數

從鑲符問題談起

●作者：胡著信

作者簡介

胡著信是 1996 年美國伊利諾大學厄巴納 / 香檳分校（University of Illinois at Urbana-Champaign）數學博士，畢業後從事資訊科學和商業諮詢工作。現居住美國南加州。

2020 年的諾貝爾物理學獎頒給了三位對黑洞研究有重大貢獻的科學家潘洛斯（Roger Penrose），根策爾（Reinhard Genzel）和吉茲（Andrea Ghez）。三位得主之一的英國科學家潘洛斯原本是數學家，其研究領域橫跨數學和物理。潘洛斯在純數學上也做出過很多傑出的貢獻。其中，潘洛斯密鋪（Penrose tiling）[1] 就是他在數學上的一項重要的成果。潘洛斯密鋪的產生受到了王氏密鋪（Wang tiling）[2] 的影響，而王氏密鋪的產生又受到了鑲符問題和骨牌拼合的影響。王氏密鋪的創造者是數理邏輯學家和哲學家王浩。鑲符問題，又稱移棋問題，是我們今天要談的主要話題。

楊振寧先生去年寫了一篇很有意思的文章〈許寶騄和移棋相間法〉發表在《數學文化》上 [3]。楊振寧在這篇文章裡研究了一般鑲符問題的 2 色移 2 問題並給出了他自己得到的通解。鑲符問題起源於中國清代。目前發現的最早記載這個問題的文獻是清順治年間發表的《堅瓠集》[4]，距今已有三百多年，作者爲褚稼軒（褚人獲）❶。在褚稼軒之後，清代樸學大師俞曲園（俞樾）❷ 也研究過鑲符問題 [5]。俞曲園是紅學家俞平伯的曾祖父，數學家許寶騄的曾外祖父。在上世紀 30 年代，上海交通大學教授姜長英等學者也研究過這個問題。

（一）鑲符四色，拓樸古題

鑲符問題是拓樸學古典問題之一。蘇格蘭數學物理學家泰特（Peter Tait）是最早研究這個問題的西方學者。1884 年，他在《哲學與科學》（*Philosophical Magazine and Journal of Science*）雜誌上發表了一篇文章〈李斯廷之拓樸學〉（Listing's Topologie）。泰特在這篇文章裡討論了 25 個拓樸學問題，其中，問題 12 就是鑲符問題。泰特寫道，幾個星期以前，他在火車上看到有人在玩一個移動數枚硬幣的遊戲。泰特給出了這個遊戲（4 對硬幣）的一個解。

移動前：$OOABABABAB$
一移後：$BAABABAOOB$
二移後：$BAABOOAABB$
三移後：$BOOBAAAABB$
四移後：$BBBBAAAAOO$

這裡，A 代表先令（shilling），B 代表鎊幣（sovereign），O 代表空格。泰特還討論了一些更複雜的情況。

1889 年，法國數學家德蘭諾瓦（Henri Delannoy）在《自然》（*La Nature*）上給出了這個問題（鑲符問題 2 色移 2）的通解 [6]，即 n 對棋子移 n 步的移法通解公式，對所有正整數 $n \geq 4$。他的這個通解和楊振寧給出的通解是完全一樣的。在德蘭諾瓦以後還有不少人也獨立的給出了這個同樣的通解。

❶ **註**：褚人獲（1635 ～ 1705），清初學者，字稼軒，又字學稼，號石農，江蘇長洲（蘇州）人。終身未仕，文名甚高，能詩善文，著作頗豐。著有《堅瓠集》、《讀史隨筆》、《退佳瑣錄》、《續蟹集》、《宋賢群輔錄》、《隋唐演義》等書。

❷ **註**：俞樾（1821 ～ 1907），清末學者，字蔭甫，號曲園居士，浙江德清人。道光三十年（1850 年）進士出身。考進士時，他試卷裡的詩句「花落春仍在，天時尚艷陽」，深得到閱卷官曾國藩的賞識，贊其詠落花而無衰瑟之意。俞曾任翰林院編修，國史館協修，河南學政。因事罷官後，移居蘇州，購地建屋築園名「曲園」，潛心學術 40 餘載。治經學、子學、小學，兼及史學、文學、書法等，著作甚豐。所撰各書，總稱《春在堂全書》。並修訂《三俠五義》爲《七俠五義》。俞晚年講學杭州詁經精舍，其弟子有章太炎、吳昌碩等人。

