在正多面體的環程旅行

數

●作者：洪納（Patrick Honner）●譯者：王夏聲

想像一下，如果我們生活在一個正立方體形狀的地球上。你該如何找到環程旅行的最短路徑呢？

作者簡介
洪納在布魯克林科技高中教授數學和計算機科學，他還擔任教學教練。他是美國數學碩士教師，2013 年度數學和科學教學卓越總統獎的獲得者。他是數學和教學中的經常作家，演講者和主持人。

（BIG MOUTH，Quanta 雜誌）

你可曾想過，如果地球的形狀不是球體，生活會是什麼樣子？我們總是將太陽系的順暢運行和行星旋轉對稱性所帶來的無痕銜接的平順日落視爲理所當然。球形的地球也可以讓我們很容易的找出從 A 點到 B 點的最快方式：只需沿著經過這兩個點的並將球體切成兩半的圓弧旅行。我們使用這些稱爲測地線的最短路徑來設計規劃飛機路線和衛星軌道。

但是，如果我們是住在一個正立方體上呢？我們的世界會更加搖擺不定，我們的視野會比變得更彎曲，也將更難找得到兩點間的最短路徑。你可能不會花太多時間想像正立方體上的生活，但數學家們會：他們研究在各種形狀的星球上的旅行會是什麼樣子的。最近，一項關於十二面體上環程旅行的發現改變了我們觀察幾千年來觀察物件的方式。

在給定的形狀上尋找最短的環程旅程看似很簡單，就如同只要選定一個方向並沿直線行走一樣。

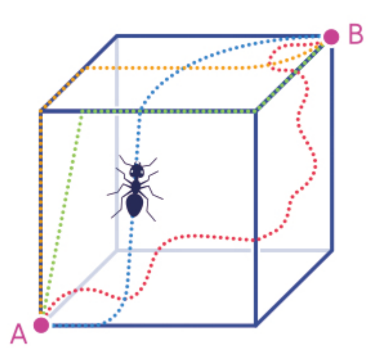
Quanta Magazine 是西蒙斯基金會（Simons Foundation）出版但編輯獨立之網路科普雜誌（http://www.quantamagazine.org/），希望能提高數學、物理與生命科學前沿研究進展的公眾能見度。本文譯自：
https://www.quantamagazine.org/the-crooked-geometry-of-round-trips-20210113/
本刊感謝 *Quanta magazine* 與主編 Thomas Lin 同意翻譯轉載，翻譯之文責由本刊自負。

終究會回到你出發點，對吧？嗯，這會取決於你在何種形狀的物體表面上旅行。如果它是一個球體，答案是肯定的。—— 當然，這裡我們忽略了地球不是一個完美的球體，而且它的表面也不是完全光滑的事實。在球體上，最短路徑是沿著大圓弧，也就是像赤道一樣的測地線。如果你繞赤道走一圈，大約 4 萬公里後，你會繞完一圈，最後剛好回到起點。

在一個正立方體世界中，測地線就不那麼明顯了。在單個面上找到一條最短路徑很容易，因爲每個面都是平的。但是如果你在一個正立方體的世界裡行走，當你到達邊緣時，你如何繼續「直行」呢？

有一個有趣的古老數學問題答案可以用來回應我們的疑問。想像一隻螞蟻在正立方體的一個角落，想要到達對應的角落。那麼在正立方體表面上從 A 到 B 的最短路徑是什麼呢？

