

努力，再努力； 思考，再思考

●受訪者：格羅莫夫（Mikhail Gromov）
●訪談者：勞森（Martin Raussen）、史考（Christian Skau）
●譯者：張清輝、李宣北

2009 年阿貝爾獎得主格羅莫夫訪談

作者簡介：勞森目前任職於丹麥奧爾堡大學（Aalborg University）數學科學系。

史考是挪威科技大學（Norwegian University of Science and Technology，Trondheim）數學系退休教授。

俄羅斯的教育

問 ▶ 首先，恭喜你得到 2009 年的阿貝爾獎，我們先從你早年的生活與生涯談起：你是二次世界大戰進入尾聲時，在聖彼得堡（當時叫列寧格勒）東邊 245 公里的小鎮柏克西托戈爾斯克（Boksitogorsk）出生的？

答 ▶ 我的母親是戰鬥部隊的隨軍醫生，爲了生產必須調到離前線稍遠的地方。

問 ▶ 請談談你的背景，早年的教育，什麼人或事啟發了你對數學的興趣？

答 ▶ 除了學校之外，我第一次接觸到數學是母親爲我買的拉德馬克（Hans Rademacher）和托普立茲（Otto Toeplitz）寫的《數與形》（*Numbers and Figures*），對我影響很大。雖然我對大部分的内容不甚了了，仍然讀得津津有味，直到現在我還是對任何讓我好奇，但無法瞭解的神秘事物充滿了興趣。

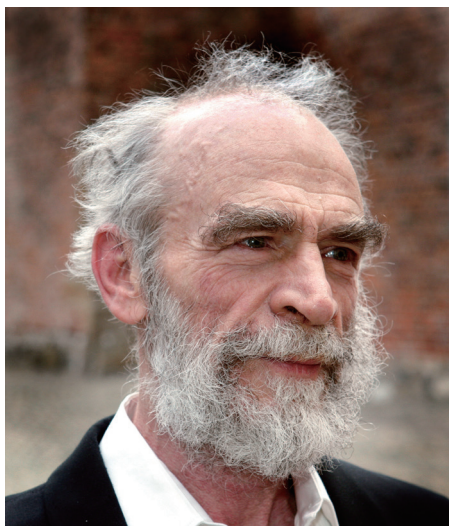
問 ▶ 你在中學就曉得自己將來要念數學？

答 ▶ 中學中期以後有段時間我對化學比數學更感興趣，然後我就上鉤了——俄羅斯有些爲青少年設計的、很好的數學練習題本，我有一年的時間沉迷其中難以自拔。中學最後一年，我參加所謂的數學圈（mathematical circle），這是爲低年級大學生辦的，由馬洛澤莫夫（Vasia Malozemov）

和馬思洛夫（Serezha Maslov）主持（馬思洛夫後來成爲一位邏輯學家，就是他向馬季亞謝維奇〔Yuri Matiashevich〕建議希爾伯特的第十問題。），爲我們這些年輕孩子安排了引人入勝充實的課程活動。這是 1959 年在聖彼得堡上大學的前一年，主要就是因爲這個活動讓我決定學數學。

問 ▶ 你在列寧格勒大學攻讀數學，請談談當時的環境、接受什麼樣的數學養成教育，還有對你重要的老師。

答 ▶ 我覺得是愉快的，雖然周遭的政治氛圍讓人不太舒服。數學界和教授們，士氣非常高昂。記得我最初的老師包括納坦松（Isidor Natanson）教授，我還上過馬卡若夫（Boris Makarov）的課（研究數學分析）。你可以感受到他們高度的熱情、對科學的投入，再加上和高年級學長之間的互動，對我產生非常強烈的衝擊，像年輕的代數學家雅可夫洛夫（Tolia Yakovlev），他在我們心中烙下獻身數學至死不渝的形象。另一方面，列寧格勒大學的一般趨勢是將數學與科學連結，我想應該是受到科莫戈洛夫（Andrey Kolmogorov），和葛爾方德（Israel Gelfand），來自莫斯科的影響。科莫戈洛夫對流體力學有根本的貢獻，而葛爾方德則從事與生物以及物理相關的研究。基本上，對於知識的普世認知：認爲數學是知性思維與發展的中心，這樣的想法塑造出當時那裡的每一個人，包括我。我也從與卡茲丹（Dima Kazhdan）不時見面學到不少莫斯科的數學風格。



格羅莫夫。(Knut Falch/Scanpix 攝)

問 ▶ 你從什麼時候開始發現自己有特出的數學天分？如何發現的？

答 ▶ 我不認為自己有什麼特出。不過是我正好有你們欣賞的才具，如此而已。我從來沒有過這樣的念頭。

問 ▶ 至少在學生時代的後期，洛赫林（Vladimir Rokhlin）是你的指導老師。你覺得自己做數學的方式是否到今天還受到他的影響？

答 ▶ 說來洛赫林是在莫斯科受教育的，思考數學的方式與列寧格勒大異其趣，莫斯科學派比較接近西方數學的走向。列寧格勒比較封閉，重心放在古典的問題；莫斯科則對新的發展比較開放，洛赫林將這種風氣帶到列寧格勒來。另外一位有相同態度的是代數幾何學家范珂夫（Boris Venkov），從他以及洛赫林身上，我獲得比列寧格勒傳統學派更為寬廣的數學視野與見地。另一方面，傳統學派實力也很雄厚；譬如，亞歷山德羅夫（Aleksandr Alexandrov）領導的幾何學派，我大部分的幾何是從成員中的扎加勒（Victor Zalgaller）和布拉戈（Turi Burago）那裡學的，布拉戈是我的幾何啟蒙老師。

問 ▶ 1970 年代初期你在列寧格勒大學研究做得非常成功，但你仍然離開那裡，而且不久就在 1974 離開蘇聯，是什麼促使你這麼做？

答 ▶ 很簡單，我常說越是不可以做的事，人越想做，我們都知道上帝禁止夏娃吃蘋果的結果，這是人性。官方說不能離開這

個國家，離開是不可能的，是錯的，是糟糕透頂的事。就像從事科學研究：就算不可能，還是嘗試。

問 ▶ 當時要離開蘇聯可能不是那麼容易？

答 ▶ 對於我，相對簡單，我非常幸運。不過一般來說很難，同時風險很高。我必須申請，等待了好幾個月才獲得批准。

俄羅斯的數學

問 ▶ 去年的阿貝爾獎得主之一提茲（Jacques Tits）提起俄羅斯數學教育和各個學派，他非常稱許俄羅斯數學的強烈個性以及在動機、應用與技巧方法上緊密的連結。他更提到研討會和討論氣氛熱絡，有時甚至可以延續好幾小時。你的看法呢？俄羅斯數學的風格和學派有什麼特別的地方？

答 ▶ 就像我前面講的，列寧格勒和莫斯科不太一樣，提茲提到的可能是葛爾方德在莫斯科的討論班，我因為受邀演講參加過一次，所以我的印象可能沒有什麼代表性。不過那次，在討論班即將開始前，葛爾方德花了將近兩個小時和聽眾討論不同的事情。另一個討論班是皮埃特斯基 - 夏皮羅



阿貝爾講訪談，由左至右為史考、勞森，以及格羅莫夫。（Heiko Junge/Scanpix 攝）

（Ilya Piatetsky-Shapiro）主持的，就是一板一眼，每當有人對黑板上的式子提問，夏皮羅就會說，什麼是學生理當知道的，什麼是不該知道的，該學這個、這個或那個，態度極為強勢，甚至有些蠻橫，非常強烈的展現出他的個性！