至此，讀者也許會有以下兩個問題：

A 這個通解是不是步數最少的移法？即有沒有步數少於 n 的移法？

B 有沒有人考慮過每步移 3 個棋子的問題（鑲符問題 2 色移 3）？

問題 **A** 回答是：德蘭諾瓦、楊振寧兩位得出的這個解就是步數最少的移法，沒有步數更少的移法了。不難證明，對於任何正整數 n，問題 $(2, 2, n)$ 沒有步數少於 n 的移法。問題 **B** 回答比較複雜，在第二章裡，我們會有一些詳細的討論。

德國數學家李斯廷（Johann Listing）是 topologie 這個德文單詞的創造者。李斯廷和泰特都是拓樸學早期的熱情推動者。李斯廷是從他的老師高斯那裡開始學習拓樸學的。那時的拓樸學叫 geometria situs，意即位置幾何學。這個詞組是歐拉 1736 年在他那篇有名的解決「柯尼斯堡七橋問題」的文章裡首次使用的。但是李斯廷不喜歡這個詞組，於是他就創造了 topologie 這個詞。這個詞是由 topo 和 logie 這兩個部分組成，都來源於希臘文，前者意思是位置，後者意思是學問。1836 年，他在給他的中學老師繆勒（Johann Müller）的一封信裡首次使用了 topologie 這個詞。11 年以後，1847 年，他的《拓樸學引論》（*Vorstudien zur topologie*, Göttingen）出版。這是數學史上在正式發表的文章或書籍裡第一次出現拓樸學 topologie 這個詞的。

在李斯廷去世以後，1883 年初，泰特在《自然》上發表了一篇紀念李斯廷的文章。在文章裡他用了 topologie 這個字的英文形式 topology。1883 年 11 月，泰特在愛丁堡數學會的一次會議上作了一個介紹拓樸學的講演「Listing's Topologie」。這個講演寫成文章後於 1884 年發表在《哲學與科學》雜誌上。在這篇文章的內容裡，泰特用的是 topology。但是，爲了表示李斯廷的尊重，在文章的標題里，泰特用的仍然是李斯廷的德文原詞 topologie。

泰特的研究領域橫跨物理和數學，他對拓樸學很感興趣，尤其是對拓樸學的兩個分支 —— 紐結理論和圖論很感興趣。前面提到，泰特在「Listing's Topologie」這個演講裡還提到了「四色定理」。和「柯尼斯堡七橋問題」一樣，「四色定理」也屬於圖論。其實，早在 1880 年，泰特就發表了他證明「四色定理」的文章。雖然，後來在 1891 年，有人發現了泰特的這個證明有誤，但是他的這篇文章對圖論發展的貢獻還是很重要的，文中的一些概念方法及結論至今依然常被人們在研究裡引用。泰特對圖論裡的漢米爾頓循環（Hamiltonian cycle）也有過較爲深入的研究。拓樸學的另一個分支 —— 紐結理論，是十九世紀中葉興起的一門「顯學」。泰特和李斯廷，對紐結理論都投入了相當多的力量並作出了很有意義的工作。

泰特的好朋友物理學家馬克士威（James Maxwell），對拓樸學也很感興趣。他們兩人都認爲，通過研究拓樸學可以深入了解物質的微觀結構本質。這也是他們對拓樸學感興趣的主要動因。

在中國科學院主辦的「科學網 / 科網大學」上有文章 [7] 稱，鑲符問題和「辮群」（braid group）有深刻關聯。這篇文章還提到，華羅庚先生也曾對鑲符問題感興趣並和理論物理學家郭漢英等討論過這個問題。楊振寧先生主編過一本書《辮子群，紐結理論及統計力學》（C. N. Yang〔楊振寧〕，M. L. Ge〔葛墨林〕，*Braid Group, Knot Theory and*

Statistical Mechanics, World Scientific, 1991），很可能他也考慮過鑲符問題和一些物理學問題的關聯。

（二）演繹八卦，他山借石

楊振寧在〈許寶騄和移棋問題〉一文裡的第一句是「1940 年前後，在西南聯大物理系和數學系的師生們許多都喜歡玩一個移動 $2n$ 個圍棋子的遊戲」。在上世紀 20 年代和 30 年代，在中文期刊上曾經出現好幾篇研究鑲符問題的文章。我們現在介紹其中的兩篇。

1932 年，趙繚和李儼在《學藝》上發表了一篇文章〈黑白交錯圖〉[8]。文中給出了十幾個例子，但沒有給出通解。文章的序言很有意思，現摘錄幾句如下：

「查研究黑白交錯圖與縱橫圖有同等興味。……淮西雜誌謂世傳河圖洛書作黑白圈者，出自北宋。唐以前未見也。考何晏論語集解引孔安國論注稱河圖即八卦。……餘性嗜數學，近見有以黑白棋子各三子，分別連貫成一列，每次取相連二子，移置一端，或二子之間。三次則成黑白相間。……其數雖無洛書之奇，其形乃適合陰陽之象。不忍棄之，記載成冊，命曰陰陽交錯圖。」