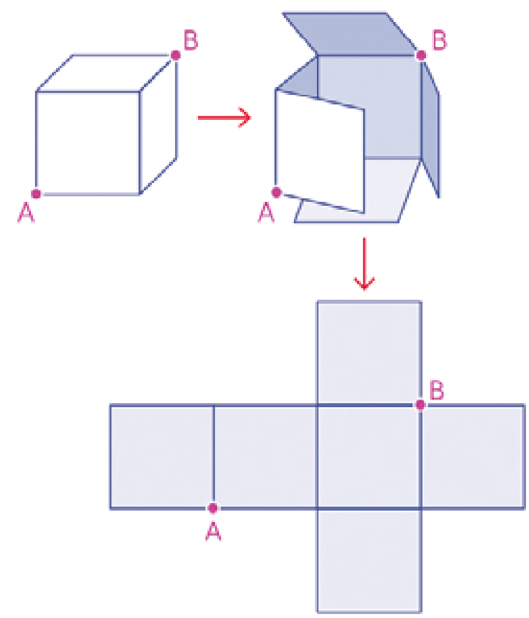
你可以想像出螞蟻可以有許多不同的路徑選擇。



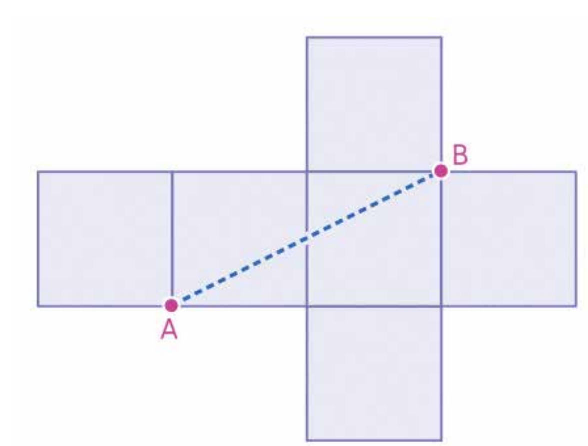
（Samuel Velasco，Quanta 雜誌）

但是哪一條路徑是最短的呢？有一種巧妙的方法可以解決這個問題。我們把正立方體攤平！

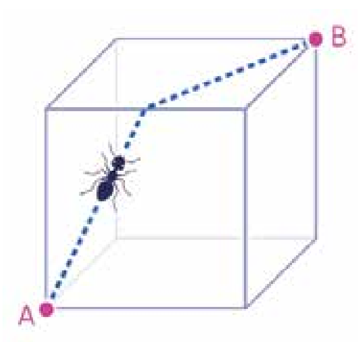
如果正立方體是紙做的，你可以沿著邊緣剪開，把它攤平，得到一個像這樣的網格（net）。



在這個平坦的世界中，很容易找到從 A 到 B 的最短路徑：只需在它們之間畫一條直線就可以了。



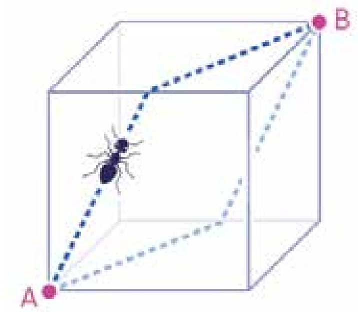
要知道我們的正立方體世界測地線是長什麼樣子的，只需將正立方體重新拼接回原狀。這是我們最短的路徑。



因爲正立方體的每個面本身都是平坦的，攤平正立方體是可行的，所以當我們沿著邊緣攤平的時候，沒有任何東西會變形。（像這樣「攤平」一個球體的類似嘗試是行不通的，因爲我們無法在不扭曲球體的情況下攤平它。）

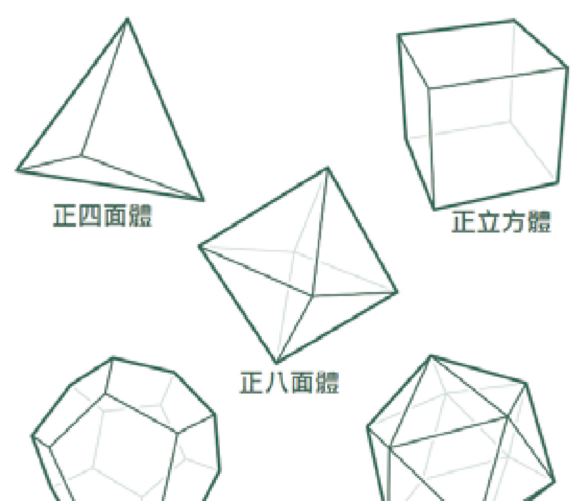
現在，我們已經了解了正立方體上的最短路徑是什麼樣的，讓我們重新審視我們是否可以沿著任何最短路徑行走並最終回到我們出發點的問題。與球體不同，並非在一個正立方體上的每一條最短路徑都可以做環程旅行。