問 ▶ 你是否依然能從自己的研究工作中感覺到特別的、俄羅斯的數學背景？

答 ▶ 當然，毫無疑問，這是一種對科學與數學非常浪漫的態度：覺得它們是值得生死以之的崇高志業。因為學生時代我不曾到過其它國家，不知道其它地方是否也是如此。不過，這是許多和我一樣出身俄羅斯的數學家傳承的情懷。

問 ▶ 俄羅斯數學與目前西方的數學是否仍有很大的

差異，或是因為許多俄羅斯數學家現在到西方就業，這些差異即將消失？

答 ▶ 這點我不能判斷，有那麼多俄羅斯人在西方工作，我對目前俄羅斯的數學生態知道得不多。許多事物一定已經發生巨大的變化。我們那個時代對科學、數學的狂熱，部分來自於對外面世界的反應。學術生活是平靜美好的園地，讓你離開外面頗為醜陋的政治世界。當這些都改變了，原先對學術強烈的專注也就退燒了也未可知，這只是一個猜想。

問 ▶ 你和俄羅斯數學家還有頻繁的接觸嗎？還偶而回去？

答 ▶ 離開後回去過兩次，還能感受到那裡的學術強度，但是水準下滑，部分原因是許多有天賦的人被更大的學術中心吸引，到那邊去可以學得更多。

問 ▶ 能不能告訴我們曾經影響你的還有哪些數學家，像林尼克（Yuri Linnik）？

答 ▶ 是的，林尼克是列寧格勒大學一位偉大的科學家、教授和院士。有一年他主持了一個代數幾何的學習班（educational seminar），他讓人稱道的是，總是知之為知之，不知為不知，承認自己的無知，從不裝懂，甚至還裝做不懂。其次他與學生之間永遠平等對待。有一次輪到我報告，我睡過頭遲到了一小時，他只一笑置之——完全沒

有生氣。我想這展現出了他秉持的一種數學的精神——數學大家庭中當有不分彼此同舟共濟的氛圍。

問 ▶ 他的為人比起洛赫林如何？

答 ▶ 洛赫林因為過去際遇坎坷比較封閉。他的個性極為強悍，二次世界大戰時曾被俘，他是猶太人，不過設法隱瞞了身份。獲釋之後被送進俄國的勞改營，因為官方認定他沒有服完兵役，淪為戰俘竟然不算服役！經過一番奔走，他來到莫斯科。很難看出他內心的想法，他非常內向孤僻，凡事都要維持高標準，不像林尼克那麼自在、開放。起初不明白是什麼造成這樣的人格特質，後來才瞭解是因為過去不堪的遭遇。

問 ▶ 林尼克是不是也是猶太人？

答 ▶ 我想他有一半猶太血統，但是他沒有投入戰爭。他過的是另一種人生，身為科學院的成員，在學術生涯中有較好的地位等等。洛赫林則因為我不清楚的原因一直受到官方的差別待遇。我聽到的是他和莫斯科的某些官員有過節。

有段時間他是龐特里亞金（Lev Pontryagin）的秘書。龐特里亞金眼睛看不見，身為院士他需要一位秘書，洛赫林擔任這個工作直到他通過第二次論文口試（俄羅斯制度有第二個博士學位），這時他的學歷超出了職位所需，當局於是讓他走路。亞歷山德羅夫那時是列寧格勒大學校長，極力設法延攔他，他在 1960 年到列寧格勒大學，

對那裡的數學發展影響極大，整個拓樸學派是依循他的構想建成。洛赫林是一位非常好的老師並且善於組織規劃。

問 ▶ 龐特里亞金反猶太，是嗎？

答 ▶我認為他是在第二次婚姻之後才開始反猶太。他看不見，對外界事務的認知能獨立到什麼程度，我們並不清楚。他晚年反猶太，還寫了些荒唐透頂的小冊子，不知道是受到什麼影響而有那樣的想法。

幾何的歷史

問 ▶由於「在幾何上革命性的貢獻」而得到阿貝爾獎的，你是第一位。從歐基里得時代開始，幾何可說是數學的門面，也是如何寫數學、教數學的典範。從 19 世紀初，經由高斯、波雅伊（János Bolyai），羅巴切夫斯基（Nikolai Lobachevsky）的工作，幾何大幅拓展。對於從那時候到現在某些重要的發展，請談談你的看法？

答 ▶我只能給出部分答案以及我個人的觀點。古人如何看待這門科目今人難以知悉。現在看來，幾何是人們觀察外在世界而觸發的數學；歐基里得對觀察做了有系統的整理，並形塑成公設的數學，再推導後續的結果，不過一旦超出原來的設計就不妙了。比方說平行公設，一直有人想證明它。

這裡摻雜了不同的因素：一方面人們相信我們看世界只能有唯一一種方式，試著以公設的方式

來證明這點，卻不成功。終於數學家理解到必須破繭而出打破對公設天真的想法，公設曾經很有用，但是有其侷限，公設已經完成使命，最終必須捨棄。從此，數學往不同的方向行進，從單純觀察、描述人們看得到的東西，轉為描述人們不能直接看到——只能經由非常隱晦的方式得知的東西，阿貝爾是促成這個轉變的人之一。現代數學在 19 世紀初期成形，然後愈來愈結構化。數學不僅處理眼睛看到的，還包括在更基本的層面上處理事物的結構。當時數學家面對的一個問題是嘗試瞭解歐氏幾何的侷限，這個問題如果用現代（數學）語言來陳述非常簡潔明白，卻經過數百年才發展出這樣的語言。這個工作由羅巴切夫斯基，鮑亞和高斯開端，在不同的領域則是由阿貝爾和迦羅瓦（Évariste Galois）開始。

得獎人在幾何上的研究

問 ▶大家公認你在 1970 年代後期革新了黎曼幾何。請為我們解釋其中新穎的創見，以及能夠突破的想法。

答 ▶我不能解釋這個，突破？原創？我從不做如是想。每個數學家在探討某些新的東西時，不會理會它是新的。你相信大家知道，幾乎是當下分明，只是別人沒說出來而已。事實上許多數學證明都有這樣的情形；證明的想法幾乎從沒被人說出來過。有人認為顯而易見，有人則不知不覺，不同背景的人有不同的認知。

問 ▶ 你的代表作之一被人形容為將幾何軟化（the softening of geometry）——以不等式或逼近或漸近方程來取代方程式。例子包括以疏略的觀點（coarse viewpoint）研究黎曼幾何，也就是同時考慮所有的黎曼結構。這是非常有創意的，過去從來沒有人想到，不是嗎？

答 ▶ 也許是吧。不過我還是不能確定是否有人有過同樣的想法。對於我，這個想法從一開始就是清楚的，其實有很長一段時間我認為每個人都知道，一直沒有將它說出來。我相信有人知道它但是從來沒有機會大聲地公諸於世。最終因為我在法國開課，把它有系統地整理出來。

問 ▶ 首先，你有了這個新的視角，基本的想法也許很簡單，但是你是第一個在這個方向得到深刻結果的人。

答 ▶ 不過，還是有前人的工作。黎曼幾何的這個趨勢從契格（Jeff Cheeger）的工作開始。早先描述流形的語言頗為抽象，有許多上、下標，很難入手。我認為最先將黎曼幾何變得簡單的工作之一是納許（John Nash）的結果。事實上，他對我的影響極大。他只是把流形拿在手裡，放到空間中，把玩它們。我從這裡初次學到非常實在的幾何，簡單的東西，但是必須將它投射到維度很高的空間。然後是契格的工作，表面上是非常不同的主題，卻有相同的態度——事情可以經由正確的形式化變得頗為簡單。所以我只是跟隨著他們的腳步。

