龐卡赫的水晶球

評龐卡赫的 1908 年〈數學的未來〉演講

●作者：戴維斯（Philip Davis）、曼弗德（David Mumford）
●譯者：翁秉仁

作者簡介：
戴維斯（1923 ～ 2018）是美國布朗大學的應用數學退休榮譽教授，是數值分析與逼近理論領域的著名應用數學家，也以數學史與數學哲學的研究聞名。

曼弗德現為哈佛大學與布朗大學退休榮譽教授，研究領域是代數幾何與圖形視覺與模式理論。曾獲頒費爾茲獎（1974）、麥克阿瑟獎（1987）與沃爾夫獎（2008）。

1908 年 4 月 10 日，在羅馬舉行的第四屆世界數學家大會上，達布（Gaston Darboux）爲龐卡赫（Henri Poincaré，1854 ～ 1912）宣讀題爲《數學的未來》（*L'avenir des Mathématiques*）的演講（十分可惜龐卡赫無法親自到場發表）。原文可在網上找到如：

http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k17083c/f934n10.capture。

從演講當時到今天已經整整一世紀，從歷史的動蕩年月和其後數學豐碩的成就來看，檢視龐卡赫文章內容如何形塑演變，想必頗饒趣味（和消遣）。龐卡赫講稿早有英譯本，在網路上可以下載 pdf 或 html 格式的譯稿，本文所述乃基於後者：

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Poincare_Future.html

或 http://portail.mathdoc.fr/BIBLIOS/PDF/Poincare.pdf。

龐卡赫演講分爲兩部分；第一部分是綜述，第二部分則提出十個不同領域內的許多具體問題，描述這些問題的現況，並提出後續值得研究的特定建議。第一部分的文字生動明白，第二部分則不然，但令人印象深刻的是龐卡赫掌握廣泛數學材料的能力。

龐卡赫的演講應該與稍早希爾伯特（David Hilbert，1862 ～ 1943）的演講相互比較和對照。1900 年，希爾伯特在巴黎召開的第二屆世界數學家大會上，具體提出 23 個重要且當時尚未解決的數學問題。歷史上對於希爾伯特 23 個問題，盛讚有之，卻也不乏負評。反觀沒有提出具體問題的龐卡赫演說，就不那麼受公眾矚目，聲名僅限於數學圈。

龐卡赫的綜述

首先，對龐卡赫論文的第一部分簡單總結如下：他指出有人認爲 1908 年的數學具有豐沛的概念，在「所有方向」皆取得發展。但龐卡赫又說如果這真的是正確描述，那麼「我們的富裕將變成負擔」，反而產生難以整體理解的知識成長。研究素材過量的一道解方是專業化，但這也可能是「阻撓我們科學進展的障礙」。相反的，他申明我們必須透過尋求統一的概念來制衡專業化的傾向。

> 一項新結果如果有價值，那是因爲它能將那些至今分散又看似無關的陳舊要素連結在一起，爲原本明顯紊亂的場域突然帶來秩序。

龐卡赫很欣賞維也納物理學家和哲學家馬赫（Ernst Mach，1838 ～ 1916），他引用馬赫的話說：「科學的功能是產出簡約的思想，就像機器產出有效益的勞動一樣。」龐卡赫將這個想法貫徹到數學中，包括簡明的公式與統一性的理論。

龐卡赫進一步斷言，審美要素往往與思想或勞動能達成簡約並蒂而生。因此方法和結果中的審美要素極爲重要。它並不只是「浮面裝飾」，因爲審美也帶來「對全體和部分的同時理解」。龐卡赫認爲光靠冗長的計算不足以揭露原來問題的廣泛結構：

> 當某個冗長計算導致簡潔又驚人的結果時，我們

並無法完全滿意，直到我們表現出應可預見……其中最具特色的細節。……任何想以機械過程取代數學家自由自主思考的嘗試都終歸徒勞。

龐卡赫讚賞過去 50 年引入數學的嚴格性，但也對崇尚嚴格性的迷思保持警惕：

數學裡嚴格性並非全部，但是如果沒有嚴格性我們將一無所有……不過眞有必要每次都重複這樣的討論嗎？……我擔心演證的無端加長，將會失去數學諧和的樣貌。

創造新術語這項語言要素也十分重要。老一點的例子是「收斂」一詞，但他也舉出較新近的例子如「群」、「不變的」（invariant）、「同構」（isomorphism）和「變換」（transformation）等。

我們意識到某項成果即將孕生的標記之一，就是它容許我們的語言出現巧妙的創新。單純的事實往往缺乏趣味；它或許已被多次註記，卻對科學毫無影響。直到有一天，某位幸運的深思學者察覺到其中出現他能用文字表達和標誌的關係時，這項事實才變得有價值。