環程旅行的路徑的確是存在的 —— 但是有個前題。請注意，螞蟻可以沿著我們之前所繪製的路徑繼續前進，並最終回到它的出發點。在正立方體上，完整的環程會繪製出一條看起來像菱形的路徑。



沿著這條環程路徑，螞蟻在返回起點之前必須經過另一個頂點（點 B）。這就是問題所在：在同一頂點開始和結束的每條環程路徑都必須通過正立方體的另一個頂點。

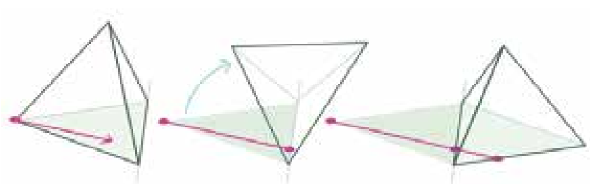
以上的結論對於 5 個正多面體（Platonic solid，也稱柏拉圖多面體）中的 4 個來說，這是正確的。在正立方體、正四面體、正八面體和正二十面體上，任何在同一頂點上開始和結束的最短路徑都必須沿途經過其他頂點。數學家 5 年前證明了這一點，但正十二面體並不位列其中。我們稍後再談。



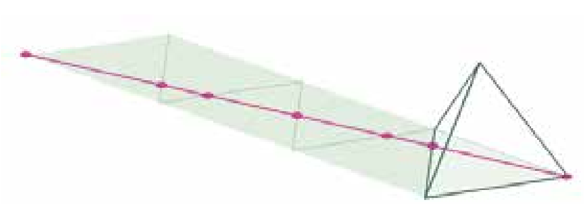
爲了了解爲什麼在 5 個柏拉圖立體中的 4 個上關於測地線的事實都是正確的，我們將對這些路徑採取翻滾（tumbling）方法，我們將切換到正四面體世界，在那裡能更容易研究翻滾的路徑。

想像一下，從正四面體的一個頂點出發，沿著一個面順著這個面的一條直線前行。而且我們選定正四面體的方向，並規定我們的路徑從底面開始。

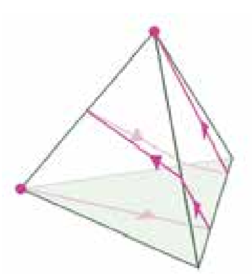
當我們遇到一條邊時，我們將四面體翻滾過來，這樣我們的路徑就會繼續保持在底部的面上：



這個翻滾圖示為我們提供了一種追踪路徑的方法，就如同我們在正立方體的網格上所做的一樣：



上面的翻滾路徑代表了正四面體表面的這條路徑：

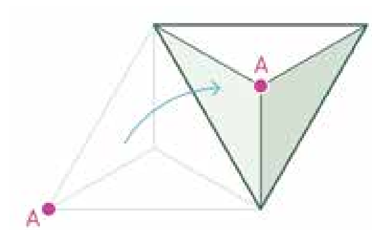


這個是正四面體的 5 次翻滾對應於路徑所經過的額外 5 個面。

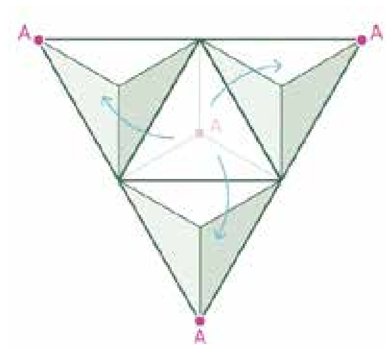
現在我們可以將正四面體表面上的任何路徑想像成這個翻滾空間中的路徑。讓我們將起點稱為 A 點，看看經過數次翻滾後點 A 的落點位置。