問 ▶ 所以你很早就研讀了納許的工作而且深受影響？

答 ▶ 是的，我看得很用心，而且我相信自己是唯一徹頭徹尾讀過他的論文的人。從後來別人寫的論文判斷，我不認為他們認真讀過。

問 ▶ 何以見得？

答 ▶ 起初，看到納許有篇文章，我認為毫無道理，但是洛赫林教授說：「不，不，這篇你非看不可。」我還是覺得是天方夜譚；不可能是對的。但是之後再看，簡直不可思議，不可能對的竟然是正確的。三篇論文中，關於嵌入（embedding）的兩篇較難，看起來很荒謬。再細究嵌入的方式，仍然覺得荒謬。在瞭解其中的想法之後，許多人嘗試找出更好的作法。不過看了這些人做的，還有自己試過的，再回頭來看納許，不得不承認他技高一籌，他有高超強大的分析功力加上幾何直覺。對於我這是一個奇特的發現：世界竟然可以這樣違背我們的認知。

問 ▶ 納許獲得諾貝爾經濟獎，也是電影美麗世界主角的原型。許多人認為以他的工作應該得到菲爾茲獎，你同意嗎？

答 ▶ 是的，撇開獎項，當我們考慮他這個人，他在科學上的成就，他的發現真是匪夷所思。他的思考方式極不尋常，他在幾何上的工作，包括

結果、技巧、想法各方面來看都違背了一般的預期。他用極其簡單的方式處理各種事，簡單得每個人都可以理解，但是沒人相信這樣行得通。他還有巨大的執行能力——以戲劇性的分析功力將想法付諸實現。在我看來，他在幾何上的成就遠遠超過在經濟上的好多好多倍，兩者不能相提並論。這是在如何思考流形的態度上，一個不可置信的改變。我們可以徒手操弄流形，結果卻可能比窮盡種種傳統手法還有威力。

問 ▶ 所以你覺得納許對你和你的工作有重要的影響？

答 ▶ 絕對的。他的工作以及史梅爾（Stephen Smale）的工作，這是 1960 年代初期諾威柯夫（Sergei Novikov）在暑期學校（summer school）中為我講解的，一直是對我最重要而全面的影響。

問 ▶ 你引 h -principle，這裡 h 代表同倫（homotopy），來探討一類源自微分幾何，而不是自然科學的偏微分方程式，如今這已是非常有力的工具，請為我們解釋 h -principle 以及引入這個觀念背後的想法。

答 ▶ 動機正是來自史梅爾和納許的工作。那時我理解到他倆處理的是大致相同的題材——但在過去一直沒被釐清。舉例來說，如果用納許的技巧，不必用什麼高深的東西，立刻可以一網打盡所有浸入（immersion）的結果。納許的第一個引理就證明了拓樸裡所有的浸入定理！這些讓

我思索了好多年，嘗試瞭解背後的機制。我領悟到有個簡單通用的機制，比較形式但可以把兩人的想法整合起來。可以用到許多類型的方程式，因為是橫跨兩個頗為遙遠數學主題的連結（interpolation）所以涵蓋的範圍很大。

問 ▶ 你證明了一個著名的定理，它綜合了米爾諾（John Milnor）／沃爾夫（Joseph Wolf）及提茲的定理。這個定理告訴我們一個以多項式速率增長（polynomial growth）的有限生成群，必定包含一個有限指標（finite index）的幂零子群（nilpotent subgroup）。你的證明最讓人稱道的是，實際上你用了希爾伯特第五問題。顯然，自從格里森（Andrew Gleason），蒙哥馬利（Deane Montgomery）和齊平（Leo Zippin），解決它以來，這是第一次意義重大的應用。請為我們說明並加以引伸？

答 ▶ 我曾經想將這個定理在不同的脈絡下應用到黎曼幾何，靈感來自馬古利斯（Gregory Margulis）1967 年關於 3 維阿諾索夫流（Anosov flow）的論文和他 1970 年引入的準等度量（quasi-isometry）對莫司特剛性定理（Mostow's rigidity theorem）的詮釋。我想要證明一些東西，不過卻是錯的。我試著用拓樸動力學中某個版本的舒布／法蘭克斯建構（Shub-Franks construction），也不行。同時有一篇赫許（Morris Hirsch）的文章，考慮的正是多項式增長速率的問題——是這個問題的特殊情形——嘗試的方法是拓樸群的分類，同樣不行，所以我相信這個方法不管用。我們大

致明白很接近卻又還是行不通。但是我試著運用這套辦法將流形極限的想法形式化時，我察覺到可能行得通。對我可說是個驚喜。

問 ▶ 當你發現這樣可行，一定是個非常美好的經驗。

答 ▶不過，這並不真的是乍現的靈光。我領悟到所需要的不過是觀念上一點點的改變，接下來要做的不難。在某種意義上，證明極其簡單。利用極限的一個顯然的觀念，再藉助分析的威力，可以多次趨近極限，創造出前所未見的結構。你不覺得做了什麼，卻奇妙地達成了些事，讓我很意外。

問 ▶ 你引入了從無窮遠處考慮群的想法，能恰當的描述群所連結的一串度量空間在所謂的格羅莫夫／豪斯朵夫度量（Gromov-Hausdorff metric）之下的極限。這個技巧在你的運用下有深刻的效果，請談談你的看法。

答 ▶在用極限與這個想法證明了關於多項式速率增長的定理之後，范登維司（Lou Van den Dries）和威爾基（Alex Wilkie）用超濾套（ultrafilter）給出一個更好的證明。於是我再回頭考慮它，發現這個定理適用的範圍更廣，包含極限雖不存在但超極限（ultralimit）存在的情形，而且還對許多數學物體，包含群，提供了非常好的看法，不過仍然沒達到雷霆萬鈞之力。

在群的方面，我受到《字問題》（*Word Problems*）書中舒普（Paul Schupp）針對小消去

理論（the small cancellation theory）總覽（survey）的影響^①，他說「大家並不瞭解小消去群是什麼」，我認為這是非常坦率，非常有用的評語。這話讓我覺得很舒坦，因為我也不瞭解。我開始思考到底什麼是小消去群，後來就引出雙曲群的觀念。我蠻開心的，不過在寫出文章之前，我有段時間無法處理一些技術上的問題，例如證明一個類似的卡當／阿達瑪定理（Cartan-Hadamard theorem）。

問 ▶ 你什麼時候引進雙曲群的概念？

答 ▶我最早學到群的幾何是在 1960 年代中期，卡茲丹為我解釋庫羅什子群定理（Kurosh subgroup theorem）的拓模證明。後來我讀了 1971 年《數學新進展》（*Inventiones Mathematicae*）同一期中的兩篇文章：格瑞菲斯（Phillip Griffiths）關於複雙曲性（complex hyperbolicity）的論文，以及克林根貝格（Wilhelm Klingenberg）關於雙曲型流形的論文。後者有雙曲性大致的想法，雖然主要定理並不正確。還有前面提到舒普的論文。

1978 年在石溪大學的會議我第一次提出雙曲群的定義，命名為 $Is(2)$ 群，因為它滿足二維的線性等周不等式，文章在三年後刊出。記得我在 1977 年的 Arbeitstagung^② 也講過。我試了大約十年，

^① [編註] *A survey of small cancellation theory*. In: *Word Problems*, pp. 569-589. Amsterdam: North-Holland 1973。

^② [編註] 自 1957 年起，由赫茨布魯赫（Friedrich Hirzebruch）發起，在波昂舉辦的世界數學家年會。會議主旨是以交換訊息的方式，傳播最新的研究思維，以即時方式進行，而非會前規劃。

想要證明每個雙曲群都可以成為（realizable）一個負曲率空間，沒有成功，到現在還不知道對錯。後來葛斯登（Steve Gersten）說服我把已知的結果寫下來，我寫了但很不滿意，因為不能確定是否真的需要這類群的理論；如果它們真的如我所說是「幾何的」，就不需要雙曲性的理論，而且應該會有些更好的定理。

