

從鑲符問題談起

● 作者：胡著信

作者簡介

胡著信是 1996 年美國伊利諾大學厄巴納 / 香檳分校 (University of Illinois at Urbana-Champaign) 數學博士，畢業後從事資訊科學和商業諮詢工作。現居住美國南加州。

2020 年的諾貝爾物理學獎頒給了三位對黑洞研究有重大貢獻的科學家潘洛斯 (Roger Penrose)，根策爾 (Reinhard Genzel) 和吉茲 (Andrea Ghez)。三位得主之一的英國科學家潘洛斯原本是數學家，其研究領域橫跨數學和物理。潘洛斯在純數學上也做出過很多傑出的貢獻。其中，潘洛斯密鋪 (Penrose tiling) [1] 就是他在數學上的一項重要的成果。潘洛斯密鋪的產生受到了王氏密鋪 (Wang tiling) [2] 的影響，而王氏密鋪的產生又受到了鑲符問題和骨牌拼合的影響。王氏密鋪的創造者是數理邏輯學家和哲學家王浩。鑲符問題，又稱移棋問題，是我們今天要談的主要話題。

楊振寧先生去年寫了一篇很有意思的文章〈許寶騫和移棋相間法〉發表在《數學文化》上 [3]。楊振寧在這篇文章裡研究了一般鑲符問題的 2 色移 2 問題並給出了他自己得到的通解。鑲符問題起源於中國清代。目前發現的最早記載這個問題的文獻是清順治年間發表的《堅瓠集》[4]，距今已有三百多年，作者為褚稼軒 (褚人獲) ①。在褚稼軒之後，清代樸學大師俞曲園 (俞樾) ② 也研究過鑲符問題 [5]。俞曲園是紅學家俞平伯的曾祖父，數學家許寶騫的曾外祖父。在上世紀 30 年代，上海交通大學教授姜長英等學者也研究過這個問題。

(一) 鑲符四色，拓樸古題

鑲符問題是拓樸學古典問題之一。蘇格蘭數學物理學家泰特 (Peter Tait) 是最早研究這個問題的西方學者。1884 年，他在《哲學與科學》(Philosophical Magazine and Journal of Science) 雜

誌上發表了一篇文章〈李斯廷之拓樸學〉(Listing's Topologie)。泰特在這篇文章裡討論了 25 個拓樸學問題，其中，問題 12 就是鑲符問題。泰特寫道，幾個星期以前，他在火車上看到有人在玩一個移動數枚硬幣的遊戲。泰特給出了這個遊戲 (4 對硬幣) 的一個解。

移動前：OOABABABAB
一移後：BAABABA OOB
二移後：BAABOOAABB
三移後：BOOBAAAABB
四移後：BBBBA AAAOO

這裡，A 代表先令 (shilling)，B 代表鎊幣 (sovereign)，O 代表空格。泰特還討論了一些更複雜的情況。

1889 年，法國數學家德蘭諾瓦 (Henri Delannoy) 在《自然》(La Nature) 上給出了這個問題 (鑲符問題 2 色移 2) 的通解 [6]，即 n 對棋子移 n 步的移法通解公式，對所有正整數 $n \geq 4$ 。他的這個通解和楊振寧給出的通解是完全一樣的。在德蘭諾瓦以後還有不少人也獨立的給出了這個同樣的通解。

① 註：褚人獲 (1635 ~ 1705)，清初學者，字稼軒，又字學稼，號石農，江蘇長洲 (蘇州) 人。終身未仕，文名甚高，能詩善文，著作頗豐。著有《堅瓠集》、《讀史隨筆》、《退佳瑣錄》、《續蟹集》、《宋賢群輔錄》、《隋唐演義》等書。

② 註：俞樾 (1821 ~ 1907)，清末學者，字蔭甫，號曲園居士，浙江德清人。道光三十年 (1850 年) 進士出身。考進士時，他試卷裡的詩句「花落春仍在，天時尚艷陽」，深得到閱卷官曾國藩的賞識，贊其詠落花而無衰瑟之意。俞曾任翰林院編修，國史館協修，河南學政。因事罷官後，移居蘇州，購地建屋築園名「曲園」，潛心學術 40 餘載。治經學、子學、小學，兼及史學、文學、書法等，著作甚豐。所撰各書，總稱《春在堂全書》。並修訂《三俠五義》為《七俠五義》。俞晚年講學杭州詒經精舍，其弟子有章太炎、吳昌碩等人。