龐卡赫承認「對公設、異常幾何或取值奇特函數的諸般研究」向我們展現了「當擺脫外在世界的箝制……人類心靈能如何運作……。」但他並不以爲意。「我們必須把大軍的主力放在相反的另一側，亦即大自然這一側。」

龐卡赫想像物理學家或工程師帶著問題來找數學

龐卡赫。（史密斯森研究協會 Smithsonian Institution）

家。我們有時可以但經常不能以已知函數明確表示問題的解，即使問題很可能有冪級數解，但仍有收斂速度是否快得足敷應用的疑問？這位工程師受限於時間，毫不關心「22 世紀工程師」能做什麼（他是否想像未來有超高速電腦？）但對數學家來說，結論是情況「不再是有些問題能解，其他問題不能解。」因爲除了傳統解法之外，還有定性思路，也有定量的、計算上有用的，以及計算上無用的冪級數。龐卡赫提倡與定量方法立於兩端的定性方法，尤其是當前者並非立即或唾手可得的時候。

龐卡赫的總體結論是，想要預言數學的未來，最好的方法是以現在為起點，並遵循以下的原則：採取現有進展得以達成的各種廣泛思路，再透過推廣、抽象與類比等手段將這些往外擴展。但是我們期待最大的進展來自兩門數學分支發現「它們儘管內容殊異，形式卻有相似之處」的時候，「彼此將因對方而獲益」。

短評

接下來的評論當然是基於我們對於龐卡赫之後數學發展的認識。

對未來的預言

擁有水晶球是不是某些人（而非其他人）具備的特別能力？該領域公認最聰穎和傑出的人是否就擁有更犀利的水晶球？或許他們的傑出成就和思想理路相當程度塑造了未來。依照龐卡赫的建議，我們能預測的是將已知的成果加強、推廣、類比或抽象化，我們不能做得比從現在外推更好嗎？至於那些全新的成就呢？歷史學家總是想從過去找出這類成就的起因，但是這些都是事後孔明的判斷。

戴森（Freeman Dyson）分析人們預測未來的能力，他的結論是在科學裡意想不到的技術突破，通常是導致發現全新和意外現象並發展出新理論的事件。雖然在數學裡，技術和理論比較不容易區分，但我們在底下談到特定領域時，會發現戴森的慧見反映在許多龐卡赫無法預測的數學進展中。

數學的增長與專業化

關於數學主體的成長、隨後的專業化以及所引發的局限，龐卡赫的評論當然是正確的。專業化和專業詞彙已經暴增，無論在數學內部或相鄰領域分享想法時都造成莫大的障礙。1920 年，奧斯綽夫斯基（Alexander Ostrowski，1893 ～ 1986）在希爾伯特和蘭道（Edmund Landau）指導下進行博士口試，他曾經向作者之一表明（或許是開玩笑），說自己是數學界最後一個被期望能回答任何數學領域問題的學生。龐卡赫本人則被譽為「最後的通才」。

至少，如今能找到支薪職位的數學博士人數增加了，專業化也導致期刊、學會、會議和論文數量的大量增長（最後一項可從 *Math Reviews* 和 *Zentralblatt* 這兩本評論期刊的內容呈指數成長得到精確的驗證）。

嚴格性

正如龐卡赫所擔心的，當今已經出現日益廣泛的趨勢，數學論文越來越冗長而嚴格，想在某數學家的前後論文內找出往往深藏在某處的關鍵想法也越發困難。有時，日增的抽象性與大量湧現的技術詞彙使過度嚴格的不良影響更形惡化（儘管兩者不盡相同）。以上一切，都讓自己狹窄領域之外的其他論文都難以卒讀。

但是我們可以提問：如果絕對嚴格是無法達成的理想，那麼要如何實現嚴格？保留多少的嚴格才足夠？龐卡赫時代無法預見的一種極端情況是證明的電腦驗證，這是在一組明確定義的命題演算公設

內執行的，例如波以爾（Robert Boyer）和穆爾（J Moore）的成果 1 。檢視數學證明的歷史顯示，過去的偉大數學家並不執著於嚴格性，嚴格的標準也時有起伏。「當時夠用就是嚴格。」（Sufficient unto the day is the rigor thereof. 2 ）。但是，20 世紀確實出現令人窘困的局面，1920 ～ 1950 年時期的許多代數幾何論文的確包含錯誤或無法修正的「證明」。

計算

龐卡赫似乎很嫌惡所謂的「赤裸」計算，拒斥計算在發現過程中扮演的角色。當然，在龐卡赫時代還沒有電腦，對他而言，計算就是手算，無論是代數或數值的計算。我們認爲計算確實具有重要的作用，對數學的不同領域有不同的影響，但尚有少數領域還沒感受到計算的影響。底下將討論幾個例子。

在每個世代，都有數學家廣泛使用計算。高斯是頂級數學家熱愛計算的顯著案例。如今依靠現代電腦，喜歡計算的人就像擁有賽車的力量可以使喚，相較之下高斯當時擁有的只是馬車罷了。

