從三角形到流形

●作者：陳省身　●譯者：尤承業

作者簡介：陳省身（Shiing Shen Chern，1911 年 10 月 28 日～2004 年 12 月 3 日），生於浙江嘉興秀水縣，美籍華裔數學大師，第一屆中央研究院院士，同時是法國科學院、義大利國家科學院、英國皇家學會和中國科學院的外籍院士。他是 20 世紀最偉大的幾何學家之一，也是最有影響力的數學家之一。於 1982 年在伯克萊大學退休後，建立了美國國家數學科學研究所（MSRI）。1984 年獲頒沃爾夫數學獎，是第一位得到沃爾夫獎的華裔數學家。國際數學聯盟（IMU）為了紀念陳省身的卓越貢獻，在 2014 年還特別設立了陳省身獎（Chern Medal）作為國際數學界最高級別的終身成就獎，這是第一個以華人為名的國際數學重要獎項。

本文深入淺出的回顧了大域微分幾何學的發展，闡述了運用拓樸學的工具，如何推進偏微分方程、大域分析學、粒子物理中的統一場論和分子生物學中的 DNA 理論等的發展。作者著重的指出局部的和大域的拓樸性質之間的聯繫，強調「歐拉示性數是大域不變量的一個源泉」，並鑒於「所有已知的流形上的大域結構極大多數是與偶維相關的」，作者希望奇維的流形將受到更多的注意。

一、幾何

我知道大家想要我全面的談談幾何：幾何是什麼；這許多世紀以來它的發展情況；它當前的動態和問題；如果可能，窺測一下將來。這裡的第一個問題是不會有確切的回答的。關於「幾何」這個詞的含義，不同的時期和不同的數學家都有不同的看法。在歐幾里得看來，幾何由一組從公理引出的邏輯推論組成。隨著幾何範圍的不斷擴展，這樣的說法顯然是不夠的。1932 年大幾何學家威布倫（Oswald Veblen）與懷海德（John Whitehead）說：「數學的一個分支之所以稱爲幾何，是因爲這個名稱對於相當多的有威望的人，在感情和傳統上看來是好的。」[1] 這個看法，得到了法國大幾何學家埃里 ‧ 卡當（Élie Cartan）的熱情贊同 [2]。一個分析學家，美國大數學家柏克霍夫（George Birkhoff），談到了一個「使人不安的隱憂：幾何學可能最後只不過是分析學的一件華麗的直觀外衣」[3]。最近我的朋友威伊（André Weil）說：「從心理學角度來看，眞實的幾何直觀也許永遠不可能弄明白的。以前它主要意味著三維空間中的形象的了解力。現在高維空間已經把比較初等的問題基本上都排除了，形象的了解力至多只能是部分的或象徵性的。某種程度的觸覺的想像也似乎牽涉進來了。」[4]

現在，我們還是拋開這個問題，來看一些具體問題爲好。

1979 年陳省身於柏克萊大學。（維基，George Bergman 攝）

二、三角形

三角形是最簡單的幾何圖形之一，它有許多很好的性質。例如它有唯一的一個內切圓，並有唯一的一個外接圓。又例如九點圓定理，本世紀初幾乎每個有一定水平的數學家都知道這個定理。三角形的最引人深思的性質與它的內角和有關。歐幾里得說，三角形的內角和等於 $180°$，或 π 弧度。這個性質是從一個深刻的公理 —— 平行公設（parallel axiom）—— 推出的。想繞開這個公理的努力都失敗了，但這種努力卻導致了非歐幾何的發現。在非歐幾何中，三角形的內角和小於 π（雙曲非歐幾何）或大於 π（橢圓非歐幾何）。雙曲非歐幾何是高斯、波雅伊（János Bolyai）和羅巴切夫斯基（Nikolai Lobatchevsky）在 19 世紀發現的。這一發現是人類知識史上最光輝的篇章之一。

三角形的推廣是 n 角形，或叫 n 邊形。把 n 角形割成 $n-2$ 個三角形，就可看出它的內角和等於 $(n-2)\pi$。這個結果不如用外角和來敘述更好：任何 n 角形的外角和等於 2π，三角形也不例外。

三、平面上的曲線；旋轉指數與正則同倫

應用微積分的工具，就可以討論平面上的光滑曲線，也就是切線處處存在且連續變化的曲線。設 C 是一條封閉的光滑定向曲線，O 是一定點。C 上每一點對應著一條通過 O 點的直線，它平行於 C 在這點的切線。如果這點按 C 的定向跑遍 C 一次，對應的直線總計旋轉了一個 $2n\pi$ 角。我們稱整數 n 爲 C 的旋轉指數（rotation index）（圖 1）。微分幾何中的一個著名定理說：如果 C 是簡單曲線（也就是說 C 自身無交叉點），則 $n = \pm 1$。