當我們的路徑從 A 點離開時，四面體翻滾到對面。 這將 A 點抬離地面。

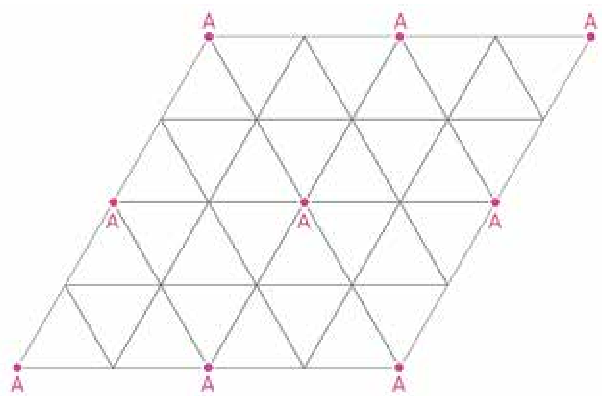
頂點 A 暫時懸浮在我們翻滾的空間上方。在創建翻滾空間時，我們通常不會指出 A 點的位置，但如果我們向下看，它就會出現在這裡。



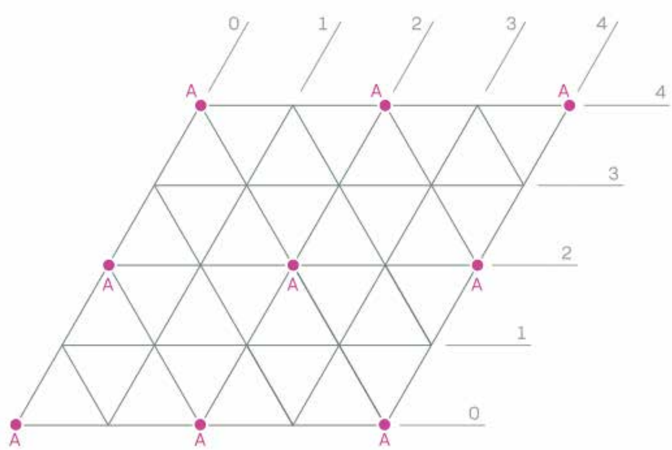
隨著路徑的持續，正四面體會再度翻滾。它可以朝兩個方向前進，但無論哪個方向 A 點都會再回到地面。