我們可以用致力於「實驗數學」的期刊出現爲例，基本上所有在這些期刊上發表的論文都依賴電腦的計算結果。在這方面，我們引用《實驗數學期刊》（*Journal of Experimental Mathematics*）宣告的哲學理念，既合宜又有啟發性：

實驗一直是而且日益發展爲一種獲得數學發現的重要方法。（高斯就宣稱他攫取數學眞理的方法是「透過系統化的實驗」。）然而，這項趨勢往往被只呈現優雅、全面且嚴格結果的傳統所掩蓋。儘管我們重視論理的定理／證明方法，也不偏離只有邏輯證明支持的結果才是數學知識的既定觀點，但我們認爲把數學發現過程中的一個重要成分隱藏在公眾討論之外是反常的。數學界大多數人幾乎完全不知道新結果是如何發現的事實造成我們的損失。尤其讓人遺憾的是，這項知識還沒有納入研究生養成的一環，於是研究生只能在荒野中尋找自己的出路。

雖然我們大致同意以上表述的看法，但我們不同意其中所有數學知識皆仰賴邏輯證明的「既定觀點」。我們將說明「數學知識」以各種方式跨出邏輯證明所支持的範圍。

定量 vs. 定性

龐卡赫當然是整個拓樸領域的發現者之一，這是定性思考取代定量的主要領域。但是在許多純數學和應用數學的其他領域，這兩種思路仍在競爭主導權。

在分析學中，龐卡赫所謂的「定量」表示的不只是孤立的數，還有特定特殊函數的整體理論，從中得到與理論或實驗相關的特殊數值，然後容許自動應用這些到其他的平行理論。

1 [譯註] 穆爾和波以爾以 LISP 爲基礎發展的定理證明機（Boyer-Moore theorem prover，也稱爲 Nqthm）第一版本於 1973 年問世，證明了相當多基本定理如質因數分解定理和哥德爾不完備定理。

2 [譯註] 語出數學家穆爾（Eliakim Moore）。變形自 “Sufficient unto the day is the evil thereof”（馬太福音 6:34）。

從龐卡赫自己的研究到今天，用「定性」取代「定量」的觀點，在微分方程理論內發揮重要的作用。對這種走向，諾貝爾物理學獎得主拉塞福（Ernest Rutherford）的昔日評論提出挑戰：「定性什麼都不是，只是貧瘠的定量。」一位物理學家朋友最近為我們闡述拉塞福可能的意思：

假如某人有一個毛細管吸引力的理論。我們嘗試看看，結果管中的水上升了。理論正確嗎？除非實驗測量結果與理論定量的預測相合，不然你不可能判斷。定性的實驗只會浪費時間和金錢。當然，錯誤的理論也可能給出正確的答案，但這種情形很罕見。的確，沒有實驗是萬無一失的，但是大家都了解其中有巧合和誤差的餘地。科學不是處理事實，而是處理可能的事實。這些或許是邏輯學家的噩夢，卻是科學家日常的一部分。

董姆（René Thom）、席曼（Christopher Zeeman）、阿諾德（Vladimir Arnold）和其他人所建立的所謂「劇變論」（catastrophe theory），就是定性理論真確性受到多人質疑的典型範例。劇變論數學的優雅顯而易見，但是由於它迴避使用特定的模型和微分方程，其應用性因此不確定。自似（self-similar）的「碎形」（fractal）模型是這個灰色區域的另一個理論示例。在差異極大的不同領域內，有大量數值證據支持跨越幾個數量級的自似性，但是能展現這個特性的物理模型相對少得多。

在應用數學的許多領域中，對於無法完全建模的高度複雜系統，許多嘗試針對部分角度提出模型。這些模型在定性考慮上是合理的，但為了辯護其有效性，他們常被擴充披上定量的外衣，才能對實驗結果和（或）計算模擬做出「預測」。有時這個可疑的過程可以用底下的懷疑觀點作結：「每個模型都注定會成立。」但是，關於定性分析有許多議題可以討論，定性和定量觀點之間也仍會持續熱烈爭辯，幾乎可以確定會延續到我們身後。

審美作為發現和呈現的要素

龐卡赫認為，對數學家而言優雅意味證明的品質，足以讓整體獲得理解。他的觀點得到羅塔（Gian-Carlo Rota）的迴響：「當一道證明揭開定理的秘密，當它能使我們感受到所證敘述的實質而非邏輯必然性時，證明是優美的。」美無疑是數學的重要成分，也因此引發很多評論和臆想，但不應過分強調：

我曾經聽過狄拉克（Paul Dirac，英國物理學家）在一次主要是學生聽眾的演講中說，物理學生不必太擔憂物理方程的意義，而只須掛心方程的美。在場的教師對我們所有學生打算要仿效狄拉克的前景感到不安。