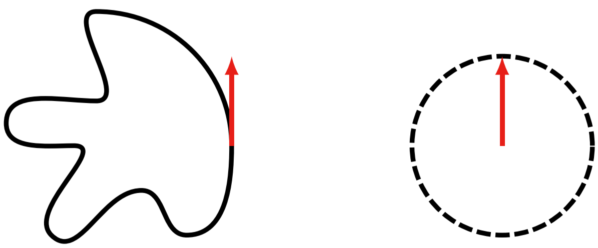

圖 1

很明顯，應該有一個定理把 n 角形外角和定理與簡單封閉光滑曲線的旋轉指數定理統一起來。要解決這個問題，就要考慮範圍更廣的一類簡單封閉分段光滑曲線。計算這種曲線的旋轉指數時，很自然的要規定切線在每個角點處旋轉的角度等於該點處的外角（圖 2）。這樣，上面的旋轉指數定理對這種曲線也成立。應用於 n 角形這一特殊情形就得到 n 角形外角和等於這個結論。

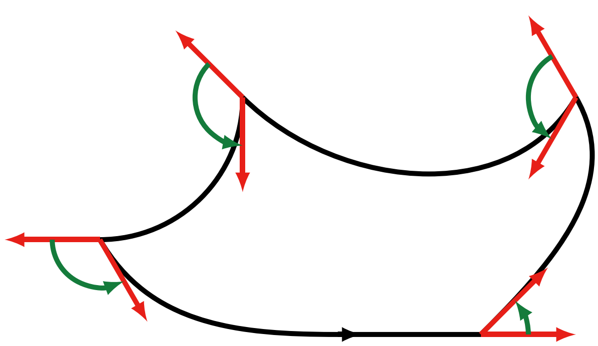

圖 2

這個定理還可進一步推廣到自身有交叉點的曲線。對一個一般的（generic）交叉點，可規定一個正負號。於是，如果曲線以適當的定向，它的旋轉指數等於 1 加上交叉點的代數個數（圖 3）。例如「8」字形曲線的旋轉指數爲 0。

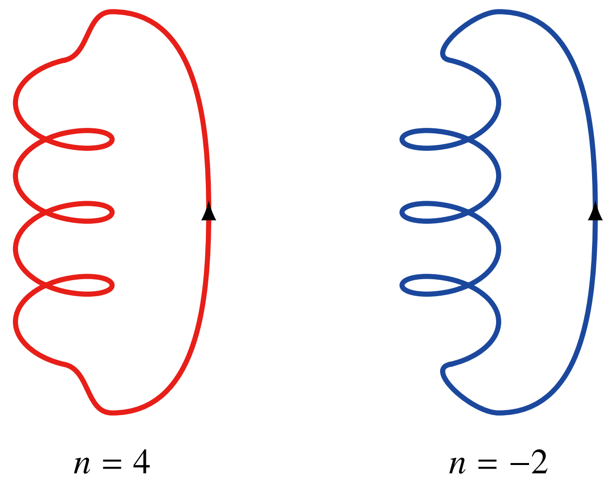

圖 3

形變（deformation），也叫作同倫（homotopy），是幾何學中乃至數學中的一個基本概念。兩條閉光滑曲線稱爲正則同倫（regularly homotopic）的，如果其中一條可通過一族閉光滑曲線變形成另一條的話。因爲旋轉指數在形變過程中是連續變化的，而它又是整數，所以一定保持不變。這就是說，正則同倫的曲線具有相同的旋轉指數。格勞斯坦／惠特尼（Graustein-Whitney）的一個出色定理說，上述命題的逆命題也成立 [5]，即具有相同旋轉指數的閉光滑曲線一定是正則同倫的。

這裡，在研究平面上的閉光滑曲線時用了數學中的一個典型手法，就是考察全部這樣的曲線，並把它們加以分類（在這裡就是正則同倫類）。這種手法在實驗科學中是行不通的，因此它是理論科學和實驗科學方法論上一個根本性的差別。格勞斯坦／惠特尼定理說明，旋轉指數是正則同倫類的唯一不變量。

四、三維歐幾里得空間

現在，從平面轉向有著更加豐富內容和不同特色的三維歐氏空間。在空間曲線中（除平面曲線外），最美妙的也許要算圓柱螺旋線了。它的曲率、扭率都是常量，並且它是唯一的能夠在自身內進行 ∞^1 剛體運動的曲線。圓柱螺旋線可按扭率的正負分成右手螺旋線和左手螺旋線兩類，它們有本質上的區別（圖 4）。

