

神經網路終於降服符號數學

●作者：歐奈斯 (Steven Ornes)

●譯者：王夏聲

在翻譯了一些複雜的數學方程後，研究人員創建了一個人工智慧系統，他們希望這個系統能回答更大的問題。

作者簡介：歐奈斯是居住在田納西州納許維爾的科普作家，他的著作《數學藝術：真相，美麗和方程式》(*Math Art: Truth, Beauty, and Equations*, 2019, Sterling) 是以令人興奮的數學思想中找到靈感的 19 位藝術家作品為主題。他也是〈Calculated〉，談論數學、藝術和文化交匯 podcast 故事集的主持人和創作者。



通過將符號數學轉換成樹狀 (tree-like) 結構，神經網路最終可以解決更多抽象問題。(Jon Fox/Quanta 雜誌)

70 多年前，處於人工智慧研究前沿的研究人員引入了神經網路 (neural network)，以作為思索「大腦如何運作」的革命性方法。在人腦中，數十億個神經元連接的網路可以釐清感知數據 (sensory data) 的意義，允許我們能夠從經驗中學習。人工神經網路也可以按照它們自學的規則，通過層層

連接的神經元過濾大量數據，以進行預測和識別模式。

現在，人們將神經網路視為人工智慧的一種靈丹妙藥，能夠解決任何可改述為圖型識別 (pattern recognition) 問題的技術難題。它們提供聽起來自然的語言翻譯。照片 APP 以它們來識別你的收藏



Quanta Magazine 是西蒙斯基金會 (Simons Foundation) 出版但編輯獨立之網路科普雜誌 (<http://www.quantamagazine.org/>)，希望能提高數學、物理與生命科學前沿研究進展的公眾能見度。本文譯自：

<https://www.quantamagazine.org/symbolic-mathematics-finally-yields-to-neural-networks-20200520/>

本刊感謝 Quanta magazine 與主編 Thomas Lin 同意翻譯轉載，翻譯之文責由本刊自負。



在巴黎的 Facebook 人工智慧研究團隊工作的電腦科學家藍普爾與合作者提出了一種將符號數學轉換為神經網路可以理解的形式的
方法。(由 Facebook 提供)

中重複出現的面孔並對其進行分類。而且神經網路所驅動的程式在圍棋和西洋棋等競賽中已經擊敗了世界上最好的選手。

但是，神經網路始終在一個顯著的領域落後：困難的符號數學問題之求解。這些包括了微積分課程的亮點，例如積分或常微分方程。這些障礙源自於需要精確答案的數學本質。然而，往往神經網路在機率領域表現得出類拔萃。它們學會辨別模式——西班牙文翻譯或者人臉辨識表現最好——並可以創造出新的模式。

去年年底，情況發生了變化，在巴黎的 Facebook 人工智慧研究團隊工作的二位電腦科學家藍普爾（Guillaume Lample）和遐通（François Charton）提出了以神經網路解決符號數學問題第一個成功的方法。他們的方法不涉及數字運算或數值逼近。相反，他們發揮神經網路的優勢，根據幾乎已解決的問題——語言翻譯，重新建構數學問題。

研究人工智慧應用到數學的遐通說：「我們都主修數學和統計學。數學是我們的母語。」

結果是，藍普爾和遐通的程式可以生成複雜的積

分和微分方程的精確解——包括一些難倒內建了明確解題規則的流行數學套裝軟體的問題。

新程式有效的用了神經網路的主要優點之一：它們制訂自己的隱含規則。結果，「規則與例外之間沒有差別，」麥克蘭德（Jay McClelland）這麼說。他是史丹福大學的心理學家，他以神經網路來模擬人們如何學習數學。在實作上，這意味著程式不會受絆於最困難的積分。從理論上講，這種方法可以得出非常規的「規則」，從而可以在人或機器當前無法解決的問題取得進展，例如發現數學問題的新證明，或理解神經網路本身性質的問題。

當然，那還沒有發生。但是很顯然該團隊已經回答了幾十年的問題——人工智能可以做符號數學嗎？——答案是肯定的。人工智慧研究組織 OpenAI 的創辦人之一札仁巴（Wojciech Zaremba）說：「他們的模型是成熟的。這些演算法也是明確完善的。他們非常巧妙的設定了這個問題。」

