本文將介紹本魔術的原理，並探究其中蘊含的數學。進入正題前，本文會先回顧吉爾布雷斯原本的魔術以及德布因（Nicolaas de Bruijn）發明的變化版，再介紹本文



交錯式洗牌法。(左·Flickr·Poker Photos；右·維基·Alexey Musulev)

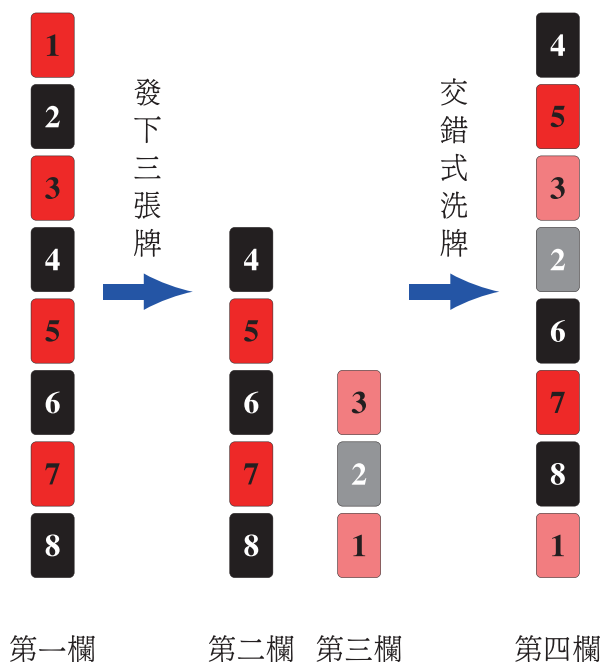
提出的模式預測變化版以及背後的數學。

2. 吉爾布雷斯撲克牌魔術與德布因變體

加拿大魔術師吉爾布雷斯（Norman Gilbreath）在 50 年前運用數學原理，發明一種高強的撲克牌魔術。魔術師先準備一副牌撲克牌，整副牌顏色一紅一黑交錯出現（當然，觀眾不會知道這樣的事前準備工作），然後切成張數一樣的兩疊牌（或是任意從一副牌背朝上的一副撲克牌發出幾張牌），兩疊牌交錯洗牌之後，整副牌兩張為一組，每組牌都是一張紅、一張黑 [1]。同樣的原則，也可以用在撲克牌花色與數字：1985 年，德布因發明這種魔術的變化版，讓兩疊牌不只紅黑交錯，花色**強弱**也交錯出現。一副牌切成兩疊後，一疊是方塊（弱）與黑桃（強）交錯，另一疊是梅花（弱）與紅心（強）交錯，兩疊交錯洗牌（這樣的事前準備，同樣不會讓觀眾知道）。同樣的道理，洗完牌之後每組兩張

牌一定會是一紅一黑、一強一弱，或兩者都是。德布因利用一個巧妙的數學自動機，證明他的魔術原理。這個自動機模型，反映整個交錯洗牌過程各階段的狀態 [2]。基本上，自動機任兩次轉換，從一個狀態轉換到另一個狀態，都可以證明是一紅一黑、一強一弱，或是兩者都是。不管是原本的吉爾布雷斯魔術，或是德布因發明的變化版，都可以讓魔術師證明，普遍認為是最公平的交錯式洗牌法，其實並不會改變每組兩張牌的牌面性質，因此可以變出驚人的魔術。

事實上一副撲克牌經過交錯式洗牌後，許多性質並不會改變。每次交錯洗牌後，撲克牌的排列順序，都稱作吉爾布雷斯排列（Gilbreath permutation）。例如，在前述的兩種吉爾布雷斯撲克牌魔術中，假設我們手上拿著兩副紅黑交錯的撲克牌，利用交錯式洗牌，洗完牌後，若將整副牌按順序兩兩分為一組，會發現每一組牌都是一紅一黑。