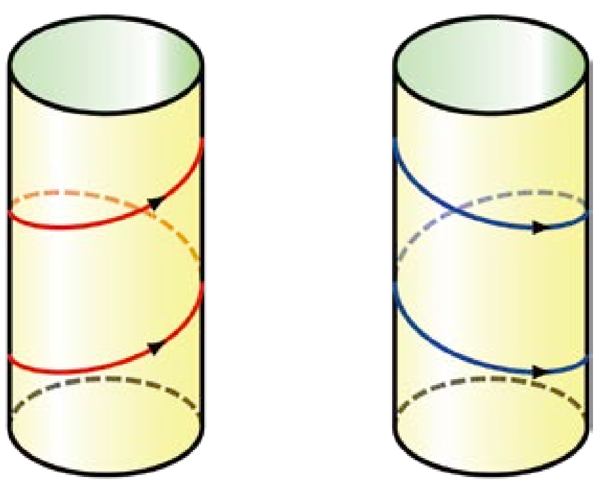

圖 4

一條右手螺旋線是不可能與一條左手螺旋線疊合起來的，除非用鏡面反射。螺旋線在力學中起了重要的作用。DNA 分子的克里克／華生（Crick-Watson）模型是雙螺旋線，從幾何學的觀點來看可能不是完全的巧合。雙螺旋線有一些有趣的幾何性質。特別是，如果用線段或弧段分別把兩條螺線的兩端連接起來，就得到兩條閉曲線，它們在三維空間中有一個環繞數（linking number） L （圖 5）。

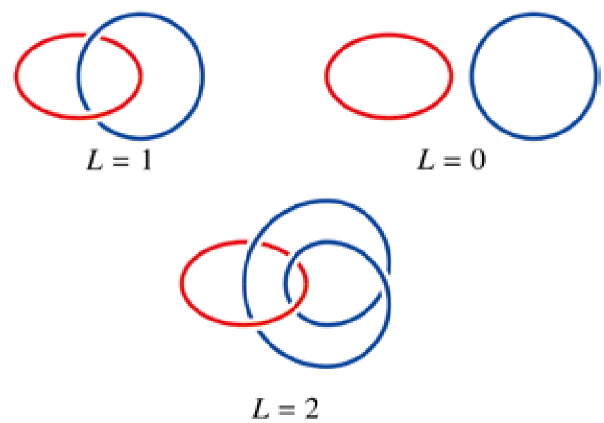

圖 5

最近在生物化學中，由數學家波爾（William Pohl）和羅勃茲（George Roberts）提出一個有爭論的問題，這就是：染色體的 DNA 分子是不是雙螺旋線的？如果是這樣，那麼它就有兩條閉線，它們的環繞數是 300,000 級的。分子的複製過程是：分開這兩條閉線，並且把每一條閉線補上它在分子中的補充線 (即相補的線)。由於環繞數這麼大，波爾和羅勃茲表明複製過程在數學上會有嚴重的困難。因此 DNA 分子（至少對於染色體的來說）的這種雙螺旋線構造是受到懷疑的。[6] 1

環繞數 L 可由懷特（James White）公式 [7]

1
$$T + W = L$$

決定，這裡 T 是扭轉數（twisting number） 2 ，W 是絞擰數（writhing number）。絞擰數 W 可用實驗

1 [編 註] 參 見 F. Crick, J. Wang and W. Bauer,"Is DNA really a double helix?", *Journal of Molecular Biology*, Vol. 129, 3, 1979, 449-461。
2 [編註] 原稿是用 total twist，本文改採現代用法 twisting number。

來測定，並且在酶（enzyme）的作用下會變化。這個公式是分子生物學中一個重要的基本公式。DNA分子一般是很長的。爲了要把它們放到不大的空間中，最經濟的辦法是擰它們，使它們卷起來。上面的討論可能啟示著一門新科學 —— 隨機幾何學（stochastic geometrty）—— 正在誕生，它的主要例子來自生物學。

在 3 維空間中，比起曲線來曲面有重要得多的性質。1827 年高斯的論文《曲面的一般研究》（*Disquisitiones generales circa superficies curvas*），標誌著微分幾何的誕生。它提高了微分幾何的地位，把原來只是微積分的一章提高成一門獨立的科學。主要思想是：曲面上有內蘊幾何（intrinsic geometry），它僅僅由曲面上弧長的度量決定。從弧長元（element of arc）出發，可規定其他幾何概念，如兩條曲線的夾角和曲面片的面積等。於是平面幾何得以推廣到任何曲面上，這曲面只以弧長元的局部性質爲基礎。幾何的這種局部化是既有開創性又有革命性的。在曲面上，相當於平面幾何中的直線的是測地線（geodesic），就是（足夠靠近的）兩點之間的「最短」曲線。更進一步說，曲面上的曲線有「測地曲率」（geodesic curvature），這是平面曲線的曲率的推廣。測地線就是測地曲率處處爲 0 的曲線。

設曲面 Σ 是光滑的，並取了定向。於是在 Σ 的每一點 p，有一個單位法向量 $\mu(p)$，它垂直於 Σ 在 p 點的切平面（圖 6）。$\mu(p)$ 可看作以原點爲球心的單位球面 S_0 上一點，從 p 到 $\mu(p)$ 的映射獲得高斯映射：