—溫伯格（Steven Weinberg）〈邁向最終物理定律〉（Towards the Final Laws of Physics）

美學和實用不該混淆，所以才存在許多可以促進數學發現和科學計算的電腦程式，卻很難通過美的簡潔標準或是任何其他如羅塔所提出的標準。四色定理和克卜勒猜想的證明相當仰賴電腦計算，這證明了它們的用處。

語言的元素

龐卡赫對數學中語言元素角色的評論既尖銳又有啟示性。這方面只有在近幾十年才有人深入探索，值得更多闡述和關注。著名的語言學家霍夫（Benjamin Whorf）曾提出，你使用的語言結構，會影響（事實上是限制）你對情境的理解，你思考它的方式。我們最近收到符號學家和數學家歐哈洛蘭（Kay O'Halloran）的一封信，她將龐卡赫的見解置於當前的符號學術語（或行話）中：

> 「字詞」產生存在！[3]「字詞」所符號化的關係會經歷共情境化（co-contextualisation）和重新情境化（re-contextualisation）的過程才能進入其他關係：一個永無止境的持續現象。

另一方面，20 世紀的數學發展已經見證了數學每個子子領域內專業詞彙的爆炸式成長。現在誰能精通底下的所有概念：伍丁基數（Woodin cardinals）、李超代數（Lie superalgebra）、代數堆疊（algebraic stack），異度層（perverse sheaf），魏爾張量（Weyl tensor），董姆譜（Thom spectra），貝索夫空間（Besov space）、半鞅（semi-martingale）、色指數（chromatic index）和暗門函數（trapdoor function）等？這些並非不重要的概念，它們是各自所屬領域內的標準詞彙。但是遺憾的是，這樣的現實成爲龐卡赫夢想的極大障礙：他期待相異領域之間的「連結」將推動最深遠的未來發現。

龐卡赫的具體預測

在演講的後半部，龐卡赫討論數學各個領域並提出具體意見。與希爾伯特相反，龐卡赫並未指出待研究的問題，只以一般的方式談及每一領域中的某些「子領域」和研究主題，有時用語模糊令人滿頭霧水。在理想的合理考慮下，龐卡赫演講的第二部分應該由各領域或其子領域的專家來回應，從而呼應龐卡赫對數學專業化和碎裂化的關注。儘管如此，我們會盡力談談他正確的預測和他錯過的材料！不過其中一些例子在 1908 年之後的進展，除非訴諸專著，否則很難恰當的描述。

底下小節的標題是龐卡赫原來的寫法，有些加括號內的是更標準的當代術語。注意：龐卡赫所言很多都相當含糊，需要（至少我們需要）闡釋他的文字，並揣摩他建議的原意。

算術（數論）

龐卡赫非常成功的預測這個領域在 20 世紀的發展。在我們看來，他談述的第一點似乎清楚預示了威伊的工作，創建了類似傳統複代數幾何的特徵（characteristic）p 代數幾何：

> 我想到的第一個例子是同餘理論（theory of

[3] 這聽起來幾近神學，一如約翰福音 1:1 之「太初有道。」見 Kay L. O'Halloran, *Mathematical Discourse: Language, Symbolisms and Visual Images*（數學論述：語言，符號和視覺圖像）, Continuum, London & New York, 2005。

congruences），在該理論裡可找到代數方程的完美平行理論。而且我們一定會完成這種平行對照，例如代數曲線論與兩變數同餘方程之間的類比。而且若能解決多變數的同餘方程問題，我們就踏出解決不定分析（indeterminate analysis）中的第一步

龐卡赫所謂「同餘」顯然意指 mod p 的多項式方程。儘管「不定分析」的意義不明，同情的理解應該是：龐卡赫在尋求整數多變數多項式整數解（丟番圖方程，Diophantine equations）與 mod p 解之間的關聯。這正是威伊猜想所釐清，並由德沃克（Bernard Dwork）、格羅騰迪克（Alexandre Grothendieck）和德利涅（Pierre Deligne）所證明的工作。下一段，龐卡赫探問了數論與代數幾何之間的類比：

另一個往往不能一目了然的類比範例是形體（corpus）與理想的對照。做爲對比的例子可以考慮曲面上的曲線：完全相交（complete intersection）對應到普通數，非完全相交對應到理想（ideal），不可分解曲線（indecomposable curve）對應到質理想。於是各式各樣的理想都有恰當的類比。

這裡龐卡赫似乎在談論解形除子理論（the theory of divisors on varieties），畢卡群（Picard group）或理想類群（ideal class group），再次談及數論情境與代數幾何情境的類比。在 20 世紀，數論中的類體論（class field theory）與代數幾何中的廣義雅可比形（generalized Jacobians）理論和畢卡解形的確發展出這樣的類比。但是注意在龐卡赫演講時，希爾伯特知名的《數論報告》（*Zahlbericht*）已經發表，其中包含了對日後發展更清楚的線索。