從以上文字可見，作者似有意將鑲符問題和易卦聯繫起來。由此我們得到啟發。若以字母 A 代表卦符陽爻，字母 B 代表卦符陰爻，將坤（ BBB ），乾（ AAA ）二卦自左至右排成一列，並在右端留下八個空格 O ，每一次讓相鄰兩子跳入空格。如此經過六次變易，可將其餘六卦：兌（ BAA ），艮（ ABB ），坎（ BAB ），離（ ABA ），震（ BBA ），巽（ AAB ）一一衍出。棋列變易過程是：同符相聚（初始狀態）→ AB 相間 → 同符相聚（回到初始狀態）。如下是衍化過程細節。

初始態：坤乾$BBBAAAOOOOOOOO$ （同符相聚）
一易後：兌艮$OOBAAABBOOOOOO$
二易後：兌坎$OOBAAOOBABOOOO$
三易後：離坎$OOOOABABABOOOO$ （AB 相間）
四易後：離震$OOOOABAOOBBAOO$
五易後：巽震$OOOOOOAABBBAOO$
六易後：坤乾$OOOOOOOOBBBAAA$ （同符相聚）

由此看來，鑲符問題的起源很可能和易卦有關。

1936 年，姜長英在《交大季刊》上發表了一篇研究鑲符問題（移棋問題）的文章 [9]。在文章裡，他給出了鑲符問題 2 色移 2 的三個通解，其中的第一個通解和德蘭諾瓦的（也即楊振寧的）通解是相同的。他還研究了鑲符問題的 2 色移 3 問題和多色移多問題，並給出了 2 色移 3 問題的通解。我們先來看幾個 2 色移 3 的例子。

例 1 $n=3$（O 代表空格）

初始：$ABABABOOO$
向右跳過 2 枚棋子後：$AOOOABBAB$
向左跳過 1 枚棋子後：$ABBAAOOOB$
向右跳過 2 枚棋子後：$OOOAAABBB$

這個解法可簡記爲：

$$T_2T_{-1}T_2\left((AB)^3O^3\right)=\left(O^3A^3B^3\right)$$

例 2 $n=4$

初始：　　　　$ABABABABOOO$
向右跳 4 後：$AOOOABABBAB$
向左跳 2 後：$AABBABOOOAB$
向右跳 1 後：$AAOOOBBBAAB$
向左跳 3 後：$AAAABBBBOOO$

即：

$$T_{-3}T_1T_{-2}T_4\left((AB)^4O^3\right)=\left(A^4B^4O^3\right)$$

例 3 $n=5$

初始：　　　　$ABABABABABOOO$
向右跳 4 後：$ABAOOOABABBAB$
向左跳 3 後：$ABABBAABAOOOB$
向右跳 4 後：$ABOOOAABAABBB$
向右跳 2 後：$ABBAAAAOOOBBB$
向右跳 4 後：$OOOAAAAABBBBB$

即：

$$T_4T_{-2}T_4T_{-3}T_4\left((AB)^5O^3\right)=\left(O^3A^5B^5\right)$$

例 4 $n=6$

初始：　　　　$ABABABABABABOOO$
向右跳 1 後：$ABABABABOOOBABA$
向右跳 2 後：$ABAOOOABBABBABA$
向左跳 3 後：$ABAABBABBOOOABA$
向右跳 2 後：$ABAAOOOBBBBAABA$
向左跳 4 後：$ABAAAABBBBBOOOA$
向右跳 7 後：$AOOOAABBBBBBAAA$
向左跳 8 後：$AAAAAABBBBBBOOO$

即：

$$T_{-8}T_7T_{-4}T_2T_{-3}T_2T_1\left((AB)^6O^3\right)=\left(A^6B^6O^3\right)$$

例 5 $n=7$

$$T_6T_{-4}T_6T_{-4}T_6T_{-5}T_6\left((AB)^7O^3\right)=\left(O^3A^7B^7\right)$$

例 6 $n=8$

$$T_{-12}T_{11}T_{-6}T_4T_{-6}T_4T_{-5}T_4T_3\left((AB)^8O^3\right)=\left(A^8B^8O^3\right)$$

現在，我們來看看姜長英給出的 2 色移 3 問題的通解：

1 $n=2k+1$，$k\geq 1$。

$$\left(T_{2k}T_{-(2k-2)}\right)^{k-1}T_{2k}T_{-(2k-1)}T_{2k}\left((AB)^{2k+1}O^3\right)=\left(O^3A^{2k+1}B^{2k+1}\right)$$