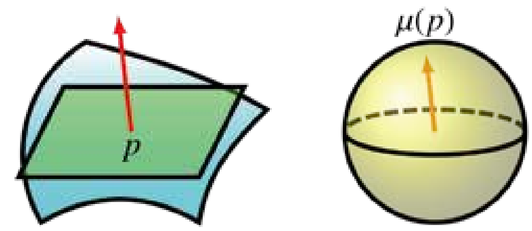

圖 6

2 $$g : \Sigma \to S_0\text{。}$$

S_0 面積元與相應的 Σ 的面積元之比值叫做高斯曲率（Gaussian curvature）。高斯的「絕妙定理」（Theorema Egregium）說：高斯曲率僅僅依賴於 Σ 的內蘊幾何。而且事實上，在某種意義下，高斯曲率刻劃了這個幾何。顯然，平面的高斯曲率是 0。

像平面幾何中那樣，我們在 Σ 上考慮一個由一條或幾條分段光滑曲線所圍成的區域 D。D 有一個重要的拓樸不變量 $\chi(D)$，稱做 D 的歐拉示性數（Euler characteristic）。它可以很容易的下定義。用「適當」的方法將 D 分割成許多多角形，以 v、e 和 f 分別表示頂點、邊以及面片的數目，則

3 $$\chi(D) = v - e + f\text{。}$$

（早在歐拉之前就有人知道這個歐拉多面體定理，但似乎歐拉是第一個認識公式 (3) 中這個「交錯和」〔alternating sum〕的重要意義的人。）

在曲面論中，高斯／博內（Gauss-Bonnet）公式是：

4 $$\Sigma\text{外角} + \int_{\partial D} \text{測地曲率} + \iint_{D} \text{高斯曲率} = 2\pi\chi(D)\text{，}$$

這裡 ∂D 是 D 的邊緣。如果 D 是一個平面區域，高斯曲率就爲 0；如果它還是單連通的，就有 $\chi(D)=1$。在這種情況下，上式就簡化成第三節中討論過的旋轉指數定理。現在我們離開第二節中的三角形的內角和已經走了多麼遠呀！

我們推廣閉平面曲線的幾何，考慮的空間中閉定向曲面。旋轉指數的推廣是公式 (2) 中的高斯映射 g 的映射度 d。d 的確切意義是深刻的。直觀地說，它是映射下的像 $g(\Sigma)$ 覆蓋 S_0 的代數「層」數。在平面上，旋轉指數可以是任何整數，而 d 則不同，它是由曲面 Σ 的拓樸所完全決定了的：

(5) $$d=\frac{1}{2}\chi(\Sigma)。$$

嵌入的單位球面的 d 是 $+1$，它與球面的定向無關。史梅爾（Stephen Smale）[8] 得到了一個驚人的結果：兩個相反定向的單位球面是正則同倫的。說得形象一點：可以通過正則同倫把單位球面從內向外翻過來。在曲面的正則同倫過程中，必須保持曲面在每一點處都有切平面，但允許自身相交。

五、從坐標空間到流形

17 世紀，笛卡兒引進了坐標，引發了幾何學的革命。用魏爾 (Hermann Weyl) 的話來說，「以坐標的形式把數引進幾何學，是一種暴力行爲。」[9] 按他的意思，從此圖形和數就會 —— 像天使和魔鬼那樣 —— 爭奪每個幾何學家的靈魂。在平面上，一點的笛卡兒坐標 (x,y) 是它到兩條互相垂直的固定直線 (坐標軸) 的代數距離（帶正負號）。一條直線是其坐標滿足線性方程

(6) $$ax+by+c=0$$

的點的軌跡。這樣產生的後果是從幾何到代數的轉化。

解析幾何一旦闖進了大門，別的坐標系也就紛紛登台。這裡面有平面上的極坐標，空間的球坐標、柱坐標，以及平面和空間的橢圓坐標。後者適用於共焦的二次曲面的研究，特別是橢球的研究。地球就是一個橢球。

還需要有更高維數的坐標空間。雖然我們原來只習慣於三維空間，但相對論要求把時間作爲第四維。描寫質點的運動狀態（位置和速度）則需要六個坐標（速端曲線〔hodograph〕），這是一個比較初等的例子。全體一元連續函數組成一個無窮維空間，其中平方可積的函數構成一個希爾伯特空間，它有可數個坐標。在這裡我們考察具有規定性質的函數的全體，這種處理問題的手法在數學中是基本的。

由於坐標系的大量出現，自然的需要有一個關於坐標的理論。一般的坐標只需要能夠把坐標與點等同起來，即坐標與點之間存在一一對應，至於它是怎麼來的，有什麼意義，這些都不是本質的。