問 ▶ 你說過幾乎所有的群都是雙曲群？

答 ▶ 對，這正是關鍵。當我瞭解到在某些通用的建構（generic constructions）中，不需要曲率就可以更清楚的看到雙曲性，於是我接受雙曲性這個觀念，認為它有存在的價值。在這方面的第一篇文章中，我建議了一個頗為技術性的定義和術語，認為那是初步的概念。但是最終我體認到，不管我嘗試證明的幾何化定理是否成立，這個概念可能都是正確的。此外，1980 年代初期瑞普斯（Ilya Rips）在組合的框架下發展出雙曲群的理論，遠遠超出當時我所知道的，那時和他的討論以及正在發展中的瑟斯頓（William Thurston）的 3D 理論，還有坎農（James Cannon），對瑟斯頓有理性猜想（rationality conjecture）的解，這些都鼓勵了我。

問 ▶ 讓我們換個領域，辛幾何（symplectic geometry），你在這方面同樣有革命性的貢獻。你引入複分析的方法，也就是擬全純曲線（pseudo-holomorphic curves），請談談你的想法，解釋如何得到這個新穎的切入方式，還有與

這個相關，和弦論有關的格羅莫夫／韋頓不變量（Gromov-Witten invariant）。

答 ▶ 好的。這個奇妙的發現我記憶鮮明，到現在都歷歷在目。那時我正在閱讀波戈列洛夫（Aleksii Pogorelov）的凸曲面剛性性質的書，書中用到貝爾斯（Lipman Bers），和威俚（Ilya Vekua），發展的所謂準解析（quasi-analytic）函數，他討論某些微分方程，並且說它們的解是準解析函數。我無法理解兩者有什麼共通處，我翻閱他的書以及這些人的文章，但一點也不懂，到現在都還是。我非常不開心，可是當我用幾何的語言來思考，立刻看到那裡有個殆複結構（almost complex structure），而解就是這個殆複結構的全純曲線。這沒什麼特別，因為任何兩個變數的橢圓系統都有這個性質，它與柯西／黎曼方程有相同的主要符號（principal symbol）。一旦採用這樣的說法，他用的定理就顯而易見。不需要引用任何理論，因為複數本身有個強制的定向（orientation），就只需要這個。

問 ▶ 你說顯而易見，但是沒有多少數學家知道這事。

答 ▶ 確實如此。他們一頭鑽進定理的證明，卻從不抬頭審視，一旦換個語言檢視，就清晰可見，因為有代數幾何的經驗。只要懂得代數幾何，就會觀察到它們是同一回事。如今複分析和代數幾何已經發展得很成熟，知道這些理論，就會覺察到沒什麼不同，用到的只是其中的一部份，不過是

在更廣義的層次。其次，老實說有段時間我嘗試用它來重新瞭解多納森理論，不過不成功，因為有些技術上的困難無法克服。其實，它與 4 維流形是否是凱勒障礙（Kähler obstruction）類似。我找德利涅（Pierre Deligne）問他是否有不是凱勒同時具有某些糟糕性質的複曲面，他說有，並且舉出一些例子。我轉而考慮辛的情形，發現可以如法炮製。所以再一次，一旦知道該往哪裡走，事情就很簡單，簡單得讓我不敢相信竟然行得通。因為過去只有多納森一個前例，是多納森的理論告訴我們如此論證可以導出這樣的結論。在多納森之前沒有，如果不是多納森的發現給我莫大的鼓勵，我可能不會認為這行得通。此外，1960 年代晚期我從富克斯（Dmitry Fuks），那裡知道阿諾德猜想（Arnold conjecture），還有伊利艾許伯格，在 1970 年代發展辛剛性（symplectic rigidity）的想法，以及康利／山德定理（Conley-Zehnder theorem），這些背景讓我能夠做到上述的工作。

問 ▶ 能不能談談帕瑞爾曼（Grigori Perelman）和漢米爾頓（Richard Hamilton）關於龐卡赫猜想（Poincaré conjecture）的證明，他們是否用了你的結果？

答 ▶ 沒有，即便有，也只是非常簡單的東西。那是完全不同的數學，我知道它和幾何相關，不過是次要的，基本上是一類相當不同的數學，我得承認我的瞭解僅止於皮毛。但我必須說，比起我們對廣義的柯西／黎曼方程，或是楊／米爾斯，

多納森，賽伯格／韋頓等方程的瞭解，這裡基本上是尚未開拓的領域。有這個定理在這裡，但是多少還是孤立的，沒有以它為中心更廣的知識，我們必須等等，看看未來的變化。當然我們期望它能蓬勃發展。

問 ▶ 你和孔涅（Alain Connes）有交流嗎？

答 ▶ 喔，當然。我們頗有互動，雖然我們思考的方式很不一樣。他理解一半，我理解另一半，當中只有一丁點交集，不可思議的，有時候竟然得到管用的結果。我和他以及莫斯柯維奇（Henri Moscovici）已經合寫了兩篇文章，證明諾威柯夫猜想的一些特殊情形。

問 ▶ 你想出來某些群上的擴張（expander）的例子，造出包姆／孔涅猜想（Baum-Connes conjecture）的反例。

答 ▶ 這個反例是由希格森（Nigel Higson），拉福格（Vincent Lafforgue）和斯坎達利斯（Georges Skandalis）利用隨機群的建構得到的。

問 ▶ 有沒有一個定理或結果是你最引以為傲的？

答 ▶ 有。毫無疑問，就是引入擬全純曲線。其它的都只不過是溫故而將已知的看起來像新發現。

問 ▶ 你太謙虛了。

生物數學

問 ▶ 聽說你近來對生物數學很感興趣，請談談涉及其中的情形以及如何將你在數學上與幾何上深刻的見解運用在生物問題上？

答 ▶ 我可以說明自己如何接觸生物數學。我還在俄羅斯的時候，大家都為董姆（René Thom）將數學應用到生物的想法雀躍不已。我後來的動機則是由數學的角度出發，從雙曲群開始，我發現雙曲馬可夫分割（hyperbolic Markov partitions）與細胞分裂的過程大致類似，於是我翻閱文獻也與人討論，知道有所謂的林氏系統（Lindenmayer system）。許多生物學家認為這些系統代表一個很好的、用替代及細胞分裂的模式來描述植物生長的方法。

基於此，我們在畢悠（Bures-sur-Yvette）的法國高等科學研究院（IHÉS）辦了一個特別針對生物學裡模式成形（pattern formation）的會議，因此激起了我的興趣想要多知道些生物學。很快的，我就瞭解由於基因工程以及聚合連鎖反應（polymerase chain reaction, PCR）的發現，分子生物學在 1980 年代有巨幅的進展。PCR 實際上就是數學程序（mathematical procedures）在活體細胞上的應用，數學家很有可能發明 PCR，不過沒有，但數學家應該能夠發明 PCR。這是二十世紀重大的發明之一，完全改變了分子生物學。我著手瞭解這些數學程序，開始認識到它們導向奇妙的數學問題，但是很難明確說出到底是什麼，我還不能具體陳述。當然，有些特定的演

算法用在特別的領域如定序（sequencing），但是這不是新的數學；是原有的數學應用在這個領域。我認為那裡應該有我們不知道、待發現的數學。它將作為一個框架，就像微分方程為古典力學提供一個框架。這個框架應該是頗為抽象而且形式的（formal），不但內嵌我們對生物的基本認識，也許還能累積現在未知的成果。我一直在思考這些，不過還沒有答案。