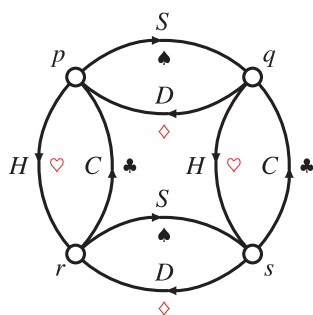
在繼續討論之前，我們先向較不熟悉的讀者介紹一下交錯式洗牌的方法。首先將一副牌切成兩疊，分別用左右手拿起，兩疊牌橫放，用雙手從上方握住，拇指扣緊。兩疊牌一角重疊，用拇指控制，將兩疊牌交錯放下。每張牌放下時，我們就說這張牌「落下」。每一張牌落下時，就不再是手中那疊牌的底牌，而是下一張牌變成底牌。整個洗牌過程，到手中所有牌全部落下才算完成。這裡必須強調，在表演魔術時牌落下的順序，與魔術師預測的順序相反。換句話說，洗牌時首先落下的牌，在表演時是到最後才會讓魔術師預測、亮給觀眾。

如果想解交錯式洗牌對整副牌的影響，可以想像有一副紅黑交錯排的牌，第一張是紅色、最後一張是黑色（見上圖第一欄），假設發出三張牌，每一張發出的牌都疊在前一張牌的上方，如此面前就會

有兩疊牌，第一疊是剩下未發的牌（底牌為黑色，見上圖第二欄），第二疊是發出的牌（底牌為紅色，見上圖第三欄），由於發牌的方式，這三張牌的順序與發牌前相反。若將這兩疊牌洗牌，假設第一張放掉的牌是第二疊底部的紅色牌（上圖中第3欄1號牌），第二張牌可能自第一疊，也可能自第二疊，但不論如何必定是黑色牌。假設下一張放掉的牌是第一疊的黑色牌（上圖中第2欄8號牌），那麼再下一張可能是第一疊的紅色牌（上圖中第2欄7號牌）也有可能是第二疊的黑色牌（上圖中第3欄2號牌）。假設下一張是第一疊的紅色牌（上圖中第2欄7號牌），那麼同理可知，下一張牌一定是黑色牌，因為洗牌者手中兩兩疊的底牌都是黑色（圖中第4欄）。繼續推論下去即可知，雖然洗完的牌不一定是完全紅黑交錯出現，但是如果依序兩兩一組抽牌，每一組牌一定都是一紅一黑。這個現象稱為吉爾布雷斯原則（Gilbreath principle）。

吉爾布雷斯發表這項戲法的原理後不久，德布因發明變化版，加入花色元素。吉爾布雷斯戲法，用的是兩疊紅黑交錯的撲克牌，花色並無限制。德布因將這項戲法略加修改，兩疊牌中有一疊是方塊與黑桃交錯，另一疊則是紅心與梅花交錯。方塊與梅花是弱花色，黑桃與紅心則是強花色，因此兩疊牌不止是顏色交錯，花色強弱也是交錯出現。兩疊牌透過洗牌合而為一後，牌的順序看似隨機，但其實若以兩張為一組，每一組牌必定花色一強一弱，或是顏色一紅一黑，也有可能兩者都是。

爲了用數學方式理解這個現象，德布因發明了以下確定性有限狀態的自動機，反映兩疊牌（一疊方塊與黑桃、另一疊紅心與梅花）洗牌的過程。



交錯式洗牌自動機。

本自動機有四種狀態，每種狀態都對應著交錯洗牌時，兩疊牌分別的兩底牌的一個花色組合，弧線與箭頭則代表洗牌過程：(1) 狀態 p，兩張底牌分別是紅心與黑桃。(2) 狀態 q，兩張底牌是方塊與紅心。(3) 狀態 r，兩張底牌是梅花與黑桃。(4) 狀態 s，兩張底牌是方塊與梅花。每一條路徑旁都有標出字母與符號，代表洗牌時落下的牌的花色。H 代表紅心 (Hearts)，D 代表方塊 (Diamonds)，C 代表梅花 (Clubs)，S 代表黑桃 (Spades)。