如果你覺得接受一般的坐標概念有困難，那麼你有一個好的夥伴。愛因斯坦從發表狹義相對論（1908 年）到發表廣義相對論（1915 年）花了七年時間。他對延遲這麼久的解釋是：「爲什麼建立廣義相對論又用了七年時間呢？主要原因是，要擺脫『坐標必須有直接的度量意義』這個舊概念是不容易的。」[10]

在幾何學研究中有了坐標這個工具之後，我們現在希望擺脫它的束縛。這引出了流形（manifold）這一重要概念。一個流形在局部上可用坐標刻劃，但這個坐標系是可以任意變換的。換句話說，流形是一個具有可變的或相對的坐標（相對性原則）的空間。或許我可以用人類穿著衣服來做個比喻。「人開始穿著衣服」是一件極端重要的歷史事件。「人會改換衣服」的能力也有著同樣重要的意義。如果把幾何看作人體，坐標看作衣服，那麼可以像下面這樣描寫幾何學的進化史：

綜合幾何	裸體人
坐標幾何	原始人
流　形	現代人

流形這個概念即使對於數學家來說也是不簡單的。例如，阿達瑪（Jacques Hadamard）這樣一位大數學家，在講到以流形這概念爲基礎的李群理論時就說：「要想對李群理論保持著不只是初等的、膚淺的，而是更多一些的理解，感到有著不可克服的困難。」[11]

六、流行：局部工具

在流形的研究中，由於坐標幾乎已失去意義，就需要一些新的工具。主要的工具是不變量。不變量分兩類：局部的和大域的。前者是局部坐標變換之下的不變量，後者是流形的大域不變量，如拓樸不變量。外微分（exterior differential calculus）運算和黎奇的張量分析（tensor analysis）是兩個最重要的局部工具。

外微分形式（exterior differential form）是多重積分的被積式。例如在 (x, y, z) 空間上的積分

$$\iint_D Pdydz + Qdzdx + Qdxdy \tag{7}$$

的被積式 $Pdydz + Qdzdx + Qdxdy$，這裡 D 是一個二維區域， P, Q, R 是 x, y, z 的函數。人們發覺如果上面的微分的乘法是反對稱的，也就是

$$dy \wedge dz = -dz \wedge dy, \cdots, \tag{8}$$

這裡記號 $\wedge$ 表示外積（exterior product），那麼 D（假設已有了定向）中變量的變換就會自動的被照顧到了。更有啟發性的辦法是引進二次的外微分形式

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy, \tag{9}$$

並且把積分式寫成爲積分區域 D 與被積式 ω 所組成的 (D, ω) 這一對。

因爲，假如在 n 維空間中也如此照辦，史托克斯定理（Stokes' theorem）就可寫成爲

$$(D, d\omega) = (\partial D, \omega), \tag{10}$$

這裡 D 是 r 維區域，∂D 是 D 的邊界，ω 是 $(r-1)$ 次外微分形式，$d\omega$ 是 ω 的外微分，它是 r 次形式。公式 (10) 是多元微積分的基本公式，它說明 ∂ 和 d 是伴隨算子（adjoint operator）。值得注意的是，邊界算子 ∂ 在區域上是大域性的，而外微分算子 d 作用在微分形式上是局部的。這個事實使得 d 成爲一個強有力的工具。 d 作用在函數（0 次形式）

和 1 次形式上，分別得到梯度（gradient）和旋度（curl）。一個微分流形的全部次數小於或等於流形的維數的光滑形式組成一個環（ring），它具有這個外微分算子 d 。埃里．卡當在應用外微分運算到微分幾何的局部問題和偏微分方程方面最有成效。狄拉姆（Georges de Rham）在龐卡赫的開創工作的基礎上，建立了大域理論。這些工作我們將在下一節裡討論。

儘管外微分運算很重要，但它對於描繪流形上的幾何和分析特性卻是不夠用的。一個更廣的概念是黎奇張量分析。張量基於這樣的事實：一個光滑流形在每一點都可用一個線性空間 —— 切空間 —— 來逼近。一點處的切空間引導到相伴的張量空間。張量場需要有一個附加結構 —— 仿射聯絡（affine connection）—— 後才能微分。如果流形具有黎曼結構（Riemannian structure）或勞侖茲結構（Lorentzian structure），那麼相應的李維奇威塔聯絡（Levi-Civita conenction）就適用了。

七、同調

在歷史上，流形的大域不變量的系統研究是從組合拓樸學開始的。它的想法是把流形剖分成一些胞腔（cell），研究它們是如何安置在一起的。（剖分要滿足一定要求，我們不細說了。）特別當 M 是一個 n 維閉流形時，設 a_k 是 k 維胞腔的個數，$k = 0, 1, \cdots, n$ ，那麼作爲公式 3 的推廣，M 的歐拉／龐卡赫示性數（Euler-Poincaré characteristic）可定義爲