龐卡赫的下個主題是二次型（quadratic form）理論，他說：「當算術學家透過線性變換群而導入統一性時……二次型便是最早成形的理論之一。」他建議考慮更多群將可得到更多成果，於是他提到不連續群和閔科夫斯基（Hermann Minkowski）的《數的幾何》（*Geometrie der Zahlen*）。儘管有點跳躍，我們可以說他的想法引領了半單代數群（semi-simple algebraic group）及其離散子群理論的發展。這是 20 世紀主要的研究課題之一。

最後，講稿中還有一段談論質數的段落，龐卡赫說：

我相信我已經一窺某種期待中的統一性……所有這些無疑都可回溯到某一系超越函數的研究，通過研究它們的奇點並應用達布的方法，將可漸近的計算超大數的某種函數。

從這段頗神秘的文字，或可猜測龐卡赫正預示著 L 函數在數論的巨大成功。如果眞是這樣，他就觸及 20 世紀數論裡的所有主要題材。

代數

在第二節（代數）中，龐卡赫只將重點放在多項式方程。他首先說「最重要的（主題）是群……」他顯然談的是迦羅瓦群（Galois group），但他將在另一節討論群，因此這裡他以「方程根的數值計算問題和實根數的討論」來取代。

關於多項式根的數值計算，我們很難解譯龐卡赫的實際想法。後來這方面受到威力愈來愈強大的電腦出現所激勵，無論在實驗和理論上，至今已經有很多研究和成就。事實上，一度相對停滯的整個數值分析領域，在數位時代就像雨後春筍似的大量爆發。現在已經絕少科學計算套裝軟體裡面沒有合宜的高精度多項式勘根工具。該問題已經有許多不同的解決想法，只是每種想法各有其強弱項。

一個相關的問題（也許比「單純」勘根更有應用意義）是方陣特徵值（eigenvalue）的數值計算。多項式根是其伴隨矩陣（companion matrix）的特徵值。QR 演算法提供一種計算特徵值的可靠方法。因此一個遵行此路線的選擇方案（適用於少於數百次的多項式）首先由莫勒（Cleve Moler，Matlab 的大人物）提出，後來再由愛德曼（Alan Edelman）和村上弘（Hiroshi Murakami），還有楚菲森（Lloyd Trefethen）提供了實質的理論基礎。伴隨矩陣首先必須透過標準的相似變換來「平衡」以減少矩陣的條件。至於特定問題所需的極高次數多項式，也有人已經設計出有效的特殊算法。未來多項式勘根研究的改善，很可能會受益於電腦的改進以及科技應用的需求。

龐卡赫繼續談論齊次多項式的不變量，亦即齊次多項式在線性變換下不變的係數函數，並提及戈當（Paul Gordan）和希爾伯特的成果。然後他說：「如果存在某個多項式的無窮整體，我們可以靠其中有限個多項式的加與乘得到全體嗎？」這似乎就是希爾伯特的第 14 問題。永田雅宜（Masayoshi Nagata）在 1959 年求得反例，永田考慮的情況是某冪次加法群之表現的不變量環（ring of invariants）。希爾伯特和龐卡赫似乎都對多項式環的有限性過度樂觀。龐卡赫在本節結尾，提出代數問題應在整係數或其他係數的多項式環上進行，但沒有再繼續說明。

微分方程（動力系統）

龐卡赫以一個非常敏銳的提議開始這個章節：我們需要一個轉換群，將動力系統分為更容易描述的類別，他提出使用雙有理轉換分類代數曲線的類比。這可說是預示了史梅爾的想法，使用完整的同胚群來分類動力系統。定義得更明確一點：如果存在同胚映射將一系統的軌道映到另一系統的軌道，則稱此兩系統拓樸等價。作為範例，龐卡赫還提出一個問題：計算二維動力系統的極限圈（limit cycle）數。

令人好奇的是，龐卡赫並沒有談論他在三體問題理論研究中遭遇的動力系統複雜性問題。動力系統的現代理論一直困於尋求這類混沌系統的合適理論，像是如何分辨相對簡單雙曲系統以及奇異吸子（strange attractor）的差別。簡單混沌系統如模擬大氣對流胞（convection cell）的勞倫茲系統（Lorenz system），已被發現遍在於三維或或更高維的系統。

相反的，龐卡赫提到平面上的全純（holomorphic）向量場，探問何時可以積分，以及關於將其軌道單值化函數的問題。我們可以想像這與 20 世紀後續的發現和探索之間的連結，亦即許多意料外的完備可積系統如 KdV 系統、戶田晶格（Toda lattice）等。