問 ▶ 請說明 PCR 這個名詞。

答 ▶ 就是聚合連鎖反應。可以這樣來看：在一個鼠輩猖獗的地球上，老鼠們看起來沒有差別。實驗室裡也有老鼠，外觀一模一樣，卻不同種。好了，假如有一隻雌鼠溜出實驗室，一年後想知道它是否仍然存活。但面對億萬隻老鼠，總不能一一檢驗，怎麼辦？這裡有個想法——放出數以百萬計的公鼠，萬一那隻開溜的雌鼠還在，應該會有實驗室品種的鼠群出現，等待一段時間之後，它們的數量就會增加到好幾百萬，於是取樣檢驗是否有這個品種的老鼠。這就是聚合連鎖反應的作用，不過不是用老鼠而是 DNA。面對上百萬不同種類的 DNA，想要知道其中是否有特定的 DNA，一個辦法是藉由置入由這 DNA 作用而幕次倍增加的分子證實。如果有，經過幾個循環將會增加到數百萬之多。這個讓人拍案叫絕的想法極簡單而有效。生物中一個基本的現象就是放大，是生物學特有的。數學應該對生物學家有用，目前還做不到，但我相信可以做到，將會影響基因工程以及辨認基因功能等問題的研究，不

過還沒有發展出來，與別的數學也會大為不同。

數學與科學之間的互動

問 ▶ 在你的印象中，你或其他數學家的工作，生物學家認可嗎？感激嗎？

答 ▶ 我什麼都還沒做，只是和生物學家交流。不過，我想當中許多人很滿意和我以及其他數學家的對話，不是因為我們知道些什麼，而是因為我們問了許多問題。有時候他們不能回答，但是這些問題讓他們思考。大致就是這樣，不過在我看來也不是微不足道。像這樣，數學家作個很好的傾聽者，對他們是有幫助的。

數學家在科學上有成就的非常少，其中最顯著的事例就發生在挪威，19 世紀中葉，數學家古爾德貝格（Cato Guldberg），和化學家瓦格（Peter Waage）合作發明了化學動力學（chemical kinetics）。我不知道後來還有沒有數學家在實驗科學上達到這種程度的貢獻，由這個例子看來可能性不是沒有，不過要通過與實驗科學家的緊密合作，而且是在特殊的情形之下。類似的事情也許可能在生物學發生，但是不容易。

問 ▶ 因為對化學感興趣而知道古爾德貝格和瓦格？

答 ▶ 是的。這是化學以及分子生物學的基本方程式，是其中事物的基礎。數學家可以在科學上有所貢獻，但不是那麼容易，不可能預先規劃，必須親身參與，在極為希有的情形下，意想不到的

事發生了，為科學帶來強勁的衝擊。

問 ▶ 在與阿貝爾獎相關的活動中，我們很驚訝的發現阿貝爾系列演講中的科學演講，主題是電腦繪圖（computer graphics）。據說電腦繪圖，或電腦視覺（computer vision），尤其是形狀分析（shape analysis）得益於你的發明：格羅莫夫／豪斯朵夫距離（Gromov-Hausdorff distance），是否可以說明這個觀念從何而來，如何應用？

答 ▶ 影像比對的癥結在於如何比對。早期電腦視覺的工作，是基於將兩個影像比對之後，強調兩者相異的部分，這太令人詫異，對幾何學家來說簡直不敢相信，因為完全違反了眼睛運作的模式。其實，眼睛對影像如何運作的探討上溯龐卡赫（Henri Poincaré），在他有名的著作《科學與假設》（*Science and Hypothesis*）中，思考人如何由自身的經驗來建構歐氏幾何，他以幾乎數學的論證說明如果我們的眼睛不能移動是不可能建構出歐氏幾何的。所以實際上你重建——也就是我們腦海裡記錄視覺訊息的方式，是根據眼睛的移動而不只是眼睛所見。粗略的說，眼睛做的是搬動影像而不是在腦中增加影像，它必須把影像歸納到正確的類別中，大致就像黎曼幾何中以小的彎曲變形和比對，在豪斯朵夫收斂（Hausdorff convergence）或任何方式的收斂下做的分類。

對於讀過龐卡赫著作的數學家，這很明顯。但是對於從事電腦科學，接受線性分析那些不同訓練的人，則是完全不明顯。看來他們後來將幾何的想法引入。其實自從對視覺感興趣，我去聽了

薩皮羅（Guillermo Sapiro）好幾次的演講，他長時間以來一直思索如何分析影像。

問 ▶ 看來調和科學與數學的機制不夠。

答 ▶我完全同意。何止不夠，說「不夠」還太客氣了，簡直接近零。這兩個社群由於種種技術上的原因變得極其疏離，絕少交流。庫朗研究所（Courant Institute）則是一個令人高興的例外。在那裡，我們還有許多人彼此互動，結果就是數學家愛上科學。庫朗的這些年輕人真的讓人振奮，因為其它任何地方看不到這樣的應用數學家。另一方面，他們對純數學整體有相當的認識，知道可以從哪裡借用想法加以應用。一般來說，應用數學家與純數學家是涇渭分明的兩個群體，有點彼此看不順眼，很荒謬，應該改變才是，因為我們有相同的目標，只是從不同的邊來瞭解世界。

問 ▶ 要改善這種情形，你有什麼想法？

答 ▶沒有。不過我認為不論哪個學科發生這種問題，唯一的建議就是必須從檢視問題著手。對這個問題，我知道得不多只有零星的例子。我們應該看看在哪裡沒問題，又在哪裡發生問題，嘗試以新的方式來組織安排。不過做法必須和緩，不能強迫數學家作他們不情願的事。顯然的作法是設計良好的、結合數學與科學的教育。事實上，在巴黎有個為非生物人開的很好的生物入門課，由塔迪（François Taddei）主持，對象是年輕的

數學人與物理人。他非常有影響力，充滿熱忱與動力。我去聽了幾堂課，很引人入勝。他過去在高等師範學校（École Normale Supérieure）教數學家和物理學家們生物，成功的將生物的概念讓人人可以理解，我認為這是初步該做的。必須要有這類特別的，不在任何制式課程中，非形式化的教育。只有具備足夠熱忱與足夠知識的人才能勝任將這些知識灌輸給年輕人。在教育體制內設計這樣的系統，相當困難，而且任何讓這個系統定於一尊的作法都是危險的，反而可能讓它無法發揮預期的功效。將數學強加於非數學家只會讓人不舒服。

問 ▶ 剛剛的談話中你提到在庫朗研究所的情形，不過你在巴黎近郊畢悠的 IHÉS 時間更長，請說明這個機構在你的研究工作以及生活中的角色？

答 ▶那是個了不起的地方。還沒去之前，我已經知道這個傳奇的地方，因為格羅騰迪克（Alexander Grothendieck）在那裡，他在數學裡就像神祇一般。我在石溪大學的時候認識了蘇利文（Dennis Sullivan），後來又在 IHÉS 碰面，從與他交談學到許多數學。我認為自己能到 IHÉS，得力於他的引介，因為他喜歡我的工作，我們互動頻繁。蘇利文和許多人互動，他有一種奇妙的能力，能介入任何想法——加以吸收，讓它進一步發展。另外一位在那裡的大師是董姆，不過除了數學，他已經跨入哲學領域。還有德利涅，從德利涅那裡學到的東西多半都是我正需要的；好幾次我問他問題，得到奇妙的答案。他可以把你腦袋裡的

想法轉變到另一個方向。

基本上，這個機構營造出的整體氛圍非常特殊。除了研究以及與人討論之外，幾乎完全自由——一個獨特的地方。回想起來，我最好的回憶是在那裡擔任第一年訪問學人的時候，真是自由自在。當我成為正式成員，就有些義務，不多、但有。能在那裡訪問半年放鬆一下，是很理想的。不過成為永久成員也不壞。