這個自動機的轉移函數，套用在德布因的撲克牌魔術，指的就是在洗牌時一張底牌落下的動作。每當有一張底牌落下，手中兩疊牌的底牌花色組合就會改變，也代表自動機從一個狀態轉換為另一個狀態。假設目前的洗牌狀態是狀態 s，兩張底牌分別是方塊與梅花，那麼假設放掉方塊那張牌，就會沿著 D 弧線轉換為狀態 r，新的底牌組合是黑桃與梅花。洗牌結束後，魔術師是兩張為一組預測撲克牌的組合。由於魔術師是每兩張牌做一個牌面顏色或花色組合預測，每一組牌（也就是兩張牌）都可以用一個雙週期代表，也就是等於是走了自動機中的兩條路徑。換句話說，在表演魔術時，洗牌過程中

每放掉兩張牌，自動機狀態就會沿著對應的弧線，轉換兩次。

本文一開始描述的模式預測型吉爾布雷斯魔術，是將德布因發明的變化版，再進一步變化。讀者應該記得，德布因的變化版中，每一組牌都是花色一強一弱、顏色一紅一黑，或是兩者都是，但這些組合的出現似乎是隨機的。模式預測型吉爾布雷斯魔術，以德布因的發明為基礎進一步發展，利用兩副牌背顏色不同的撲克牌，分析這些組合出現的模式，再運用這些模式來進行預測，這樣的預測正是本魔術的核心。

3. 模式預測型吉爾布雷斯撲克牌魔術的秘密

我們的模式預測型吉爾布雷斯撲克牌魔術，是怎樣表演的呢？

表演開始前，魔術師必須先準備兩副牌背顏色不同的撲克牌。魔術師先將兩副牌各自用花色分類，然後將兩副牌的方塊與黑桃牌交錯排成一疊、紅心與梅花牌交錯排成一疊，如此一來兩副牌各自分成兩疊，然後將兩疊合併，又成為兩副完整的撲克牌。這兩副牌各自由兩疊花色交錯的牌構成。接著魔術師將兩副牌收回盒子中，並且特別注意，其中一疊（記得一副牌由兩疊牌組成）牌的底牌顏色必須與其他疊不同。表演開始時，魔術師拿出排列看似隨機的兩副牌，然後找出兩副牌中方塊與黑桃牌跟梅花與紅心牌的交界，以此交界將兩副牌各切成兩疊。魔術師將每疊的底牌記在心中，然後一手拿起其中一疊牌，另一手內拿起另一副牌花色相反的

一疊牌，兩疊交錯洗牌。（例如，一手拿起紅色牌背的紅心與梅花牌，另一手就是拿起藍色牌背的方塊與黑桃牌，兩疊交錯洗牌。）剩下的兩疊牌，可以交給一名觀眾洗牌。

本文將證明，經過這樣的前置作業，洗過的牌將會有以下現象：任意連續兩張牌，若牌背顏色不同，則正面顏色必然相同（兩張紅色或兩張黑色）。兩張牌若牌背顏色相同，正面必然是一紅一黑。魔術師亮出前幾組牌時，先要求觀眾猜猜兩張牌的顏色會是相同還是不同，然後就可以利用以上資訊，將第一副牌兩兩發在桌上亮出，同時成功預測每一組牌顏色的異同，接著，魔術師拿起第二副牌，請觀眾猜測每組兩張牌花色的強弱組合（黑桃與紅心是強花色，方塊與梅花是弱花色）。這個階段的表演仍然是同樣的規則：牌背相同的兩張牌，花色必定是一強一弱；牌背相異的兩張牌，花色強弱必定相同。

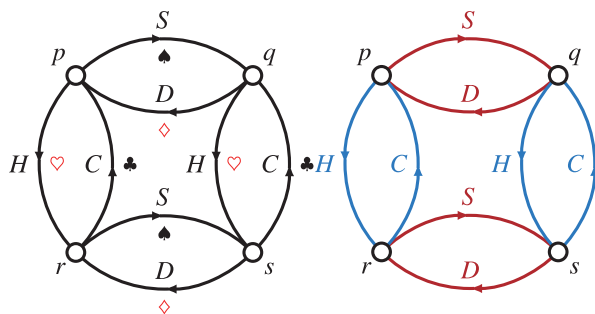
4. 魔術背後的數學

交錯式洗牌中重組過程的特性，讓我們（與魔術師）只要看到牌背的顏色，就可以判斷每組兩張牌的性質。這個推論過程，我們可以將德布因的自動機方法推廣來表示。

解釋本魔術的原理時，我們會著重在每一組兩張牌牌背的異同，與該組牌的牌面特性之間的關係。這裡定義的「牌面」是撲克牌顯示數字與花色的一面，「牌背」則是相反的一面。由此我們可以定義「同背組合」是兩張牌背相同顏色的牌，「異背組合」則是兩張牌背顏色相異的牌。