2 $n=4$。

$$T_{-3}T_1T_{-2}T_4\left((AB)^4O^3\right)=\left(A^4B^4O^3\right)$$

3 $n=2k+4$，$k\geq 1$。

姜長英給出了兩個通解：

$$T_{-(4k+4)}T_{4k+3}\left(T_{-(2k+2)}T_{2k}\right)^kT_{-(2k+1)}T_{2k}T_{2k-1}\left((AB)^{2k+4}O^3\right)=\left(A^{2k+4}B^{2k+4}O^3\right)$$

$$T_{4k+4}T_{-(4k+3)}\left(T_{2k+2}T_{-2k}\right)^kT_{2k+1}T_{-2k}T_{2k+3}\left((AB)^{2k+4}O^3\right)=\left(O^3A^{2k+4}B^{2k+4}\right)$$

我們注意到，1 和 2 的移法都是「n 對棋子需要移動 n 步」；而 3 的移法是「n 對棋子需要移動 $n+1$ 步」，即多移了一步才能達到目標。

問題：1，2，3裡的這些移法是否爲步數最少的移法？

答案是肯定的。但是姜長英的文章沒有給出證明。事實上，不難證明：問題 $(2,3,n)$ 沒有步數少於 n 的移法，對所有的正整數 $n \geq 3$ 。

再來看情況 ❸ 。這時， n 是偶數且 ≥ 6 。姜長英給出的移法是「 n 對棋子需要移動 $n+1$ 步」。如果能夠證明此時沒有步數等於 n 的移法，那麼 ❸ 裡的移法就是步數最少的移法。這個證明卻是很不容易的。這就是姜長英猜想：對所有大於或等於 6 的偶數 n ，問題 $(2,3,n)$ 沒有步數等於 n 的移法。

這個猜想的證明直到好幾十年以後才得到。1990 年，作者借用「地圖四色定理」（four color map theorem）電腦證明的一些思路並結合「離散空間的不動點定理」給出了這個猜想的證明 [10]。

在文章裡，姜長英還考慮了一些多色移多及 2 維空間的鑲符問題。在這裡我們就不做介紹了。順便指出，魔術方塊實際上是一種 3 維空間的鑲符問題。

（三）伯騤兩少，燈下觀弈

楊振寧在〈許寶騤和移棋問題〉文中說到，許寶騤曾研究移棋相間法，並發現合四為一之新律。也就是說，許寶騤曾經研究鑲符問題的 2 色移 2 問題，並得出了通解。我們現在來看看許寶騤研究鑲符問題的一些細節。

1928 年 8 月，俞平伯出版了一本散文集《雜拌兒》，書裡收有他那篇很有名的寫於 1923 年 8 月的散文〈槳聲燈影裡的秦淮河〉。1933 年 2 月，他出版了另一本散文集《雜拌兒之二》，這本書裡有一篇文章〈移棋相間法序〉。這篇文章本來是他爲另一本書《移棋相間法》而寫的序言，可是那本書一直沒有出版，於是他就將這篇序言收在了《雜拌兒之二》裡出版了。這篇文章講述了早年他和許寶騤一起研究移棋問題的故事。文章開頭的幾句是：

「憶乙丑歲燈下侍家大人，談及幼年曾學移棋相間法於曾祖母姚太夫人，時許君閒若亦在座，許固近戚，且故人也，共慫恿試之，良驗。迢迢數十載，家大人亦不能悉憶，移至七八子而止，而予等已苦其繁，各出片紙錄而懷之，視同瑰寶。」

這裡的乙丑歲指的是 1925 年，那時俞平伯是 25 歲，燕京大學的老師；許寶騤是 15 歲，中學生。文中的許君閒若指的就是許寶騤，閒若是許寶騤的字。許到俞家走親戚。俞說「許固近戚，且故人也」。他們是什麼樣的親戚關係呢？俞平伯娶了自己的表姐許寶馴（即俞平伯的舅舅許引之的女兒）爲妻，而許寶騤是許寶馴的弟弟。這樣，許寶騤就是俞平伯的表弟兼內弟。

那天晚上，俞平伯陪他的父親俞陛雲聊天，許寶騤也在座。俞陛雲說起他自己小時候和姚太夫人（俞平伯的曾祖母）學習移棋遊戲的事。兩位少年對此很感興趣，在他們的慫恿下，57 歲的俞陛雲童心未泯，就給他們演示了一番移棋遊戲，一直移到了七對或八對才停了下來。伯、騤兩少視之爲瑰寶，生怕步驟繁瑣不易記住，就各自趕緊用紙筆將移棋的細節記錄了下來。