含偏微分的方程（線性偏微分方程）

龐卡赫回顧當時弗列德霍姆（Erik Fredholm）在積分方程的最新工作，並明確預想到線性偏微分方程研究將需要理解無窮維空間並將線性代數擴展到這類空間。龐卡赫描述了一些他看到的案例，像是希爾（George Hill）無窮維行列式的工作與弗列德霍姆理論之間的類比，或是無窮維數列空間和無窮維函數空間之間的對照。最後他致意：「感謝希爾伯特先生這位無疑的先行者，我們正踏上這條道路。」 這條道路統一了這「兩個方法」，並應用於如狄利克雷問題（Dirichlet problem）的研究。

事實證明，線性偏微分方程在 20 世紀中葉稍後，基本上已經被函數空間技術，廣義函數（即 distribution）和傅立葉分析來掌握。研究前沿則已轉向非線性偏微分方程，這個領域仍然充滿神秘。龐卡赫對諸如歐拉和納維爾／史托克斯（Navier-Stokes）的非線性流體方程未置一詞。

阿貝爾函數

這段章節很短卻十分具體。龐卡赫提出的問題是

在代數曲線積分所得的阿貝爾函數（Abelian functions）與一般阿貝爾函數有何關係？如何分類後者？

這段話最後提出的問題在目前看來是比較重要的問題。它直接導致席格（Carl Siegel）構造的模解形（modular variety），也就是真的能分類所謂主極化（principally polarized）阿貝爾解形的模空間。這些空間是厄米特對稱空間（Hermitian symmetric space）最簡單的算術商（arithmetic quotient）。所有這類模解形以及更廣義的算術商空間是連結數論、代數幾何和李群表現（特別是「朗蘭茲猜想」〔Langlands conjecture〕）的重要成分。龐卡赫提出的這個分類問題無疑是正確的指引。

龐卡赫問題的第一部分要特別得多，儘管也有許多數學家做了研究。在現代代數幾何的語言裡，龐卡赫問的是曲線的雅可比解形在更大的阿貝爾解形集合中有何特別意義？探索如何刻畫雅可比空間的問題如今稱爲「蕭特基問題」（Schottky problem）。解決這個問題有很多非常不一樣的想法，彼此的關係依然不很明朗。本文第二作者的著作附錄中有到 1996 年爲止對此問題的回顧 [4] 。

函數論（複變）

在另一小段中，龐卡赫的主要關注點是相對於單變數的多變數解析函數論：

與單變數函數的類比給出有價值但不充分的指引；這兩類函數（單變數與多變數）有本質的區別，每當從一類函數推廣到另一類的嘗試，總會遇到意外的阻礙……

因此，

[4] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, 2nd edition, Springer Lecture Notes 1358。

爲什麼四維域中的保角表現（conformal representation）往往不可能，我們該用什麼來代替？單變量函數的眞正推廣難道不是四變數的調和函數嗎？……從哪種意義來說，兩變數的超越函數之於單變數超越函數，就像兩變數（代數或）有理函數之於單變數是（代數或）有理函數？

龐卡赫顯然料中一個成熟的研究領域。奧斯古德（William Osgood）在 1908 年之後不久開展的多複變函數研究，可見於他深具影響的《函數論教本》（*Lehrbuch der Funktionentheorie*）。這個領域在 20 世紀上半葉大爲擴展，催生了後續理論以及底下作者的著作：如班凱（Heinrich Behnke）與蘇崙（Peter Thullen）；波克納（Salomon Bochner）與馬丁（William Martin）；伯格曼（Stefan Bergman）；小平邦彥（Kunihiko Kodaira）和史賓塞（Donald Spencer）；霍爾曼德（Lars Hörmander），雷默特（Reinhold Remmert），克朗茲（Steven Krantz），賽德曼（Volker Scheidemann）[5]。催生了諸如擬凸性（pseudo-convexity）、史坦流形、層論（sheaf theory）等研究主題，不只與二維以上的代數解形連結成果豐碩，代數和超越理論之間更是交流不斷。龐卡赫在天之靈想必非常得意。

雖然龐卡赫沒有提到單變數解析函數，但這個領域在 1908 年之後幾年也蓬勃發展，擁有多采多姿的歷史。奧斯古德、卡拉席奧多利（Constantin Carathéodory）和裴隆（Oskar Perron）研究單連通域的黎曼映射定理，還有畢伯巴赫猜想（Bieberbach conjecture）和保角映射的廣泛理論，奈望林納理論（Nevanlinna theory）以及阿爾弗斯（Lars Ahlfors）在半純曲線（meromorphic curve）上的工作，泰希穆勒理論（Teichmüller theory）以及透過瑟斯頓理論（Thurston theory）在三維流形所產生的關聯，都讓這個領域進展非常深遠。

群論

在第三個小節中，龐卡赫表示他將只談論李群和迦羅瓦群，因此會忽略正日益增長的一般有限群理論和他自己也研究過的不連續克萊恩群。他回顧李群如何被李代數的技巧所馴服（他這樣描述「這是一種特殊的符號系統，我無法深入詳述，大家一定能諒解」）。龐卡赫公正的說：「迦羅瓦群的研究還不夠深入」，就像數論和代數幾何的連結一樣，他期待能在李理論和迦羅瓦理論之間建立聯繫。想尋求對迦羅瓦群更理想的理解十分困難，問題一直持續至今。