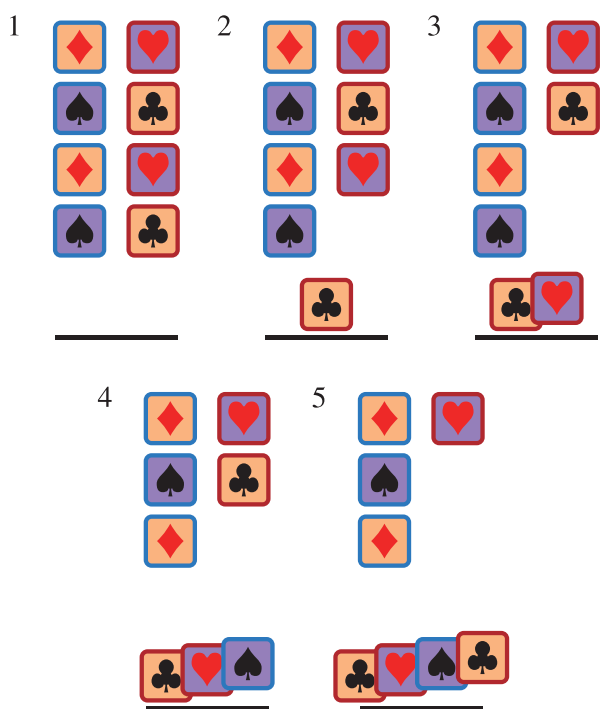
5. 牌背顏色自動機

本模式用上兩副牌，其中一副牌背是藍色，另一副牌背則是紅色。圖(d)中，我們根據牌背的顏色，將自動機的弧線上色，即成牌背顏色自動機。代表紅心與梅花序列的弧線上紅色，方塊與黑桃序列的弧線則上藍色。我們的牌背顏色自動機與德布因發明的自動機（圖(a)）結構是一樣的，圖(a)的自動機接下來我們也會用上。



(a) 交錯式洗牌自動機。(d) 牌背顏色自動機。

想像魔術師手中有兩疊牌，各自有兩個花色交錯排列，準備要洗牌。本例中，兩張底牌是黑桃與梅花，如此一來本次洗牌的初始狀態就是r（狀態1）。交錯式洗牌開始，假設梅花牌先落下（狀態2），然後是紅心（狀態3）、黑桃（狀態4）、又一張梅花（狀態5）。每落下一張牌後，我們檢視手中兩疊牌的底牌，就可以看到前兩張牌落下後，我們從初始狀態r，轉換到狀態p，接著又轉換為狀態r。接下來落下的兩張牌，又會讓狀態從r轉換到s，再轉換到q。



本自動機是確定性自動機，因此未來狀態並非隨機決定。所以在魔術師開始預測時，亮出的每一組兩張牌，都對應著自動機上的兩條路徑（即使一個雙週期）。此外，每經過兩次轉換，自動機不是回到初始狀態，就是來到初始狀態對角的狀態。

由此可得以下結果：

定理一：

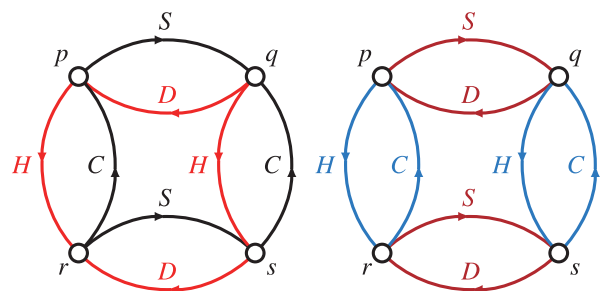
1. 若目前狀態位在 $\{p,s\}$ 對角線上，那麼經過兩次轉換，自動機必然會回到 $\{p,s\}$ 對角線上的狀態；
2. 若目前狀態位在 $\{q,r\}$ 對角線上，那麼經過兩次轉換，自動機必然會回到 $\{q,r\}$ 對角線上的狀態。