「他們確實提出了超出規則依循的機器系統範圍所能解決問題的神經網路，」麥克蘭德說「這是非常令人興奮的。」

教電腦論數學

電腦一向擅長於處理數字計算。計算機代數系統（computer algebra system）將了數十種或數百種硬佈線（hard-wired）預設指令的演算法結合。它們的目的在於執行特定操作，通常是無法遷就例外情況的規則嚴格遵循者。對於許多符號性的問題，它們所算出的數值解對於工程和物理應用而言足夠是接近的。

神經網路則是不一樣的。它們沒有硬佈線的規定。取而代之，它們訓練大量的數據集——越大越好——並且使用統計數據獲取很好的近似。在此過程中，它們學習什麼可導致最佳結果。語言翻譯程式特別出色：它們不是在逐字翻譯的情況下，而是在整個文本的上下文中翻譯短語。Facebook 研究人員認為這是解決符號數學問題的一種優勢，而不是障礙。它為程式提供了一種解決問題的自由。

對於某些開放式的問題，例如積分，這種自由特別有用。數學家之間有一句老話：「微分是技術；積分是藝術。」（differentiation is mechanics; integration is art.）這意思是為了找到函數的導函數，只需要遵循一些明確定義的步驟。但是要找到積分，通常需要另外一些東西，這些比起計算更接近直覺些的東西。

Facebook 團隊猜測這種直覺可以使用圖型識別來近似。遐通說：「積分是數學中最類似圖型識別的問題之一。」因此，即使神經網路可能無法理解函數的作用或變量的含義，它們也確實會發展出一種直覺。即使不知道為什麼，神經網路也開始感知到什麼有效。

例如，一位數學家要求對 $yy'(y^2 + 1)^{-1/2}$ 進行積分，就像會直觀的猜測原函數（[primitive] 也就是被微分後所推導出積分的函數表達式），所包含看起來像 $y^2 + 1$ 平方根的項。

為了讓神經網路像數學家一樣處理符號，遐通和藍普爾首先將數學表達式轉換為更有用的形式。他們最終將它們重新詮釋為樹（tree），這種形式在本質上與圖解句子（diagramed sentence）相似。數學運算（例如加法，減法，乘法和除法）成為樹的连接（junction）。求冪或三角函數等操作也是如此。參數（變量和數字）變成了葉（leaf）。除了極少數例外，樹形結構捕獲了可以將嵌套在更長運算的表達式中的方式。

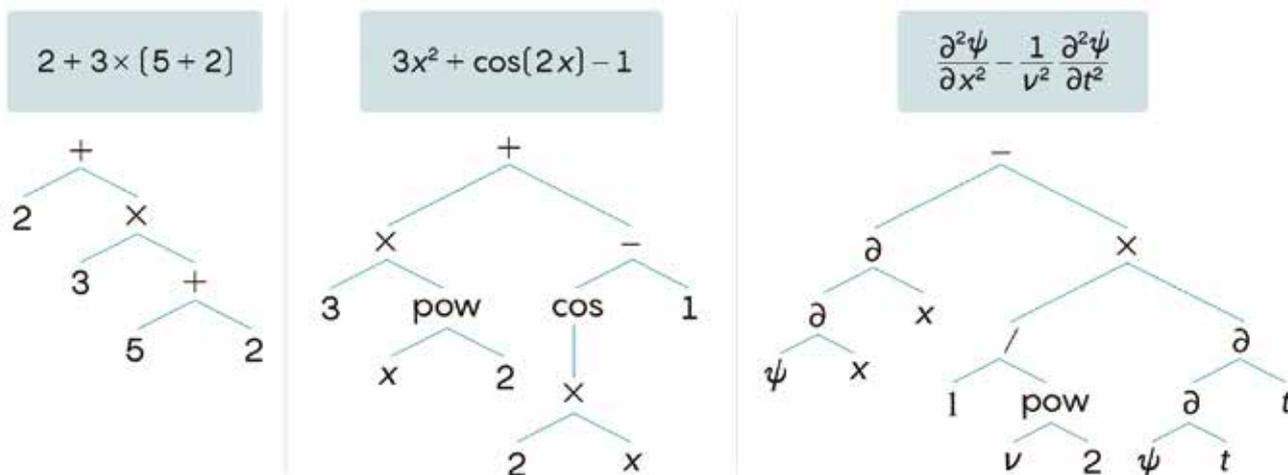
藍普爾說：「當我們看到一個大的函數時，我們可以看到它由一些較小的函數組成，並且對解決方案有一些直覺，我們認為該模型試圖在符號中找到有關解決方案的線索。」他說，這個過程與人們如何求解積分（實際上是所有數學問題）類似，將其簡化為以前可辨識且會解的子問題。