當我們讓正四面體向各個可能的方向翻滾時，我們最終會得到一個如下所示的翻滾空間：



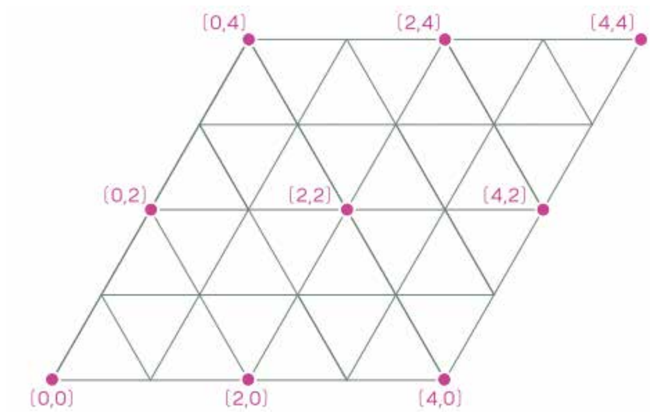
由於正四面體的等邊三角形的面組合在一起的方式，這將創建一個網格系統。



這個網格系統告訴我們關於翻滾空間的兩件有趣的事情。

第一、正四面體的頂點可以落地的點都是「格點」，或者是整數坐標的點。那是因爲我們坐標系中的一個單位是我們四面體的一個邊長。

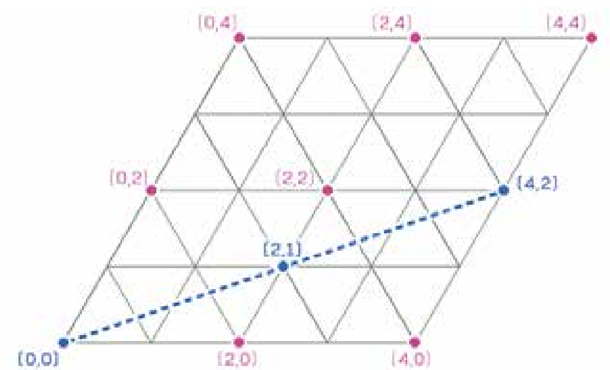
第二、看看 A 點可以在落在哪裡。A 點的坐標總是偶數。每當 A 點落在地面時，它將在兩次翻滾後再返回地面，因此 A 點的可能著陸點在每個翻滾方向上都間隔兩個邊長。



現在讓我們看看這對測地線來說意味著什麼。回想一下，在正四面體上從 A 點出發和結束的路徑將是翻滾空間中從 (0,0) 處的 A 點出發並在另一個 A 點處結束的直線段。當路徑的起點和終點都是 A 點時，路徑的中點有一些非常有趣的東西。

即使在我們彎曲的坐標系中，標準的中點公式仍然成立，因此我們可以通過對端點坐標求平均值來找到中點的坐標。由於起點的坐標都是 0，終點的坐標都是偶數，所以我們的中點坐標都是整數。這使得中點成爲格點，正如我們在上面觀察到的，因此它對應於翻轉空間中三角形的頂點。

例如，從 (0,0) 到 (4,2) 的路徑有中點 (2,1)，這是我們網格中的一個格點。



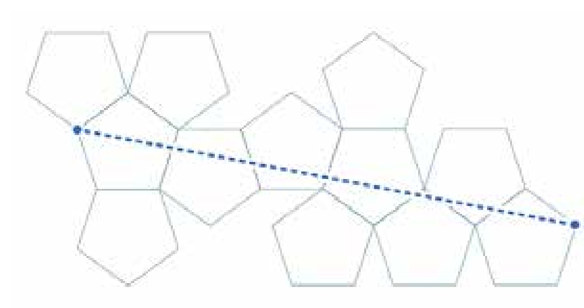
這意味著在正四面體的表面上，這條從 A 點回到它自身的路徑必須沿途經過另一個頂點。

由於 A 點的每個可能著陸點在該坐標系中都有偶數坐標，因此從 A 點開始和結束的每條測地線路徑的中點將對應到一個格點。這說明了正四面體表面上從 A 點到 A 點的每一條測地線都必須通過另一個頂點。

這是數學家戴維斯（Diana Davis）、道茲（Victor Dods）、晁布（Cynthia Traub）和楊（Jed Yang）在 2015 年提出的嚴格論證的簡單版本。他們使用了一個類似但更複雜的論證來證明在正立方體上相同的結論也成立。福克斯（Dmitry Fuchs）第二年證明了在正八面體和正二十面體上也有同樣的結論。正因為如此，我們知道對於正四面體、正立方體、正八面體和正二十面體而言，沒有從一個頂點回到自身而不經過另一個頂點的最短路徑。

但是，正十二面體表面上是否存在這種路徑一直是一個懸而未決的問題。直到 2019 年，數學家艾特里亞（Jayadev Athreya）、奧利契諾（David Aulicino）和胡珀（Patrick Hooper）證明這實際上是可能的。事實上，他們在正十二面體的表面上發現了無窮多條以某個頂點為起、止點，但不經過其他頂點的最短路徑。

這是一條在正十二面體的網格上顯而易見的最短路徑。



幾千年來，因為柏拉圖正多面體有很多的共通點，人們一直將它們綁一起探索研究。但是現在我們對正十二面體有了一些新的認識，它有了不同之處。這個神秘的發現表明了：無論我們對數學主題認識有多麼的透徹，總會有更多的東西需要學習。它還表示了，從問題到解決方案的路徑並不總是一條直線。∞