那時，許寶騤的家在天津，回到了天津以後，伯、騤兩人書信來往了好幾次討論移棋問題，並得到了不少有趣的結果。許寶騤很喜歡動腦筋，大多數結果都是他得到的。俞文稱：「閒尋返津。此後書札往返，互相推衍，而閒喜深思，所得視

予尤多，已至五十子矣」。這裡的閒就是閒若，許寶騄也。

後來許寶騄回到了北京上中學。一年多以後，1927 年初，學校放寒假了。兩人見面的機會又多了起來，於是他們就在一起重拾移棋舊戲。很快，他們就得到了具有公式雛形的移棋方法。當然，功勞主要還是許寶騄的，俞平伯只是打打邊鼓，做做整理和記錄。俞文有一句話：「此閒若之功爲多，予則聊盡贊助整理之事而已」。

時間又過了兩年，俞平伯決定寫一本短書《移棋相間法》將他們的研究結果寫下來，書裡另外還要寫幾句移棋問題的歷史。爲此，他還特地查看了他曾祖父俞曲園的《春在堂全集》以及更早的褚家軒的《堅瓠集》這兩本書裡的有關移棋問題的記載。

書的初稿寫好以後，俞平伯就將其帶給許寶騄看。那是戊辰年的臘月，也即 1929 年的年初，正是寒假時節。許寶騄看過初稿，似乎沒有表現出特別的熱情。俞平伯以爲，幾年過去了，此時的許寶騄，儼然已成長爲一新派科學人物，對舊日棋戲或許早就沒有興趣了。但俞平伯沒想到，過了幾天，許寶騄忽然給他打來了電話。那天是 1929 年 2 月 11 日，也就是己巳年新年的正月初二晚上。而俞平伯正好不在家。第二天，俞平伯就去找許寶騄。許寶騄告訴平伯在他們兩年前得出的公式的基礎上，經過簡化改進，他已經得到了一個非常簡單的合四爲一之新律。

俞平伯文對此有如下描述：「其法簡而整，其言明且清，雖其根柢不出四律，而去其繁冗，正其謬誤，使人一覽豁然貫通，於應用上方便至多。」

俞平伯的書《移棋相間法》，最終也沒有出版，因此我們也就無法看到許寶騄所得出的移棋新律。楊振寧文中說，許寶騄在 1929 年初得出的這個合四爲一之新律和楊振寧自己在 2019 年得出的 modulo 4 的方法應該是一樣的。

假定楊振寧的這個說法是對的，那麼就可以說：從 1889 年到 2019 年這一百三十年裡，在鑲符問題 2 色移 2 問題 $(2,2,n)$ 上，德、許、姜、楊四位先後各自獨立發現了一個同樣的移法通解公式。

現在用前面 2 色移 3 問題 $(2,3,n)$ 用過的 T 符號，將這個移法通解公式寫出來。記 P 爲若干個 T 的連乘積。則鑲符問題 $(2,2,n)$ 有如下移法公式。

$$
\begin{aligned}
&P_n\left((AB)^n\,O^2\right)=\left(O^2B^nA^n\right)\text{，}n\geq 4\\
&P_4=T_5T_{-1}T_{-1}T_5\\
&P_5=T_7T_{-4}T_1T_{-3}T_7\\
&P_6=T_9T_{-4}T_2T_{-3}T_{-1}T_9\\
&P_7=T_{11}T_{-7}T_4T_{-3}T_1T_{-5}T_{11}\\
&P_n=T_{2n-3}T_{-(2n-7)}P_{n-4}T_{-(2n-7)}T_{2n-3}\text{，}n\geq 8
\end{aligned}
$$

順便指出，這只是鑲符問題 $(2,2,n)$ 的移法之一。如前所述，姜長英還給出了另外兩個移法。其實，在鑲符問題 $(2,2,n)$ 上，我們還可以找出好多不同的移法通解公式來。但德、許、姜、楊的這個解法是已知公式裡最簡單的。

（四）幕府鴛鴦，吳越枰戲

鑲符問題在民間一直就有流傳。在褚稼軒的《堅瓠集》第五集裡有一條文字〈移棋相間〉：

「幼時見友人胡礪之，將黑白子各三枚，左右分列。三移，則黑白相間。餘因問曰：多亦可移乎？

礪之曰：自三以至於十外，皆可移。多一子，則多一移。餘歸試之。自三以至於十，果相間不亂。今已三十餘年。偶爾複試，忘其大半。因繹數四，始得就。恐歲久復忘，作歌以紀之曰。……」

《堅瓠集》首次刊印是 1690 年，即康熙 29 年。從文中的一句「今已三十餘年」可知，在他寫下此條移棋筆記的 30 多年前，即在 1660 年以前，他就從他的幼時友人胡礪之那裡學會了這個移棋遊戲。而 1660 年就是順治 17 年。