11 $$\chi(M) = a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n。$$

邊緣（boundary）是同調（homology）論中的基本概念。胞腔的整係數線性組合稱爲一個鏈（chain）。如果一個鏈沒有邊緣（邊緣爲 0），則稱作閉鏈（cycle）。鏈的邊緣是閉鏈 (圖 7)。

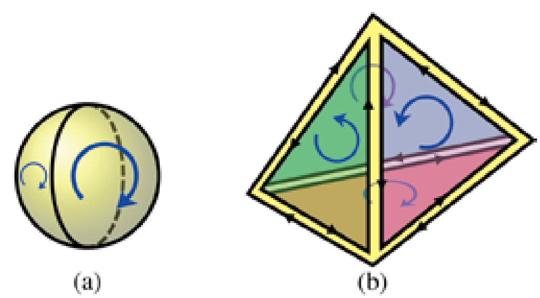

圖 7

在模除（modulo）k 維邊緣鏈的意義下，線性無關的 k 維閉鏈的個數稱爲 M 的 k 維貝堤數（Betti number），記作 b_k ，它是一個整數。歐拉／龐卡赫公式說

12 $$\chi(M) = b_0 - b_1 + \cdots + (-1)^n b_n。$$

b_k 是 M 的拓樸不變量，因此 $\chi(M)$ 也是拓樸不變量。也就是說， b_k、$\chi(M)$ 都是與剖分的方式無關的，並且在 M 的拓樸變換下保持不變。這些，以及更一般的敘述，可以看作是組合拓樸學的基本定理。龐卡赫和布勞爾（Luitzen Brouwer）爲組合拓樸學的發展開闢了道路。以維布倫、亞歷山大（James Alexander）和列夫謝茲（Solomon Lefschetz）等爲首的美國數學家的工作使得它於本世紀二十年代在美國開花結果。

剖分的方法雖然是導出拓樸不變量的一個有效途徑，但它也有「殺死」流形的危險。明確的說，組合的方法可能使我們看不出拓樸不變量和局部幾何性質的關係。實際存在著與同調論相對偶的上同調論。同調論依賴於邊緣算子 ∂ ，而上同調論立足於外微分算子 d，它是一個局部算子。

從 d 發展出的狄拉姆上同調（cohomology）論可概括如下：算子 d 有一個基本性質：重複運用它時得到 0 次形式。也就是說，對任何 k 次形式 α ，$(k+1)$ 次形式 $d\alpha$ 的外微分是 0。這相當於「任何鏈（或區域）的邊緣沒有邊緣。」這樣一個幾何事實（參見公式 10 ）。當 $d\alpha=0$ 時，就稱 α 是閉（closed）的。當存在一個 $(k-1)$ 次形式 β 使得 $\alpha=d\beta$ 時，就說 α 是一個導出形式（derived form）。導出形式總是閉的。兩個閉形式如果相差一個導出形式，則說它們是上同調（cohomologous）的。互相上同調的閉 k 次形式的全體組成 k 維的上同調類（cohomology class）。不平常的是，雖然 k 次形式、閉 k 次形式以及導出 k 次形式的數量都是極大的，但 k 維上同調類卻組成一個有限維的線性空間，而維數就是第 k 個貝堤數 b_k 。

狄拉姆上同調論是層上同調（sheaf cohomology）的先驅。後者由勒黑（Jean Leray）[12] 始創，昂利 · 卡當（Henri Cartan） 3 和塞爾（Jean-Pierre Serre）使之完善，並卓有成效的加以應用。

八、向量場及其推廣

我們自然的要研究流形 M 上的連續向量場。這樣的一個向量場由 M 的每一點處的一個切向量組成，並且向量隨著點連續變動。若 M 的歐拉／龐卡赫示性數 $\chi(M)\neq 0$ ，則 M 上任一連續向量場中至少有一個零向量。舉個具體的例子，地球是個二維球面，示性數是 2，因此當地球上刮風時，至少有一處沒有風。上述結果有一個更加明確的定理。對於連續向量場的每一個孤立零點可規定一個整數，叫做指數（index），它在某種程度上刻劃向量場在這個零點附近的狀態，表明它是源點，還是匯點或是其他情形。龐卡赫／霍普夫（Poincaré-Hopf）定理指出，當連續向量場只有有限多個零點時，它的全部零點的指數和就是拓樸不變量 $\chi(M)$。

以上所述是有關 M 的切叢的。切叢（tangent bundle）就是 M 的全體切空間的集合。更一般的，如果一族向量空間以 M 爲參數，並且滿足局部乘積條件，就稱爲 M 上的一個向量叢（vector bundle）。

一個基本問題是：這樣的叢在大域上是不是一個乘積空間？上面的討論說明了，當 $\chi(M)\neq 0$ 時，切叢不是乘積空間，因爲如果是乘積空間，就會存在一個處處不爲 0 的連續向量場。空間之中存在局部是乘積而大域不是乘積這種空間（例如當 $\chi(M)\neq 0$ 時的 M 的切叢）絕不是容易想象的，幾何學從而進入更深刻的階段。