本文出處

Quanta Magazine Jan 13, 2021。

譯者簡介

王夏聲是陽明交通大學應用數學系副教授。

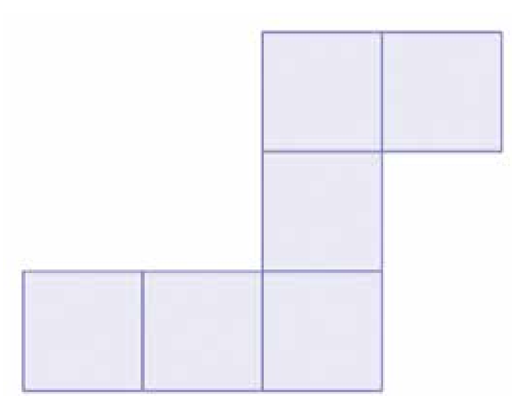
延伸閱讀

▶《胡桃裡的宇宙》霍金（Stephen Hawking）著，葉李華譯，大塊文化（2001）。本書曾獲 2003 ~ 2004 第二屆吳大猷科普獎的銀籤獎。

習題

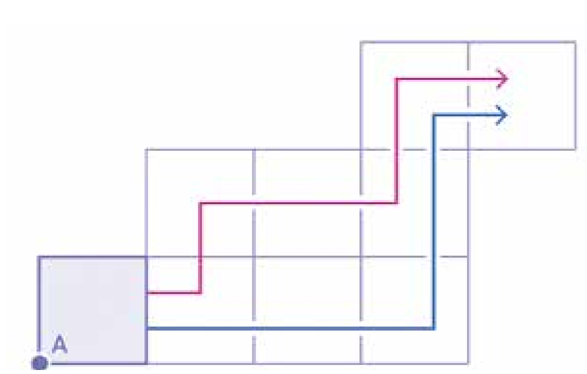
1 如果正立方體的邊長爲 1，螞蟻從頂點到相對頂點的最短路徑是多長？

2 解釋爲什麼下圖不能是正立方體上路徑的翻滾路徑。

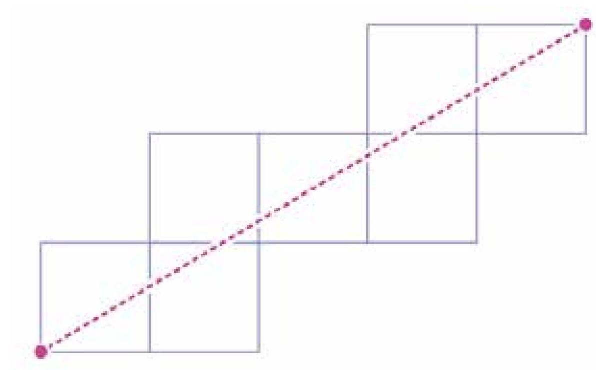


3 正立方體翻滾路徑的一個複雜處在於：A 點並沒有一個唯一的端點位置與正立方體上的給定端點位置相關聯。

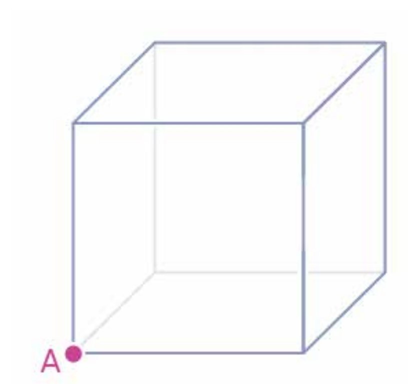
例如，即使正立方體最終在同一位置沿紅色路徑或藍色路徑翻滾，A 點最終也會在落不同的位置。請確認沿紅色路徑和藍色路徑翻滾後，A 點的最終位置。