由定理一可知，兩副牌事前排列的牌面特性、顏色規律（即異背組合究竟是紅藍、紅紅，還是藍藍），在洗牌後都不會改變。請注意，位在 p,s 對角線的狀態，兩張底牌都是牌面同色；位在 q,r 對角線的狀態中，兩張底牌花色都是同樣強弱。每經

過兩次轉換，自動機不是回到初始狀態，就是來到對角的狀態，只有顏色與強弱皆相反的組合才是例外（因為這種組合在兩種版本中都有）。因此由定理一可知，牌面顏色版本只可能有牌面顏色相同的組合，花色強弱版本只可能有花色強弱相同的組合。這樣一來，魔術師就必能預測異背組合的牌面顏色或花色強弱。

6. 模式預測型吉爾布雷斯撲克牌魔術變化版：牌面顏色

要用牌背顏色預測牌面顏色，同樣可以將交錯式洗牌自動機的弧線重新上色，反映每張牌的牌面顏色。以下是牌面顏色與牌背顏色兩種自動機：



(b) 牌面顏色自動機。(d) 牌背顏色自動機。

重新提醒讀者，兩張牌背相同顏色的牌我們定義為「同背組合」，兩張牌背顏色相異的牌則定義為「異背組合」。

我們比較圖 (d) 與圖 (b)，即可觀察到相對應的路徑顏色有所不同。若希望兩個變化版的預測方式保持一致，在進行牌面顏色變化版的前置作業時，就

必須確保兩張底牌牌面同色。觀察可知，這個變化版的初始狀態必然是狀態 r 或狀態 q ，且每個雙週期開始都必然是這兩個狀態之一。牌背顏色自動機中每一個顏色相異的雙週期，可觀察到牌面顏色自動機對應到的都是顏色相同的雙週期；牌背顏色自動機中每一個顏色相同的雙週期，可觀察到牌面顏色自動機對應到的都是顏色相異的雙週期。因此，魔術師即可確知，異背組合撲克牌牌面必然顏色相同，同背組合撲克牌牌面必然顏色相異。

另外，牌背顏色自動機中每一個顏色相異的雙週期，牌面顏色自動機對應到的雙週期是「紅紅、黑黑」交錯出現。請注意，牌背顏色自動機中所有顏色相異的雙週期，從狀態 r 或狀態 q 開始，雙週期結束後必定是來到對角（ q, r ）的狀態。牌面顏色自動機中，相對應的雙週期都是同色的，但紅色雙週期與黑色雙週期是交錯出現。從撲克牌魔術的觀點來看，這意味著出現異背組合時，牌面顏色必然是「黑黑」與「紅紅」交錯出現。

從以上的推論可知：

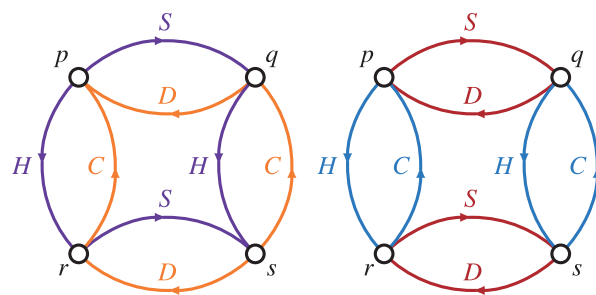
定理二：

1. 圖 (d) 中，從狀態 r 或狀態 q 開始，又回到同一狀態的雙週期，兩條路徑顏色相同，圖 (b) 中對應的雙週期兩條路徑顏色卻相異；
2. 圖 (d) 中，從狀態 r 或狀態 q 開始，對角狀態結束的雙週期，兩條路徑顏色相異，圖 (b) 中對應的雙週期兩條路徑顏色卻相同；
3. 假設初始狀態 p_0 位在 $\{r, q\}$ 對角線上，那麼 $C = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ （即所有異背組合的集合）中牌面顏色將交錯出現，意即 p_i 組合的牌面顏色必然與 p_{i+1} 組合相異。