時間過了大約兩百年，在 1865 年左右，俞平伯的曾祖父俞曲園在讀了褚稼軒《堅瓠集》裡的〈移棋相間法〉後，也對這個問題發生了興趣。在他的《春在堂隨筆》中有這樣一條筆記〈移棋相間〉：

「長洲褚稼軒《堅瓠集》，有移棋相間。以黑白各三子，三移，而黑白相間。自三子至十子皆然，多一子則多一移耳。餘試之良然。而內子季蘭復推廣之，自十一子以至二十子。餘恐其久而忘也，因筆之於此。……」

俞曲園的書裡還記下了從三對到二十對棋子的移法。俞曲園書裡的從三對到十對的移法，和褚稼軒的移法是一樣的；從十一對到二十對的移法，是俞曲園的妻子季蘭得到的。這位季蘭，就是姚太夫人，在前面的〈移棋相間法序〉一文裡，俞平伯提到過她。俞曲園曾爲移棋作詩一首：

閑將棋子試推移，
黑白分明亦一奇。
此後空留遺法在，
更誰燈下運靈棋。

現在總結一下，從 1660 年到 1925 年，移棋問題有如下的歷史傳遞過程：

胡礪之 ⇒ 褚稼軒 ⇒ 俞曲園和姚季蘭 ⇒
俞陛雲 ⇒ 俞平伯和許寶騄。

最後，在 1929 年初，許寶騄得到了一個移法通解公式：合四爲一之新律。但許寶騄的這個解法一直沒有發表。如前所說，楊振寧認爲，許的這個解法和楊振寧後來得出的解法是完全一樣的。

在日本，記載鑲符問題的最早文字是 1743 年出版的書《勘者御伽雙紙》。此書的作者是日本江戶幕府時代的數學家中根彥循。書裡有一文〈鴛鴦遊戲〉，所述遊戲規則和鑲符問題的規則一樣。文中給出了 2 色移 2 問題的 3 對棋子和 4 對棋子的移法。一些早期的西方文字說鑲符問題來自日本，來源就是中根彥循的這本書。

褚稼軒的《堅瓠集》的成書年代是 1660 年，比中根彥循的這本書的成書年代 1743 年早了 100 多年。因此，我們相信，這個日本幕府時代的〈鴛鴦遊戲〉，就是從中國江浙地區傳過去的。[11][12]

《堅瓠集》裡還有一條與數學有關的記載，值得一看。〈定數〉是這條記載的小標題：

「有老翁精數學。一日有一道者來問數。坐其竹床。床遽壞。道者欲償其值。老翁笑曰：成敗有數，何償爲？遂取床足示之。有字一行雲：此床某年月日有仙翁來坐，床不能載，數當壞。因謂道者曰：子必仙人也。道者愕然曰：神仙亦莫逃乎數耶。言訖不見。」

這裡的數，就是命數，即命中的定數。這裡所說

的數學，顧名思義，就是研究命中定數之學問，或者簡單地說，就是命數之學，而不是當今的數學（mathematics）。古籍裡的數學這個詞比今天數學這個詞更廣義一些。古時數學所包含的意思有兩個。第一個意思是命數之學，即《堅瓠集》裡〈定數〉這條筆記所說的數學。這包括任何與算命有關的學問和法術，比如看相、測字、生辰八字術、姓名學、風水、打時，紫微斗數、卜卦、星相學等等。第二個意思，就是與賬目往來，天文曆法，土地測量等問題有關的計算方法和學問。在中國古代，只有數學的這第二個意思，才和當今數學這個詞的意思吻合，這才是我們今天眞正的 mathematics 的意思。

南宋數學家秦九韶寫了一本書《數學大略》（又名《數術大略》，《數學九章》，《數書九章》）。從這本書各個章節的內容來看，這裡的數學就是指的 mathematics，和算命看相的學問無關。但是從書的序言來看，他所說的數學是廣義的數學，是包括河圖洛書八卦易經這些算命看相的學問的。序言裡有一句特別值得一提：（數學）大則可以通神明，順性命；小則可以經世務，類萬物。」他這句話所說的數學包括大小兩個方面，這裡的「大」，就是前面所說的數學的第一個意思，即命數之學；他這裡的「小」，就是數學的第二個意思，即當今的 mathematics。[13]

古人有時爲了避免歧義，爲了強調所討論的問題是數學的「小」的方面（mathematics），他們就會用算術，算學，算數，算法這幾個詞。比如，秦九韶的這本書最後被收進了《古今算學叢書》，這裡的算學就是指的狹義的數學，即 mathematics。