刻劃一個向量叢與乘積空間的大域偏差的第一組不變量是所謂上同調示性類（characteristic cohomology class）。歐拉／龐卡赫示性數是最簡單的示性類。

3 [編註] 埃里 · 卡當的長子。

高斯／博內公式的形式（見第四節）在 Σ 沒有邊界時特別簡單：

4a $$\iint K dA = 2\pi\chi(\Sigma)。$$

這裡 K 是高斯曲率，dA 是面積元。公式 4a 是最重要的公式，因為它把大域不變量 $\chi(\Sigma)$ 表示成局部不變量高斯曲率的積分。這也許是局部性質與大域性質之間的最令人滿意的關係了。這個結果有一個推廣，設

13 $$\pi : E \to M$$

是一個向量叢。切向量場的推廣是叢的截面，也就是一個光滑映射 $s : M \to E$，使 $\pi \circ s$ 是恆同映射。因為 E 只是一個局部乘積空間，對截面 s 微分就需要有一個附加結構，通常叫做一個聯絡（connection）。所導出的微分稱為協變微分（covariant differentiation），一般不是交換的。曲率就是協變微分非交換性的一種度量。曲率的適當組合導致微分形式，在狄拉姆理論的意義下，它代表上同調示性類，而高斯／博內公式 4a 是它的最簡單的例子 [13]。我相信，向量叢、聯絡和曲率等概念是如此基本而又如此簡單，以致任何多元分析的入門教科書都應包括這些概念。

九、橢圓型微分方程

當 n 維流形 M 有黎曼度量時，則有一個算子 $*$，它把一個 k 次形式 α 變成一個 $(n-k)$ 次形式 $*\alpha$。這相當於對切空間的線性子空間取正交補（orthogonal complement）。借助算子 $*$ 和微分 d，我們引進餘微分（codifferential）

14 $$\delta = (-1)^{nk+n+1} * d *$$

和拉普拉斯算子

15 $$\Delta = d\delta + \delta d。$$

算子 δ 把一個 k 次形式變成一個 $(k-1)$ 次形式，而 Δ 把一個 k 次形式變成一個 k 次形式。如果一個形式 α 滿足

16 $$\Delta\alpha = 0，$$

它就稱為**調和**（harmonic）的。零次調和形式就是通常的調和函數。

公式 16 是一個二階橢圓型偏微分方程。如果流形 M 是閉的，公式 16 的全部解構成一個有限維向量空間。根據赫吉（William Hodge）的一個經典定理，解空間的維數恰好是第 k 個貝提數 b_k。再從公式 12 推出，歐拉示性數可寫成

17 $$\chi(M) = d_e - d_o，$$

這裡 d_e 和 d_o 分別是偶次和奇次調和形式的空間的維數。外微分 d 本身是一個橢圓算子，公式 17 可看作是用橢圓算子的指標來表示 $\chi(M)$。對於任何線性橢圓算子來說，它的指標等於解空間的

維數減去伴隨算子的解空間的維數。

在用局部不變量的積分表示橢圓算子的指標這一方面，阿提雅／辛格指標定理（Atiyah-Singer index theorem）達到了頂峰。許多著名的定理，例如赫吉指標定理（Hodge signature theorem）、賀茨布魯赫指標定理（Hirzebruch signature theorem）和關於複流形的黎曼／羅赫（Riemann-Roch）定理，都是它的特殊情形。這項研究的一個主要副產物，是確認了考慮流形上擬微分算子（pseudo-differential operator）的必要性，它是比微分算子更一般的算子。

橢圓型微分方程和方程組是與幾何十分緊密的糾纏著的。一個或多個複變數的柯西／黎曼微分方程是複幾何的基礎。最小解形（minimal variety）是求最小化面積的變分法問題中歐拉／拉格朗日方程（Euler-Lagrange equation）的解。這些方程是擬線性（quasi-linear）的。「最」非線性的方程也許是蒙日／安培方程（Monge-Ampère equation），它在好幾個幾何問題中都是重要的。近年來在這些領域裡取得了很大的進展 [14]。由於分析這樣深入的侵入幾何，前面提到過的分析學家柏克霍夫的評論看來更令人不安了。然而，分析學是繪制礦藏的全貌，而幾何學是尋找美麗的礦石的。幾何學建築在這樣的原則上：並非所有的結構都是相等的，並非所有的方程都是相等的。