定理二的前二條，就是本魔術使用的預測方法。透過分析牌背顏色與牌面顏色自動機的顏色差異，我們可以根據本定理推論出一套簡單易記的規則：如果一組兩張牌的牌背顏色相異，則牌面顏色必定相同，如果兩張牌的牌背顏色相同，則牌面顏色（花色）必然相異。本定理第三條與前述的定理一結合，即會發揮重要角色，確立了異背組合中牌面顏色出現的規律。具體來說，異背組合的牌面顏色，必然與前一個異背組合牌面顏色的相反。此外，本定理也顯示表演一開始時的兩張底牌（即自動機的初始狀態）顏色必須相同。以上即為本變化版的預測方法。

7. 模式預測型吉爾布雷斯撲克牌魔術變化版：花色強弱

本變化版中，同樣須將交錯式洗牌自動機的弧線上色，代表每一組牌的花色強弱。本例中，強花色（紅心與黑桃）的弧線上紫色，弱花色（梅花與方塊）的弧線則上橙色。以下是花色強弱自動機與牌背顏色自動機：



(c) 花色強弱自動機。(d) 牌背顏色自動機。

觀察兩個自動機，同樣可以利用前節的推論過程，發現所有異背組合的花色強弱都相同，所有同背組合的花色強弱都相異。唯一的差別在於前置作業，在預測花色強弱的版本中，兩疊牌的底牌必須顏色相異。經過這樣的前置作業，表演的初始狀態便會是狀態 p 或狀態 s 。如此一來，每一個雙週期都是從初始狀態 p 與 s 開始，在同一狀態或對角狀態結束。

從以上的推論可知：

定理三：

1. 圖 (d) 中，從狀態 p 或狀態 s 開始，又回到同一狀態的雙週期，兩條路徑顏色相同，圖 (c) 中對應的雙週期兩條路徑顏色卻相異；
2. 圖 (d) 中，從狀態 p 或狀態 s 開始，對角狀態結的雙週期，兩條路徑顏色相異，圖 (b) 中對應的雙週期兩條路徑顏色卻相同；
3. 假設初始狀態 p_0 位在 $\{p, s\}$ 對角線上，那麼 $C = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ （即所有異背組合的集合）中牌面顏色將交錯出現，意即 p_i 組合的牌面顏色必然與 p_{i+1} 組合相異。

與前面同理，定理三讓我們設計出此版本魔術的預測方法，方法與前一個版本完全相同，只是預測對象變成花色強弱，而非牌面顏色。我們利用定理三的前兩條，可以推論出一套簡單易記的規則：如果一組兩張牌的牌背顏色相異，則花色強弱必定相同，如果兩張牌的牌背顏色相同，則花色強弱必然相異。定理三的第三條與定理一結合，同樣也能確立異背組合的花色強弱規律，每一個異背組合兩張牌的花色都跟前一個異背組合相反。此外，本定理也顯示表演一開始時的兩張底牌（即自動機的初始

狀態）顏色必須相異，花色則相同。以上即為本變化版的預測方法。

8. 魔術總結

有了以上的自動機，我們就可以利用數學解釋本魔術背後的原理。表演開始前，魔術師先準備兩副牌背顏色不同的撲克牌，先將兩副牌各自用花色分類，然後將兩副牌的**方塊**與**黑桃**牌交錯排列、**紅心**與**梅花**牌交錯排列。從自動機的設計來看，牌面顏色變化版魔術初始狀態必須在 $\{q, r\}$ 對角線上，花色強弱變化版初始狀態則必須在 $\{p, s\}$ 對角線上。由觀察可知，初始狀態 $\{q, r\}$ 對角線上，意即兩張底牌牌面顏色必須相同；初始狀態在 $\{p, s\}$ 對角線上，則意即兩張底牌必須花色同強弱，換句話說牌面顏色必須相異。因此，魔術師必須確保顏色交錯排列的四疊牌中，有一疊底牌的牌面顏色必須與其他三疊相異。如前文所述，魔術師將兩副牌收回盒子中，表演開始時拿出排列看似隨機的兩副牌，然後找出兩副牌中**方塊**與**黑桃**牌跟**梅花**與**紅心**牌的交界，以此交界將兩副牌各切成兩疊——到此步驟為止，都都不需要數學。完成切牌後，魔術師每疊牌與另一副牌中花色相反的一疊牌，兩疊交錯洗牌。（例如，**紅色**牌背的**紅心**與**梅花**牌，搭配**藍色**牌背的**方塊**與**黑桃**牌，兩疊交錯洗牌。）整個洗牌過程，可以利用牌面顏色、牌背顏色與花色強弱三種自動機的狀態轉換表示。