幾何

龐卡赫首先問幾何是否只不過是「用另一種語言去表達代數和解析幾何的事實？」然後他說不行：「通常幾何具備很大的優勢，因爲感官或許可以輔益理性，協助我們找到足以遵循的道路。」但是「當試圖脫離古典的三維空間時，感官就幫不了我

[5] [譯註] 如 H. Behnke and P. Thullen, *Theorie der Funktionen Mehrerer Komplexen Veränderlichen*；S. Bochner and W. T. Martin, *Several Complex Variables*；K. Kodaira and D. C. Spencer, *On Deformations of Complex Analytic Structures* 等等。

們了。」大家不該忘記在龐卡赫的時代，數學家已經理所當然的接受高維空間的想法：

如今，我們已經十分熟悉超過三個維度的概念，即使在大學談論也不會引起驚訝。

龐卡赫強而有力的說明，幾何直覺比大家期待的更穩健，在更高維時仍很有用：

直覺引導我們進入一個對我們來說過於開闊或是無法看見的空間。它作用的方式是在我們心靈喚起日常可見空間與前述空間的關係，這無疑是很不完美的圖像，但畢竟還是一個圖像。

然後，他介紹「位相分析」（Analysis Situs，即拓樸學）作爲黎曼所創建的理論，指出其中無比的重要性，正導引我們走向高維空間，而且確實必須進行所有維度的研究。當然在現代，龐卡赫常常被視爲拓樸學的擘建者。他顯然精準的預言了拓樸在 20 世紀扮演的核心角色，創造了數學語彙的關鍵元素（如同調群和同倫群），並讓我們對高維空間具備一些直覺。

有趣的是，他沒有論辨高維幾何與我們認識的三維幾何將會有什麼差異。在他的時代其實有項暗示：施萊夫利（Ludwig Schläfli）對正則多面體的分類研究顯示，5 維以上情況會變得比較單純。有意思的是這正是龐卡赫猜想如何刻畫球體的高維版本所發生的狀況：史托林斯（John Stallings）和史梅爾證明在 5 維以上確實如此，因爲就某種意義，由於高維空間中的「迴轉空間」更大，因此生活會變得比較簡單。這個隨著維度增加因而事物益發穩定的現象，在許多領域一再出現。

龐卡赫繼續向代數幾何和微分幾何致敬，說「這是成果豐饒的廣大領域」。這一點無疑是正確的，但是他沒有再針對它們具體說明什麼，思及這些領域在 20 世紀的蓬勃發展，難免令人遺憾。

康托主義（集合論與數學基礎）

在本節裡，讀者會感受到龐卡赫對康托（Georg Cantor）思想的價值舉棋難定。儘管承認「（他）對科學的貢獻廣爲人知」，但龐卡赫在結尾說：「（依憑這項理論，）我們可以保證自己會像醫師遇到優美的病態案例一樣快樂！」在這段簡短的章節裡，龐卡赫心裡最重視的似乎是該領域出現的悖論，他認爲這些明顯的矛盾「將使芝諾（Zeno）……樂不可支。」

眾所周知，從我們現在有利的視角可知，正是哥德爾（Kurt Gödel）天才的運用這些悖論，才導致數學基礎最深刻的結果，亦即哥德爾美妙的不完備定理，其哲學意義的迴響始終不絕。打從 1910 ～ 1913 年羅素（Bertrand Russell）和懷德海（Alfred Whitehead）的工作開始，追求整數、實數和集合論全面公設的數學基礎，已經發展出自己的一方天地。但是，正如哥德爾證明任何有限公設不足以構成數學的完備基礎，現在也並非大家普遍接受將數學基礎架設在集合之上。一些懷疑論者（誠然只是少數數學家）斷言數學不可能擁有「最終極」的墊腳石，而且無論如何也不需要這樣的基礎。

在 1908 年之後的一個世紀裡，聰穎的數學家已

經在邏輯，集合和基礎的主題下，創建出大量的研究材料。僅舉數例：哲美羅（Ernst Zermelo）、弗朗克爾（Abraham Fraenkel）、蘭姆西（Frank Ramsey）、路卡歇維奇（Jan Łukasiewicz）、波斯特（Emil Post）、馮諾曼（John von Neumann）、柏內斯（Paul Bernays）、哥德爾、涂林（Alan Turing）、科恩（Paul Cohen）、戴維斯（Martin Davis）、翰岑（Leon Henkin）、費弗曼（Solomon Feferman）、柴汀（Gregory Chaitin）。翻閱最近的數理邏輯教科書可見這些公設系統如 PA（皮亞諾算術系統）、ZF（哲美羅和弗朗克爾系統）、ZFC（ZF+ 選擇公設）、ZFL（ZF+ 可構造性），並產生諸如可判定性（decidability）、一致性、力迫法（forcing）、廣義連續統假說（continuum hypothesis）、非標準分析，超超不可及基數（hyperhyper inaccessible cardinal）、非古典邏輯等研究主題。