(五) 金辮悠長，玉晶擁依

現在，我們再回到楊振寧的文章《許寶騄和移棋問題》。這篇文章的開始幾句如下：

「1940 年前後，在西南聯大物理系和數學系的師生們許多都喜歡玩一個移動 $2n$ 個圍棋子的遊戲。我也對它花過不少時間，始終未能完全解決。20 多年後在美國我重新研究它，終於解決了所有 n = 3，4，5……的遊戲，可是沒有把答案寫下來，只記得解決的一個關鍵方法是 modulo 4。

最近看到一本關於許寶騄的書，《道德文章垂範人間》其中 316 頁上有一篇俞潤民的文章，說許曾研究移棋相間法，曾發現合四爲一之新律。我猜，此新律恐怕就是後來我發現的 modulo 4 方法。」

這裡的俞潤民是俞平伯的兒子，俞曲園的玄孫。他是楊振寧兒時的朋友。那時，楊振寧的父親楊武之和俞潤民的父親俞平伯都是清華大學的教授。

1940 年前後楊振寧在西南聯大讀物理時，王浩和他是同屋的室友。王浩在西南聯大讀的是數學。楊振寧的父親楊武之教過王浩的高等代數課。和楊振寧一樣，王浩那時也喜歡玩這個移棋遊戲（即鑲符遊戲）。他的學術興趣主要是在數理邏輯和哲學。他後來在哈佛大學獲得博士學位。

鑲符問題是一種彩色密鋪（color tiling）問題。在鑲符遊問題裡，有一種移法步子稱爲合符的（matching colors or matching symbols），就是所移動的符段（相連兩棋或更多的棋）的兩端需要與鑲入空格的相對應的兩個框邊同符（或同色）。如果合符的步子越多，那麼爲達到目標狀態所需移動的步數就越少。合符的概念可以推廣到二維空間的鑲符問題。

1961 年，王浩參照鑲符的合符移法和骨牌拼合法，發明了王氏磚（Wang tile）和王氏密鋪問題。他將王氏密鋪問題和涂林停機問題（Turing halting problem）聯繫起來研究，得到了重要的結果。他當時還猜想，非週期的王氏磚組是不存在的，即只能形成非週期密鋪（aperiodic tiling）的王氏磚組是不存在的。但是後來，他的學生博格（Robert Berger）發現，非週期王氏磚組是存在的。博格最初發現的非週期王氏磚組有 20426 塊磚。幾年以後，他又將此數字降低為 104。這刺激了數學界對非週期密鋪的研究興趣。比如，克努斯（Donald Knuth），羅賓森（Raphael Robinson），潘洛斯，勞奇利（Hans Läuchli）等名家都紛紛趕時髦。特別值得一提的是潘洛斯，他構造出了一種被稱之為潘洛斯密鋪的非週期密鋪。1975 年，數學科普作家加德納（Martin Gardner）寫了一篇介紹潘洛斯密鋪的文章。有十年電腦軟體程式經驗的郵局職員阿曼（Robert Ammann）在讀了這篇文章後，對非週期密鋪發生了極大的興趣並得出了一些很有意思的研究結果。他將自己的新發現寫信告知了加德納。他後來還將研究推廣到 3 維並得到了 3 維空間裡的一種菱形結構的非週期密鋪。

非週期密鋪不僅在數學理論上有意義，在物理上也有應用。1982 年，物理學家謝赫特曼（Dan Shechtman）在研究晶體時，發現了一種類似於晶體的物質具有某種特殊的數學結構。他將這種物質稱為準晶體（quasicrystal）。而準晶體所具有的這種數學結構，恰好就是阿曼以前所發現的那種菱形結構的非週期密鋪。2011 年，謝赫特曼因發現準晶體而獲得諾貝爾化學獎。[14]

王浩的另一項學術成就也值得一提。1958 年他在紐約 IBM 實驗室作學術訪問期間，寫了一個程式。他用這個程式，只花了 9 分鐘，就證明了羅素（Bertrand Russell）和懷德海（Alfred Whitehead）《數學原理》（*Principia Mathematica*）一書中的幾百個數理邏輯的定理。1983 年，他獲得了國際人工智慧聯合會（International Joint Conference on Artificial Intelligence）頒發的第一屆「數學定理機器證明里程碑獎」（Milestone Prize for Automated Theorem-Proving）。最有名的用電腦程式證明數學定理的例子是 1976 年的地圖四色定理的證明。給出這個證明的是伊利諾伊大學厄巴納 / 香檳分校的三位科學家阿佩爾（Kenneth Appel），哈肯（Wolfgang Haken）和科赫（John Koch）[15]。四色定理的計算機證明和王浩的機器證明是兩種完全不同類型的數學定理機器證明方法。