問 ▶ 你最好的工作是在畢悠作的？

答 ▶ 是的，我想是在 35 到 39 歲之間，是我研究能量最豐沛的時期。

電腦之於數學家及數學

問 ▶ 顯然，電腦的使用大大改變了數學家的日常生活。大家用電腦與人交流，幾乎每個人都使用電腦工具編寫論文，不過也有人以電腦作為研究的主要設備。你的經驗如何？用電腦嗎？

答 ▶ 沒有，很遺憾，我並不擅長。我只用來打論文，而且是最近才學會的。我確信有些數學，特別是與生物有關的數學將來無法與電腦分割。當想法實際上必須與電腦實驗結合，將是不同的數學。我們必須學會不用真正瞭解每個數據的意義，只掌握大原則來運用大量的數據。當然這些已經發生了，但不夠快。對生物學，時間的因素很重要，因為要找到對治疾病的方法，或者至少對人類的種種疾病有所瞭解，愈快愈好。數學家

通常不受時間制約，沒有解決問題的急迫感。對於生物學的迫切需要，數學家可以加速它的進程，電腦絕對是其中不可或缺的部分。我認為電腦將以這樣的方式在目前以及未來扮演關鍵的角色。

問 ▶ 所以，電腦終究將改變做數學的方式，在 50 年之內？

答 ▶ 我認為 50 年之內電腦將有根本的改變，電腦程式發展得很快，我也認為數學家在這方面可能有極大的貢獻。果真如此，50 年之內電腦會非常不一樣。事實上，一直以來沒有人預測出電腦的發展。只消看看 30 年前艾西莫夫（Isaac Asimov）根據 70 年代的機器人和電腦，想像出的 21 世紀時它們的樣貌。我們可能無法想像 50 年後會發生什麼，只能說跟現在很不一樣；科技正以高速突飛猛進。

問 ▶ 你怎麼看量子計算（quantum computing）？

答 ▶ 我不是能說上什麼的專家，應該問物理學家，不過，他們之間看法也很分歧。印象中實驗物理學家相信做得到，而理論物理學家則認為：「不行，不行，做不到的。」這是我大致的印象，但不是我的看法，因為這兩方面我都不瞭解。

研究數學的方式

問 ▶ 一直以來大家公認你在致力研究的每一個題材

都能引進影響深遠的原創觀點。對於如何做數學，特別是針對問題如何下手，是否有一套基本的策略？

答 ▶我能說的只有：必須全力以赴。這就是我們做的，努力，再努力；思考，再思考，沒有別的竅門。一般來說想做一個問題，那麼就像數學家們從以前就知道的，必須在思（自己思索）與學（從他人那裡學習）之間取得平衡。每個人都必須根據自己的能力找到適度的平衡，因人而異，沒有人人適用的建議。

問 ▶你覺得自己更偏向解決問題還是建立理論？請用這兩個詞來形容自己。

答 ▶要看當時的情形，有時你只想解決一個問題。當然隨著年齡增長，變得愈來愈傾向理論。一部分因為智慧增長，不過也可以說是因為精力不比從前，就看你怎麼看了。

問 ▶關於做數學的方式，你是否念茲在茲的思考數學？

答 ▶是的，除非有私事干擾讓我無法思考。如果一切順當，而且沒有其它的事要做，我會將自己沈浸在數學，或者別的學科例如生物學當中，不過是以數學的方式。

問 ▶每天花多少時間作數學？

答 ▶不比從前多，年輕的時候，我可以整天持續工作，有時候從早上 9 點到晚上 11 點，沒有事能讓我分心。當然現在不能再這樣了，每天只能工作 5、6 小時不感到疲倦。

問 ▶年輕的時候精力比較充沛，但現在你更有智慧，對不？

答 ▶你可以說隨著年紀的增長多了歷練與智慧，但是精力也隨著年歲衰減，這是必須接受的事。是否更有智慧，倒也未必，不過精力顯然比以前差。

問 ▶馮諾曼（John von Neumann）曾經說過在 30 歲之前做出最重要的數學。當他 30 歲的時候，又加上：年紀大了更有智慧。你認為自己最好的數學是 30 歲之前完成的嗎？

答 ▶我只能談我自己的情形，我覺得自己最好的工作是在 30 到 40 歲之間。剛開始的時候我沒有任何前景，做問題不加揀擇，有什麼做什麼，隨著學習知道更多的東西，我不停的改變自己的態度。現在如果重新開始，我會投入完全不一樣的事，或錯或對，我無法斷定。另一方面，我必須說現在我思考的每一件事，都是 40 年前已經想過的，這些想法在心中長期醞釀。也許有人在晚年創造出嶄新的東西，但是基本上某些感覺是早年就開始發展了。就像語言的能力，我們 3 歲學說話，這不表示 3 歲和 30 歲有同樣的表達能力，道理是一樣的。

問 ▶我們很驚訝你如此謙虛，貶抑自己的成就，也許你的想法單純自然像你說的，不過從這些想法要得到結果，多少需要些與眾不同的聰明才智，不是嗎？

答 ▶不是我特別謙虛，我也不認為自己是個白癡。做數學的時候，通常不會想到自己。一位朋友抱怨每當他想到一個好點子，得意於自己的聰明，興奮得接下來無法工作。所以很自然的，我盡量不去想這些。

問 ▶你前面提到一直以來工作得非常投入，你曾經因為透支精力而情緒低落嗎？

答 ▶沒有。有時候外界不愉快的事讓我分心，當然也有時候工作得很累，很高興有人打岔暫時停下工作。其它時候，就是工作、工作，像個上癮的人，所以能休息一下是蠻好的。

阿貝爾與阿貝爾獎

問 ▶你會抱怨，數學界只消化了你的研究中比較技術、次要的細節，而不是背後恢宏的想法和視野。得到阿貝爾獎你認為情況會改變嗎？

答 ▶首先，這是半開玩笑的抱怨。在有些工作中，我的想法沒辦法跟其它想法一樣比較成功的發展，我因而有點灰心。沒有發展下去的原因見仁見智，可能是想法本身不夠好，也可能是沒有受

到重視，到底為什麼並不清楚。我希望自己的主張能往前推進，不過事與願違，這是我的抱怨，或者說我的抱怨來自於此，與阿貝爾獎毫不相干。

問 ▶一般來說，對於「獎」你有什麼看法？阿貝爾獎呢？

答 ▶客觀的說，我們不需要頒獎給已經卓然有成的數學家，需要的是對各個階段年輕人的鼓勵，我們必須在這方面付出更多努力。另一方面，能得到阿貝爾獎是莫大的榮幸。我很開心，而且可能因為這個獎提升一般大眾對數學界整體的正面觀感。這或許是我自圓其說，當然，因為我喜歡我的工作受到朋友們的認可欣賞，還有我喜歡這個獎。但從大眾科學的角度，更重要的課題是投入更多更大的努力，籌措經費，教育以及啟迪年輕人擁抱數學。今天稍早訪問奧斯陸這裡的中學，所見到的以及那些年輕孩子們，讓我留下深刻的印象，我希望在世界各地都能有這樣的活動。數學家當然不是那麼不食人間煙火，不伎不求，不把得獎放在心上，但是長遠來看，打造數學未來的不會是各種獎項。

問 ▶回到阿貝爾，他是你仰慕的數學家嗎？

答 ▶絕對是。我前面說過，引領數學從可以看到、即刻體驗的層面，走向更有深度、有根本結構這個轉變的主要人物，即使不是他，他也是其中之一。



格羅莫夫與他的阿貝爾獎。(Erlend Aas/Scanpix 攝)

問 ▶ 阿貝爾有一篇關於方程理論的文章，在他過世之後才發表，後來成為迦羅瓦理論（Galois theory）。他在前言中有段話很有意思，大致是：「一個看似束手無策的難題，困難只是看似如此，因為我們沒有問對問題，只有正確的提問才能解決問題。」