但是另一方面，當行數學家普遍有種感覺，像可測基數（measurable cardinal）這類當今集合論的東西確實是龐卡赫所謂的「病態案例」，是只能爲新手帶來存在焦慮的觀念。因此龐卡赫也許掌握了未來對該領域的主流反應，並且指出其中可說是最重要的想法。

公理研究（公設分析）

龐卡赫的這一節可以和前一節如此區分，在「康托主義」的標題下，他想的是數學基礎邏輯分析的理論面，而本節他思考的則是應用面。如果他對康托抱持懷疑，那麼他對公設分析用處的疑慮更甚：

我們正試圖條列這些多少帶著騙人味道的公設和設準，作爲各種數學理論的基礎。在這方面，希爾伯特先生獲得最出色的成果。既然這個領域似乎應該很有限，當這份清單清點完畢後就無事可做，我們很快就可以看到了。

從劃底線部分的短語，相當程度可以看出龐卡赫認爲這類清單或公設條列是無必要或誤導的。龐卡赫在這方面肯定是錯的：希爾伯特的創見並不只是列出完備歐幾里得系統的必要公設，而是要構建除某一公設之外其他都滿足的另一個幾何宇宙，這個觀點對 20 世紀數學產生莫大的影響。

在 1920 年代，德國的「現代代數」學派發展出完整的一般環論、抽象的理想論，以及諾特（Emmy Noether）對希爾伯特結果絕妙的推廣，在我們看來都是希爾伯特清單的精神傳人。如今的環與其特殊範例如代數整數環、多項式環或矩陣環分道揚鑣，取而代之的想法是，環具有多樣可能的化身，某些滿足標準公設，有些不適用。同樣的，波蘭學派發展出拓樸空間和巴拿赫空間（Banach space）的抽象理論，也是遵循相同的路徑：檢視所有公設的組合，看看會出現怎樣的空間。

這種觀點已經被 20 世紀的數學文化澈底吸收，並在布巴基（Bourbaki）的不朽著作中明晰細述。在現在純數學社群的日常裡，這已經是不言而喻的「當然」方法，要爲每項論證找到最佳的抽象架構，爲每項定理找到最通用的形式。但是龐卡赫似乎錯過這一點，這類想法絕對不合他的胃口。

下面這個粗糙的列表總結了我們的想法。有趣的是龐卡赫在許多領域看到彼此聯繫的可能，但或許

因爲沒那麼激勵人心，他並不強調既有領域的深化。他對「設準研究」的消極感受，似乎造成他錯過 20 世紀上半葉的爆炸性現象，幾乎數學所有領域（尤其是代數）都以最一般的抽象形式重新建設，並且查考由此引入的所有數學對象（例如所有的有限單群〔simple group〕）。∞

龐卡赫得分表

得分	失分
連結數論與代數幾何的重要性	交換環與非交換環的一般理論
數論分析方法與 L 函數的重要性。	
動力系統的拓樸等價。	混沌動力系統更深的理論。
函數空間及其線性代數的重要性。	非線性偏微分方程的小成功與挑戰。
多複變和單複變的區別。複解析幾何和代數幾何的關聯。	更深的單複變理論（例如泰希穆勒、畢伯巴赫）
李群和迦羅瓦群的重要性。	一般有限群理論。
拓樸學是探究高維的關鍵。	3 維、4 維、7 維（怪球〔exotic spheres〕）豐富的歧異性。
	哥德爾和悖論的深層意義。
	所有領域的公設處置（最後是範疇論〔category〕）
	計算方法的爆炸性增長、計算實驗、分析。
	機率的發展、隨機微分方程、資訊論（information theory）

本文出處

本文譯自“Henri's Crystal Ball”, *Notices of the American Mathematical Society* 55 (2008) No.4, AMS。感謝 AMS 同意轉載翻譯。

譯者簡介

翁秉仁為臺灣大學數學系副教授。

延伸閱讀

▶威 伊 ,“The Future of Mathematics”, *The American Mathematical Monthly* 57, No. 5 (May, 1950), pp. 295-306。這是威伊 1948 年文章的英文翻譯，以引用龐卡赫的演說談「數學的未來」。

▶布勞德 (Felix Browder),“Reflections on the Future of Mathematics”, *Notices of the American Mathematical Society* 49 (2002) No.6, AMS, pp. 658-662。布勞德在 1999 ~ 2000 擔任美國數學學會的主席，這篇文章是他 2002 年 1 月 6 日在聖地牙哥聯合數學年會，從希爾伯特與龐卡赫的演說談起，思考關於數學未來的離職演說稿。