可以說，非週期密鋪是將王浩和潘洛斯關聯起來的一個共同點。而非週期密鋪是由於王浩研究停機問題（即數理邏輯裡的悖論問題）所派生出來的。說到悖論二字，不可避免地我們要想到另外三個字：哥德爾。哥德爾是研究悖論的數理邏輯學大家。而哥德爾對王、潘兩人都有很深的影響。

王浩和哥德爾是在學術上來往多年的好朋友，哲學和數理邏輯是他們的共同興趣。到了晚年，他們的興趣更多的是在哲學上。他們經常見面或通信討論問題。有幾年，王浩幾乎每個星期都要從紐約到普林斯頓去和哥德爾會面討論問題。王浩寫了好幾本數理邏輯和哲學的書，幾乎每本書裡都提到哥德爾。其中有兩本書是專門寫哥德爾的：《反思哥德爾》（*Reflections on Kurt Gödel*）和《邏輯旅程：

從哥德爾到哲學》(*A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*)。

現在，再來看看哥德爾和潘洛斯的關聯。1979 年，美國出了一本書：《哥德爾，艾雪，巴赫：悠遠綿長之金辮子》(*Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*)。這本書上市以後，大受歡迎，暢銷一時。書的作者是文理兼通的侯世達（Douglas Hofstadter），書的封面上有一個很大的被稱爲潘洛斯三角（Penrose triangle）的奇妙幾何圖形。這就是潘洛斯和哥德爾的關聯。而哥、潘兩人的這個關聯，卻是起始於 25 年前的一個偶然的機緣。

1954 年，23 歲的潘洛斯到阿姆斯特丹參加某個會議。會議期間，他碰巧去看了荷蘭畫家艾雪（Maurits Escher）一個畫展。那時艾雪還不出名。艾雪的很多畫初看似是實景，仔細一看又覺得是過於奇特而不像是眞實存在的。潘洛斯看了畫展以後大受啟發。回家後，他從艾雪的實景畫裡悟出其中所蘊含的某種抽像數學結構，並據此設計出了一個簡潔而奇妙的幾何圖形。這個圖形就是後來非常有名的潘洛斯三角。這個畫在平面紙上的圖形，初看每個局部的立體感都很強，栩栩如生，而細看則又覺得作爲一個整體是不可能在眞實的立體空間裡存在的。潘洛斯的父親（Lionel Penrose）看了這個圖形以後，也很感興趣。於是父子倆又合作設計了幾個類似的奇妙圖形，其中一個就是潘洛斯階梯。他們聯名發表了一篇包括這幾個圖形的文章。潘洛斯還將這幾個圖形寄給了艾雪。艾雪收到潘洛斯的這些圖形後，大爲驚歎，覺得比自己原來的畫更有高妙之處。他就畫了幾幅新畫，將潘洛斯圖的奇妙結構放在一些實景裡。艾雪的這些新畫也因這些奇妙結構而名聲大噪。可以說，艾、潘兩位是相互受到了對方的啟迪的。

姜長英在上述〈移棋相間〉一文中說：「及見書籍雜誌，時載〈移棋相間」之論述，始知中外學者，未嘗以小道而忽之。」數學上有不少這樣的例子，數學家最初只是因爲好奇心而做研究得出某個結果，當時並沒有什麼用，直到多年後才發現這個研究結果是非常有用的。比如，柯尼斯堡七橋問題，最早只是一個數學遊戲。在歐拉的研究以後，人們開始認眞地研究這一類問題，漸漸地就形成了一個完整的數學分支：圖論。如今，圖論有很廣泛的用途。現在大學資訊系的學生都需要學不少圖論的知識。而圖論又是拓樸學的一個分支，因此歐拉 1736 年解決柯尼斯堡七橋問題的那篇文章，既可以說是圖論裡的第一篇研究文章，又可以說是拓樸學裡的第一篇研究文章。∞

本文參考資料請見〈數理人文資料網頁〉
https://yaucenter.web.nctu.edu.tw/?lang=tw

延伸閱讀

▶ 楊振寧，〈許寶騄和移棋問題〉
https://admin.global-sci.org/uploads/Issue/MC/v10n4/104_106.pdf
讀者可參照本文閱讀！

▶ https://ctext.org/wiki.pl?if=gb&res=841638
這是褚稼軒《堅瓠集》電子書連結，讀者可參照本文閱讀！

▶ https://taiwanebook.ncl.edu.tw/zh-tw/book/NTUL-9900013354/reader
這是俞平伯《雜拌兒之二》電子書連結，讀者也可參照本文閱讀！