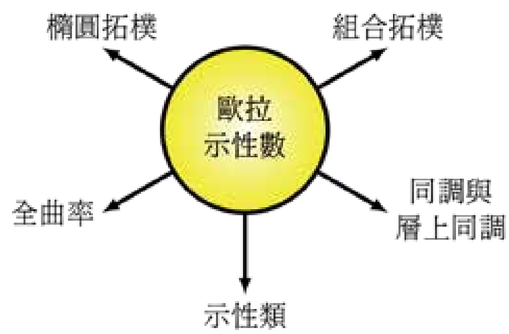

圖 8

十、歐拉示性數是大域不變量的一個源泉

概括起來，歐拉示性數是大量幾何課題的源泉和出發點。我想用圖 8 來表示這關係。

十一、規範場論

本世紀初，由於愛因斯坦的相對論，微分幾何一度變成人們注視的中心。愛因斯坦企圖把物理現象解釋爲幾何現象，並構造一個適合於物理世界的幾何空間。這是一個十分艱巨的任務，也不清楚愛因斯坦關於引力場和電磁場的統一場論的學說是否已成爲定論。前面提到過的向量叢的引進，特別是向量叢中的聯絡和它們的示性類，以及它們與曲率的關係，開闊了幾何的視野。線叢（纖維〔fiber〕是一條複直線）的情況提供了魏爾的電磁場規範（gauge）理論的數學基礎。以對同位旋（isotopic spin）的理解爲基礎的楊／米爾斯理論（Yang-Mills theory），是非交換的規範理論的第一個例子。楊／米爾斯理論的幾何基礎，是帶有酉聯絡（unitary connection）的複平面叢。統一所有的場論（包括強、弱相互作用）的嘗試，已集中到一個規範理論上，也就是一個以叢和聯絡爲基礎的幾何模型。看到幾何和物理再次攜起手來，是十分令人滿意的。

叢、聯絡、上同調和示性類都是艱深的概念，在幾何學中它們都經過長期的探索和試驗才定形下來。物理學家楊振寧說 [15]：「非交換的規範場與

纖維叢這個美妙理論——數學家發展它時並沒有提及物理世界——在概念上的一致，對我來說是一大奇蹟。」1975 年他對我講：「這既是使人震驚的，又是使人迷惑不解的，因爲你們數學家是沒有依據的虛構出這些概念來的。」這種迷惑是雙方都有的。事實上，維格納（Eugene Wigner）說起數學在物理中的作用時，曾談到數學的超乎常理的有效性 [16]。如果一定要找一個理由的話，那麼也許可用「科學的大域性」這個含糊的詞兒來表達。基本的概念總是很少的。

十二、結束語

現代微分幾何是一門年輕的學科。即使不考慮相對論和拓樸學給它的很大促進，它的發展也一直是連續不斷的。我爲我們說不清它是什麼而高興。我希望它不要像其他一些數學分支那樣被公理化。保持著它跟數學中別的分支以及其他科學的許多領域的聯繫，保持著它把局部和大域相結合的精神，它在今後長時期中仍將是一片肥沃的疆域。

用函數的自變數的數目或數學所處理的空間的維數來刻劃數學的各個時期，可能是很有意思的事。在這個意義上，19 世紀的數學是一維的，而 20 世紀的數學是 n 維的。由於多維，代數獲得了十分重要的地位。所有已知流形上的大域結果的極大多數是同偶數維相關的。特別的，所有複代數流形都是偶數維實流形。奇數維流形至今還是神秘的。我大膽的希望，它們在 21 世紀將受到更多的注意，並可在本質上被搞清楚。近來，瑟斯頓（William Thurston） [17] 關於三維雙曲流形的工作以及丘成桐、密克斯（William Meeks）和孫理察（Richard Schoen）關於三維流形的閉最小曲面的工作，都已經大大的弄清楚了三維流形及其幾何。幾何學中的問題之首可能仍然是所謂龐卡赫猜想 [4]：一個單連通三維閉流形同胚於三維球面。拓樸和代數的方法至今都還沒有導致這個問題的解決。可以相信，幾何和分析中的工具將被發現是很有用處的。

本文出處

本文是依據作者於 1978 年 4 月 27 日在柏克萊大學「教授會研究報告」（Faculty Research Lecture）的文稿預印本翻譯，刊登於《自然雜誌》第 2 卷（1979 年）第 8 期。本刊感謝《自然雜誌》授權同意轉載。文稿是 “From Triangles to Manifolds”, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 86, No. 5 (May, 1979), pp. 339-349。

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉
https://yaucenter.web.nctu.edu.tw/?lang=tw

譯者簡介

尤承業是北京大學數學教授。

延伸閱讀

- 陳省身：從歐幾里得到微分幾何 - 什麼是幾何學，《科學月刊》第十八卷第六期（1990），本文也收錄在《數學傳播》11 卷 2 期（1987），2 ～ 7 頁。https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d112/11201.pdf
- 陳省身和陳維桓著，《微分幾何講義》，聯經（1990）。

[4] [編註] 2000 年美國克雷數學研究所（Clay Mathematics Institute）將其列爲千禧七大數學難題之一，懸賞百萬美金。2003 年由俄羅斯數學家帕瑞爾曼（Grigori Perelman）證明，也是目前唯一解出的題目。