魔術師開始表演預測魔術，第一種表演是牌面顏色變化版，洗牌時兩疊的底牌分別是梅花與黑桃，因此初始狀態是狀態 r 。不過，魔術師到了這個階

段已經看不到牌面了。

魔術師眼前看見的是牌背顏色不同的「異背組合」。這時魔術師可以採用反向推論。在這之前，魔術師已經知道這副牌的**方塊**、**梅花**、**紅心**與**黑桃**張數都相同，所以自動機中每一條路徑經過的次數也都會相同。因此在這次表演的例子中，自動機初始狀態是 r ，每亮出一組**梅花**與**紅心**的同背組合，從自動機的觀點就是經過一個雙週期（透過 C 路徑轉換一次，再透過 H 路徑轉換一次），回到 r 狀態，那麼之後必然會有一組**黑桃**與**方塊**的同背組合，同樣是經過一個雙週期（透過 S 路徑轉換一次，再透過 D 路徑轉換一次）回到 r 狀態。每亮出一組**梅花**與**黑桃**的異背組合，即是經過一個雙週期（透過 C 路徑轉換一次，再透過 S 路徑轉換一次）從狀態 r 到狀態 q ，之後必然會有一組**紅心**與**方塊**的異背組合，同樣是經過一個雙週期（透過 H 路徑轉換一次，再透過 D 路徑轉換一次）從狀態 r 到狀態 q 。

有了以上推論，魔術師就知道洗牌過程結束時，最終狀態一定與初始狀態相同，因為手中洗過的牌**紅心**、**方塊**、**黑桃**與**梅花**張數相等，同背組合與異背組合數目也一定相等。如此一來，他就可以開始反向推論的過程，從最後落下的兩張牌開始，在心中畫出自動機的轉換路徑。魔術師知道自動機的最終狀態與初始狀態相同，就可以根據發出的雙週期是同背還異背組合，在心中逆著圖上的箭頭（因為是反向推論，所以路徑方向與圖上相反）畫出一個雙週期的路徑，自動機如果不是回到同一狀態，就是來到對角的狀態——這就是倒數第二個狀態。接下來，魔術師運用牌面顏色自動機，套上先前利用最終狀態與牌背顏色組合所推論出的路徑，就可

以預測該組牌的牌面顏色或花色強弱。例子中的初始狀態是 r ，且手上的牌異背組合數目是偶數，因此魔術師就能推論，最終狀態一定也是 r 。魔術師看到發出的是異背組合，就沿著圖中的箭頭相反方向推論，先沿路徑 D ，再沿路徑 H ，來到對角的狀態 q 。觀察牌面顏色自動機上對應的路徑後，魔術師發現兩條對應的路徑都是**紅色**，代表洗牌過程落下的最後兩張牌都是**紅色**牌，讓自動機從狀態 q 轉換到最終狀態 r 。因此，魔術師可預測發出第一組異背組合，兩張牌都是**紅色**。

發完第一組兩張牌後，魔術師拿起下一組兩張牌，發現是同背組合。魔術師馬上回想自動機，記得同背組合代表的是回到同狀態的雙週期，不管是從 q 狀態或 r 狀態開始，都會回到同一個狀態。觀察心中的牌背顏色自動機，畫出回到同一個 q 狀態的路徑後，魔術師同樣快速與牌面顏色自動機比對，發現牌背顏色自動機對應的兩條路徑代表的是**一紅一黑**的兩張牌，這兩張牌洗牌時是在最後一組異背組合之前落下的，讓自動機停留在狀態 q 。因此，魔術師可預測這組同背組合，必然是一**黑一紅**。