在提出這種架構之後，研究人員使用了一組基本函數來生成多個訓練數據集，這些訓練數據集總計約 2 億個（樹形）方程和解。然後，他們將數據「餵進」到神經網路，以便可以了解這些問題的解答像什麼。

訓練結束後，是時候看看神經網路可以做什麼了。電腦科學家為它提供了 5,000 個方程的問題集，這次沒有附答案。（這些測試問題中沒有一個被歸類為「無解」。）神經網路非常出色的通過了測試：它設法為絕大多數問題提供了正確的解，包括準確性和其它全部。它尤其擅長積分，可以解出近 100% 的測試問題，但在常微分方程卻不太成功。

樹型的數學

通過將數學表達式重寫為一些關係的分支組合，研究人員終於開發出可以處理符號數學的神經網絡。加法和三角函數之類的運算成為連接，而數字和變數則成為葉。這允許神經網絡發展出解答案可能看起來像什麼的一種數學直覺。



(5W Infographics/Quanta 雜誌)

對於幾乎所有問題，該程式只用了不到 1 秒鐘的時間即可生成正確的解。在積分問題上，它在速度和準確性方面勝過流行的軟體程式集 Mathematica 和 Matlab 中的某些求解器。Facebook 團隊報告說，神經網路為那些商業解決方案都無法解決的問題提供了解決方案。

解密黑盒子

儘管取得了這些結果，但打造 Mathematica 的 Wolfram 研發長數學家傑蒙德森 (Roger Germundsson) 卻對直接比較提出了異議。Facebook 研究人員將他們的方法僅與 Mathematica 的部分功能——即積分對比「integrate」和微分方程對比「DSolve」——進行了比較，但 Mathematica 用戶可以使用數百種其他求解工具。

傑蒙德森還指出，儘管訓練數據集規模巨大，但它僅包含單變數的方程，和基於基本函數的函數。

他說：「這只是一小部分可能的表達式。神經網路尚未對物理和金融領域常用更複雜的函數（例如誤差函數〔error function〕或貝塞爾函數〔Bessel function〕）進行過測試。」（Facebook 團隊表示，以非常簡單的修改後，可能會在未來的版本進行測試。）

加州大學聖塔芭芭拉分校的數學家吉布 (Frédéric Gibou) 也不相信 Facebook 團隊的神經網路是絕對可靠的，他已經研究了使用神經網路解決偏微分方程的方法。他說：「你必須確信它會一直有效，而不僅僅是解決某些選定的問題，而事實並非如此。」其他評論家指出，Facebook 團隊的神經網路並不真正理解數學。它更像是一個非凡的猜測者。

但他們仍然同意新方法將被證明是有用的。傑蒙德森和吉布認為，神經網路將在下一代符號數學求解器餐桌中佔據一個席位——這將是一個很大的餐桌。「我認為它將是許多工具之一，」傑蒙德森說。

除了解決符號數學的這一特定問題之外，Facebook 團隊的工作令人鼓舞的證明了這種方法的原理和威力。劍橋大學的數學家漢森（Anders Hansen）表示：「如果這些技術能夠解決人們以前無法解決的問題，數學家一般會留下深刻的印象。」

神經網路的另一個可能的探索方向是自動定理生成器的開發。儘管越來越多的數學家在研究使用人工智慧生成新定理和證明的方法，但「目前的技術水平還沒有取得很大進步，」藍普爾說「這是我們正在尋找的東西。」

遐通描述了他們的方法至少有兩種方式可以推展人工智慧定理尋檢器（AI theorem finder）。首先，它可以充當數學家的助手，通過識別已知猜想中的模式為存在的問題提供幫助。其次，機器可以生成數學家錯過的潛在可證明結果的列表。他說：「我們相信，如果您可以計算積分，那麼您應該能夠作證明題。」

提供證明幫助可能最終成為殺手級應用，甚至超出了 Facebook 團隊的描述。一種反駁定理的常見方法是提出一個反例，說明它不能成立。這類神經網路有一天可能非常適合完成這項任務：找到一個意外的扳手來扔進機器添亂。