答 ▶ 正是如此。他改變了我們問問題的視角。我對

數學史知道得不多，但很明顯的，是阿貝爾的工作和他考量空間、函數的方式，改變了數學。數學結構裡對稱的觀念很多來自他的工作，不過我的歷史知識不夠，不能指出發生的確切時間。到現在數學依然循著這些觀念發展，先是迦羅瓦理論，繼之以李（Sophus Lie）所發展的李群理論，到了近代則推進到更高的層次，特別是格羅騰迪克的工作，這些發展一直持續下去，方興未艾。我們必須通透所有這些發展，瞭解它們將我們帶往何處，才能知道下階段何去何從。這是我們現在作的所有數學的基礎。

數學的未來

問 ▶ 在對數學史回顧之後，讓我們對數學未來的走向稍做推測，如何？你會將數學的整體建構比做希爾伯特樹（Hilbert's tree），以不同領域之間接近的程度作為它們的度量結構。從哥德爾（Kurt Gödel）的工作知道，這棵樹有些部分我們永遠無法達到。另一方面有些部分我們可以理解，卻又不知道這部分到底有多大。你認為我們對希爾伯特樹已經有相當程度的瞭解嗎？人類的心智能夠進一步擴大所能掌握的部分，還是有些地方是我們永遠無法瞭解的秘境？

答 ▶ 事實上，我也正在思考這些。我沒有答案，但有個如何著手的大綱。說來話長，有一些基本的運算可以讓我們察覺樹的結構，如果將這些運算列表，它們顯然可以引領我們到達樹的某些部分。這些運算不是公設，與公設大相逕庭。但

是最終不可能靠徒手來審視得到的結果，必須用電腦——得出某些結論但不知道中間的過程。這樣做電腦的計算量太過龐大，必須將作法形式化（formalize）找出計算的一些策略。這是目前我想得到的，但我沒有答案。有些間接的跡象顯示這樣做是可能的，不過這些跡象本質上比較生物，而不是數學的。

問 ▶ 如果從現在看未來的 50 年，100 年……。

答 ▶ 50 年和 100 年差別很大。未來 50 年如何，我們心中多少有譜，還是繼續現在的方向。不過地球的基本資源將在 50 年內消耗殆盡，之後如何我們無法預測。水、空氣、土壤，稀有金屬，更不要說石油都快匱乏。所有的資源基本上都將在 50 年內走到盡頭。接下來如何？令人膽戰心驚。如果能找到解決的方法，也許可以安然度過，不然很快的所有一切都會結束。

數學也許可以幫忙解決這個問題，如果不行，將來恐怕也不會有什麼數學了。

問 ▶ 你很悲觀？

答 ▶ 我不知道，看你做什麼。如果我們繼續盲目的向未來前進，百年內將有大災難，而 50 年已經進入決定性的關鍵時期，50 只是個估計，也許 40 也許 70，不過問題必定會發生。如果我們對這些問題嚴陣以待，設法解決，就太好了。我認為我們有解決問題的潛力，但是這個潛力一定要用出來，就是教育，上帝不會幫我們解決，大家

一定要有理念從現在就開始準備。必須教育兩個世代的人；教師的教育現在就必須開始，然後他們可以教育新一代，這樣就會有足夠的人力，有能力面對上述的困境。我確信這是個有效的作法，如果不成，將是災難。簡單的計算就知道這是個幕次的進程，以這樣的幅度走下去，最終將爆炸毀滅。比方說，沒有土地，全球各處的地力都在衰竭中，這件事宣傳得不夠，更不要說水資源。這不是無法克服的問題，但是解決之道需要社會、智識各個層面的努力，範圍之廣，前所未見。

未來的教育體系

問 ▶ 教育顯然是個關鍵因素。早先你曾表示憂心，有天才的青年心性才智沒有得到有效充分的發展，有沒有任何改變教育讓它更能適才揚性的想法？

答 ▶ 還是那句話，必須下功夫研究，沒有絕對的方法。看看像阿貝爾這樣兩百年前的古人，現在再也沒有阿貝爾們了。另一方面，受過教育的人，數目大幅成長，但是像阿貝爾這樣的人在哪裡？這表示教育的方式不恰當，表示他們被毀了，教育摧毀了這些潛在的天才——沒有這樣的人才了！也就是說教育在培養這些人上沒有發揮它的功能。關鍵在於必須適才適性，不同的秉賦，給予不同的教育，現在不是這樣。比起一、二百年前甚至五百年前從文藝復興以來，儘管人口多得多，我們卻沒有比那時更偉大的人物，問題可

能出在教育。這也許還不是教育最嚴重的問題，許多人相信很奇怪的事，因此做出非常奇怪的決定，你們也許知道，在英國有些大學有由政府資助的順勢療法（homeopathy）的師資群，大受學生的歡迎。這是任何人都能夠學的無意義的東西。真遺憾。

問 ▶你指出阿貝爾的成就如今沒有人或是很少有人能夠企及，是不是在我們的教育體系中，設計不夠周延，對於資賦特別優異的人，可能是因為他們的想法奇特，離常規很遠，以致於沒有照顧到他們？

答 ▶教育牽涉的問題不是那麼顯然。有些動物實驗指出訓練動物的方式並不是我們以為的，就像物理裡有隱藏的機制，大腦學習的機制與我們從日常經驗得出的觀點大為不同，後者可能是完全扭曲的。因此，我們也會扭曲有些孩子潛在的特殊能力。

教育應該有兩個相反的目標：首先，教導人們融入他們所處的社會；另一方面，給予自由任由他們盡情發展。這是兩個相反、永遠衝突的目的，造成某些人在適應社會的過程中受到壓抑。目標不同引起的衝突是難免的，但在各個階段的教育中我們必須在兩者中求取平衡，雖然不容易。

有些有趣的實驗觀察黑猩猩與倭黑猩猩在哪些情形下能夠學習，或是如何訓練鸚鵡說話。怎麼做呢？關鍵在不能讓它看到訓練它的人。在鸚鵡與人之間放一面鏡子，人躲在鏡子後面，鸚鵡看

到的是鳥——它是與鳥說話，如果看到的是人，就學不好了。這事一點都不簡單，面對教師，也就是一個權威，鸚鵡就不受教。過去累積的種種證據顯示，我們無法對教與學的問題做單純的決定。如果你要學生「做這，做那」一定無效。沒有顯而易見的解答，只有深度剖析目前確實知道的情形，以及研究各種可能，才能得出解決之道，我認為這些答案將出乎意料。我們不知道什麼是小孩子有能力學的，什麼是學不來的，因為我們沒辦法進行在道德上無瑕疵，同時又能提供許多資訊的實驗。這是非常不容易的議題，很少人做過，有動物實驗的結果，針對人的很少。

問 ▶讓我們回到數學和數學教育。許多人似乎在高中畢業之後就和數學分道揚鑣，但身為數學家，我們知道數學無所不在，也許是隱而不顯：它是科技的載具，也是人類文化的支柱，強調嚴謹與有條理的思考。如何讓社會理解並且欣賞數學的這兩種角色；如何讓決策者體認到數學須要支持，你有沒有什麼想法？

答 ▶這是很難的問題，因為我們必須將數學的想法傳達給離數學很遠的一批人——在社會上做決策的人。我們思考的方式與他們運作的方式大不相同。

我想也許數學界可以從教育出發，例如為兒童打造好的數學資源，現在有網路，我們可以嘗試用網路來呈現數學資源。事實上，法國就有人這麼做，正在為幼童設計小規模的課外活動，我們應該嘗試進行大規模的類似的活動：有一些