接下來，魔術師再拿起兩張牌，發現又是異背組合。魔術師知道最終狀態是 r ，所以可以再次利用反向推論，推出這個組合的牌面顏色。因為先前的異背組合代表的是一個將自動機從狀態 q 轉換為狀態 r 的雙週期，所以前一個異背組合一定代表著從狀態 r 轉換為狀態 q 的雙週期，最後落下的異背組合才能將自動機從狀態 q 轉換至最終的狀態 r 。因此，魔術師看到眼前的異背組合，就再次在心中逆著畫出從狀態 q 到對角狀態 r 的雙週期路徑。與牌面顏色自動機比對後，發現從狀態 q 轉換為狀態

r，會經過兩條黑色路徑，一條是 S 路徑，另一條是標註 C 路徑，代表在洗牌時是兩張黑色牌落下，構成眼前的組合。

運用同樣的推論方法，魔術師只要看到接下來每組牌的牌背顏色，就可以成功預測該組牌的牌面顏色。第一副牌預測完後，第二副牌利用同樣的方法，即可成功預測每一組牌的花色強弱。表演完之後魔術師鞠個躬，順利的話觀眾應該會起立鼓掌。

這種魔術還可以進一步延伸，牌背顏色可以不止兩種，甚至可以利用牌面不止有數字與花色兩種性質的卡牌（例如 Uno 遊戲的卡牌）。

9. 表演秘訣

當然，數學魔術也是一種表演，所以本文最後，提供幾個小秘訣，在觀眾面前表演模式預測型吉爾布雷斯撲克牌魔術時可以用上。

實際表演魔術時，魔術師除非在洗牌前已經牢記底牌是哪兩張，否則不可能知道自動機初始狀態是哪一個（有兩種可能性），因此我們建議第一組異背組合牌一定要邀請觀眾猜測。這樣不但能讓觀眾更有參與感，而且你爲了檢查答案，可以看見第一組牌，就知道了自動機的初始狀態，如此即可成功預測下一個異背組合的牌面顏色。

在表演過程中，魔術師預測的方式最好盡量多變。可以假裝看前一組牌、凝視觀眾，甚至聞聞撲克牌的味道，讓每一次預測都富含趣味與新鮮感。另外在預測時也要故作支吾猶豫，不要讓觀眾看出你的預測是用公式推論出來的。

較有經驗的魔術師，可以先假切、假洗幾次牌，

強化眼前這副牌是隨機的假象。建議撲克牌剛從盒子拿出來的時候，就可以假切假洗。

最後，在將一副牌切成事前排列的兩疊時，要讓觀眾相信你是隨意切個大概，而不是剛好切成兩疊 26 張牌。建議可以說類似這樣的話：「我們大概把牌切一半，這樣看起來差不多，一兩張差距沒關係。」如此一來觀眾更無疑心，魔術就會顯得更加精采。

只要表演夠有氣勢，即使觀眾都是專業數學家與魔術師，肯定也看不出破綻！∞

致謝：本文作者衷心感謝我的精神導師：哈佛商業學院的柯明納斯（Scott Duke Kominers）教授。我在哈佛數學科學與應用中心擔任經濟設計研究員時，教授對我的工作有諸多指導與支持，讓我十分難忘。此外，也希望感謝石溪大學的顧險峰教授，讓我認識圖論與自動機論、賓州大學的余成龍博士幫助我的證明過程、史貝爾曼學院（Spelman College）的穆爾卡西（Colm Mulcahy）教授、聖本篤學院（College of Saint Benedict）的班納許（Bret Benesh）教授，以及透納（Joe M. Turner）先生對我的諸多建議，還有哈佛大學的丘成桐教授帶給我的啟發。

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉
<https://yaucenter.web.nctu.edu.tw/?lang=tw>

延伸閱讀

- 劉炯朗，《你沒聽過的邏輯課：探索魔術、博奕、運動賽事背後的法則》，時報出版，2015。書中也有介紹關於吉爾布雷斯撲克牌魔術的原理。
- 大栗博司，《用數學的語言看世界：一位博士爸爸送給女兒的數學之書，發現數學真正的趣味、價值與美》，臉譜出版社，2017。書中以淺顯易懂的方式介紹各種生活現象背後的數學。