這種方法顯示出希望的另一個未解決的問題是神經網路最令人不安的方面之一：沒有人真正了解它們是如何運作的。訓練位元在一端輸入，預測位元在另一端出現，但是在兩端之間發生的事情——讓神經網路成為如此好的猜測者的確切過程——仍然是一個關鍵性的未解問題。

另一方面，符號數學絕對不那麼神秘。「我們知道數學是如何運作的，」遐通說「通過使用特定的

數學問題作為測試來查看機器在哪裡成功和在哪裡失敗，我們可以學習神經網路如何運作。」

很快的，他和藍普爾計劃將數學表達式輸入到他們的神經網路程式中，並追蹤程式對表達式中微小變化的回應方式。繪製輸入變化如何觸發輸出變化的地圖可能有助於揭示神經網路的運作方式。

札仁巴認為，這種理解是邁向教導神經網路推理和真正理解它正在回答的問題有潛力的步驟。「在數學上很容易改弦易轍，並端看如果表達式變得不同，（神經網路的）效果會如何。我們可能會真的學到推理方法，而不僅僅是答案。」他說「結果將非常無可限量。」

本文出處

Quanta Magazine May 20, 2020。

譯者簡介

王夏聲為新竹交通大學應用數學系副教授。

延伸閱讀

- ▶ http://www.ams.org/news?news_id=6207
美國數學學會 2020 年 6 月 18 日與遐通關於他與藍普爾論文訪談的報導。
- ▶ <http://towardsdatascience.com/deep-learning-for-symbolic-mathematics-5830b22063d0>
穆勒（Oliver Müller）對藍普爾和遐通原論文的導讀，相當淺顯易讀。
- ▶ https://www.youtube.com/watch?v=I12GXD0t_RE
https://www.youtube.com/watch?v=O_sHHG5_lr8
遐通在史丹福大學線上研討會的原論文演講影片。

《數理人文》訂購單

(請填妥資料後傳真至 03-5731915 或郵寄至交通大學丘成桐中心)

數理人文為半年刊，固定於每年之 1 月及 7 月各出版一期。

訂閱方案	優惠價
一年 2 期 (印刷品)	450 元
一年 2 期 (掛號)	490 元
二年 4 期 (印刷品)	900 元
二年 4 期 (掛號)	980 元

自_____年_____月號開始訂閱。
(未填寫期數者，將由最新一期寄發)

續訂依原訂閱到期後續寄送。

客服專線：03-5731915

客服信箱：alicefsy@math.nctu.edu.tw

yushan.deng@intlpress.com

■ 基本資料 (請以雜誌收件者之資料為主)

姓名：_____ 性別：先生 小姐

電話：日()_____ 夜()_____ 手機：_____

E-mail：_____

收件地址：□□□_____

■ 付款資料

付款總金額：優惠價_____元 × 份數_____ = _____元

郵政劃撥 (劃撥帳號：50422323 戶名：馮肅媛)

您可以使用本頁所附之劃撥單訂購，並將交易憑證傳真至 03-5731915，或使用郵局之劃撥單訂購，並請在劃撥單上寫明訂閱方案、聯絡方式及 E-mail。

網路訂購 (https://yaucenter.web.nctu.edu.tw/?page_id=78&lang=tw) 期刊之網站提供電子平台的訂購連結

■ 發票資料

抬頭：_____ 統一編號：_____

98-04-43-04 郵政劃撥儲金存款單																		
收款帳號	5	0	4	2	2	3	2	3	金額	億	仟萬	佰萬	拾萬	萬	仟	佰	拾	元
	(阿拉伯數字)																	

◎寄款人請注意背面說明
◎本收據由電腦印錄請勿填寫
郵政劃撥儲金存款收據

通訊欄 (限與本次存款有關事項)

- 自_____年_____月號訂閱
 續訂依原到期數接續寄送
 一年 2 期 (印刷品) 450 元
 一年 2 期 (掛號) 490 元
 二年 4 期 (印刷品) 900 元
 二年 4 期 (掛號) 980 元

訂戶姓名：_____

連絡電話：_____

E-mail：_____

統一編號：_____

發票抬頭：_____

收款戶名 馮肅媛

寄款人 他人存款 本戶存款

姓名

地址與電話

申請人請於瞭解「郵政儲金匯兌個人資料直接蒐集告知聲明」內容後，填妥本單提交郵局辦理。

經辦局收款章戳

主管：_____

收款帳號戶名

存款金額

電腦記錄

虛線內備供機器印錄用請勿填寫

經辦局收款章戳