4 這是正立方體上路徑的有效翻滾路徑。

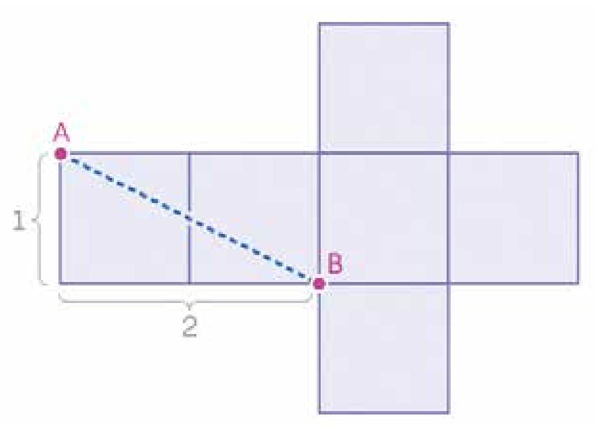


請畫出從 A 點出發在正立方體表面上相對應的路徑。



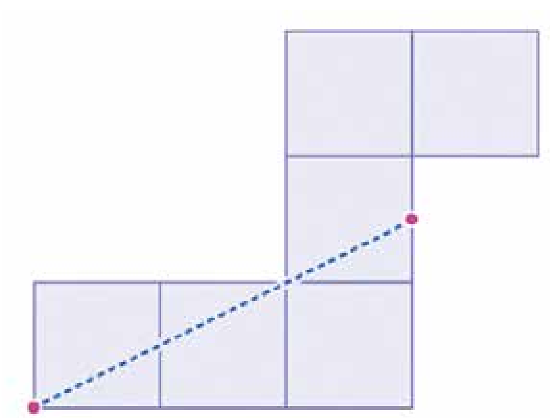
解答

1 路徑是邊長爲 1 和 2 的直角三角形的斜邊。



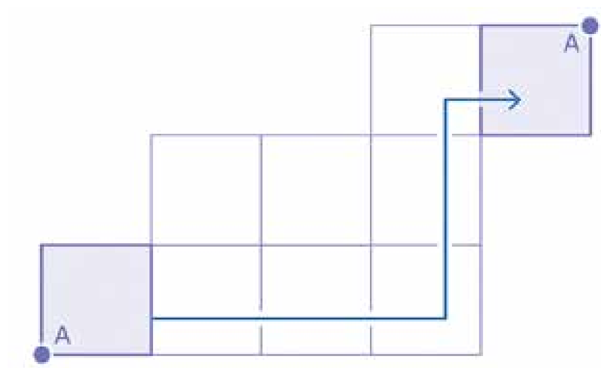
根據畢氏定理，AB 的長度爲 $\sqrt{5}$ 。

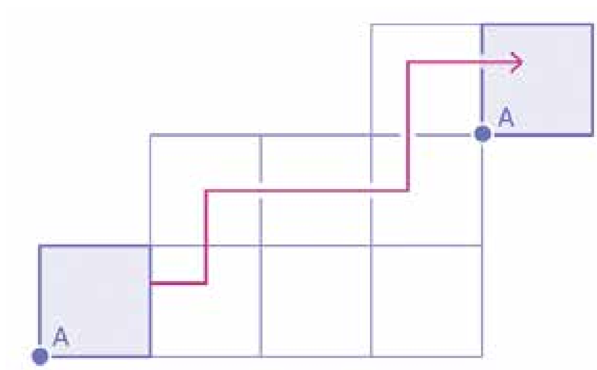
2 如果一條路徑迫使正立方體最初向右翻滾兩次，那麼它的「斜率」是每向上移動一個正立方體邊長並向右移動兩個正立方體邊長。在第一次翻滾後，這條路徑所能到達的最高位置是側邊的一半（也就是說，1.5 倍正立方體邊長），這將迫使下一次翻滾向右。



這讓我們深刻的認識到爲什麼正立方體的翻滾路徑會比正四面體的翻滾路徑更複雜。

3 以魔術方塊或骰子來演示是很有幫助的。要注意的是，藍色的路徑不能是正立方體上路徑的翻滾路徑。





4