大的激發全方位創意的中心，不僅聚焦數學，還包括科學、藝術以及任何能提升年輕人創作的活動。在這些發展之後，數學家對社會也許會有些影響，但不是之前，處在象牙塔裡的我們能說什麼？我們太安於象牙塔裡的生活，但是我們也真的沒辦法說上什麼，因為我們對世界的瞭解不夠透徹。我們必須走出來，不過不容易。

問 ▶ 你提到讀了拉德馬克和托普立茲寫的《數與形》引發你對數學的興趣，我們還想到庫朗和羅賓斯（Herbert Robbins）的《數學是什麼？》（*What is Mathematics?*）我們是不是應該鼓勵對數學有興趣的中學生看這類的書？

答 ▶ 是，我們還要有更多這樣的書。現在已經有一些不錯的書，嘉德納（Martin Gardner）的書，帕瑞爾曼（Yakov Perelman）的《數學可以有趣》（*Mathematics can be fun*），亞古隆姆（Isaak Yaglom）與他人合著的書，這些書都非常出色。別的數學家可以加入書寫的行列並且與網路結合，尤其是將內容視覺化。

單單寫一頁有趣的數學相對來說是容易的，這是應該做的事，讓數學中許多不同的主題容易親近。數學社群應該走出去，在網路上搭起這樣的結構，這是相對簡單的事。下一個階段就比較複雜；寫一本書並不簡單。數學界應該鼓勵大家做這件事，這是值得推崇的事。數學家常把「不過是些庸俗的東西，不夠嚴謹」掛在嘴邊，但這是不對的，要寫出一本廣受歡迎的書非常困難，必須有通透深入的瞭解，才能以最淺顯的方式呈現

出來，事實上能勝任的數學家極少。

問 ▶ 這樣可以讓更多年輕人學習數學。

答 ▶ 可以吸引更多年輕人。進一步讓政治人物更容易感受到這個情況，因為這樣做比起我們自己閉門造車能引起更多人的興趣。

詩

問 ▶ 你說過自己喜愛詩，什麼樣的詩？

答 ▶ 自然，大多數我知道的都是俄羅斯的——二十世紀初期所謂的銀色年代的俄國詩作。可能有些詩人是你們不曾聽過的，我猜想他們的作品無法翻譯。西方熟知阿卡瑪托娃（Anna Akhmatova），但她不是最偉大的詩人。三位最偉大的詩人是：茨維塔耶娃（Marina Tsvetaeva），布洛克（Alexander Blok）和曼德斯坦姆（Osip Mandelstam）。

問 ▶ 普希金（Alexander Pushkin）呢？

答 ▶ 普希金的問題在於他的詩是學校上課教的，令我十分反感。不過四十年之後我重新發現了普希金，覺得他簡直好極了——在我把學校教的那套忘得一乾二淨之後。

問 ▶ 那麼現代詩還有英詩呢？

答 ▶ 我是念了些英詩，知道某些作品，但不夠多。

不容易，即便是俄羅斯現代詩，比方說，布羅茲基（Joseph Brodsky），我發覺要接受新的風格很難，要能理解一個詩人並不簡單。有些英詩我看了也很欣賞，有些容易理解，有些有俄文翻譯。愛倫坡（Edgar Allen Poe）的詩很出色，他的作品有種簡潔的況味，但是許多其他英國詩人在風格上與俄羅斯相去太遠。我對法國詩作略有所知，像是維永（François Villon），我能欣賞法文原作。不過現代詩對我而言太難了。

問 ▶ 我們代表挪威、丹麥以及歐洲數學學會謝謝你，訪談就此結束。 ∞

本文出處

本訪談進行於 2009 年 5 月 18 日，地點在奧斯陸。本文原刊登於歐洲數學學會的 *EMS Newsletter*（Sep., 2009），也曾刊登於美國數學學會 *Notices*（Mar., 2010），中文翻譯也曾刊登於《數學傳播》42 卷第 2、3 期。本刊感謝歐洲數學學會授權與《數學傳播》授權同意轉載。

譯者簡介

張清輝與李宣北為中研院數學所退休研究人員。

延伸閱讀

- ▶ “Science Lives: Mikhail Gromov”, Simons Foundation. 這是西蒙斯基金會的 “Science Lives” 的專題網頁在 2012 年 4 月 4 日與格羅莫夫訪談的影片。
<https://www.simonsfoundation.org/2014/12/22/mikhail-gromov/>
- ▶ 法國幾何學家貝爾杰（Marcel Berger, 1927~2016）是延攬格羅莫夫到法國 IHÉS 關鍵性人物，“*Enconter with a Geometer, Part I & II*” *NOTICES OF THE AMS*, VOLUME 47, NUMBER 2 & 3. 這是他所撰寫的關於格羅莫夫數學工作及影響的深入探討文章，讀者可以參照閱讀。



格羅莫夫與挪威國王哈洛德五世（King Harald）和皇后宋妮雅（Queen Sonja）會面。（Erlend Aas/Scanpix 攝）

《數理人文》訂購單

(請填妥資料後傳真至 03-5731915 或郵寄至交通大學丘成桐中心)

數理人文為半年刊，固定於每年之 1 月及 7 月各出版一期。

訂閱方案	優惠價
一年 2 期 (印刷品)	450 元
一年 2 期 (掛號)	490 元
二年 4 期 (印刷品)	900 元
二年 4 期 (掛號)	980 元

☐ 自_____年_____月號開始訂閱。

(未填寫期數者，將由最新一期寄發)

☐ 續訂依原訂閱到期後續寄送。

客服專線：03-5731915

客服信箱：alicefsy@math.nctu.edu.tw

yushan.deng@intlpress.com

基本資料 (請以雜誌收件者之資料為主)

姓 名：_____

性 別：☐先生 ☐小姐

電 話：日()_____

夜()_____

手 機：_____

E-mail：_____

收件地址：□□□

付款資料

付款總金額：優惠價_____元 × 份數_____ = _____元

☐ 郵 政 劃 撥 (劃撥帳號：50422323 戶名：馮肅媛)

您可以使用本頁所附之劃撥單訂購，並將交易憑證傳真至 03-5731915，或使用郵局之劃撥單訂購，並請在劃撥單上寫明訂閱方案、聯絡方式及 E-mail。

☐ 網 路 訂 購 (https://yaucenter.web.nctu.edu.tw/?page_id=78&lang=tw) 期刊之網站提供電子平台的訂購連結

發票資料

抬頭：_____ 統一編號：_____

98-04-43-04 郵 政 劃 撥 儲 金 存 款 單									
收 款 帳 號	5	0	4	2	2	3	2	3	金 額
									(阿拉伯 數 字)
									億 仟 萬 佰 萬 拾 萬 萬 仟 佰 拾 元

通訊欄 (限與本次存款有關事項)

- ☐ 自 年 月號訂閱
- ☐ 續訂依原到期數接續寄送
- ☐ 一年 2 期 (印刷品) 450 元
- ☐ 一年 2 期 (掛號) 490 元
- ☐ 二年 4 期 (印刷品) 900 元
- ☐ 二年 4 期 (掛號) 980 元

訂戶姓名：_____

連絡電話：_____

E-mail：_____

統一編號：_____

發票抬頭：_____

收 款
戶 名

馮 肅 媛

寄 款 人

☐他人存款

☐本戶存款

姓 名

申請人請於瞭解「郵政儲金匯兌個人資料直接蒐集告知聲明」內容後，填妥本單據交郵局辦理。

經辦局收款章戳

地 址
與 電 話

□□□-□□

主管：

◎寄款人請注意背面說明

◎本收據由電腦印錄請勿填寫

郵政劃撥儲金存款收據

收款帳號戶名

存款金額

電腦記錄

經辦局收款章戳

虛線內備供機器印錄用請勿填寫