

數學是典型的科幻小說

●作者：勒布倫（Claude Le Brun）●譯者：翁秉仁

2019 年卡拉比訪談

作者簡介 勒布倫是美國石溪大學的數學教授

受訪者簡介 卡拉比（Eugenio Calabi）是賓州大學數學系的退休教授。



卡拉比（左）與勒布倫（右）。〈訪談影片截圖〉

2019 年 7 月，石溪大學數學系的勒布倫代表西蒙斯幾何與物理中心，在賓州大學數學系對卡拉比進行採訪。卡拉比無疑因為他在卡拉比／丘流形的先驅研究而知名於世，這是愛因斯坦方程的一類解，在目前的研究中扮演關鍵的角色，包括數學（以卓越的新方式連結微分幾何和代數幾何）和物理學（透過弦的緊緻化來構造模型宇宙）。這次訪談部分是為了慶祝西蒙斯中心和石溪大學的多納森（Simon Donaldson）、陳秀雄和孫崧獲得維布倫獎，他們的研究回答卡拉比首先提出的問題。但是更具體來說，它也協助我們認識卡拉比在這段故事中的個人角色，他既是陳秀雄的論文指導教授，也是陳秀雄學生孫崧的「數學祖父」。

勒布倫（以下簡稱 勒）在我們討論數學之前，請你先談談你的童年以及當年如何來到美國。

卡拉比（以下簡稱 卡）我在義大利的米蘭長大。我的父親是一位律師，他很早就意識到我有數學天分。我記得當我小一或小二練習背誦乘法表時，父親就教我質數的概念，他告訴我：「你的工作就是找出質數的規律。」對我來說，「你找到質數規律了嗎？」是一個標準問題。

我在米蘭上公立中小學，一直上到你們所謂的十年級^①。我大約 15 歲時，和家人一起離開義大利。爲了等候美國簽證，先在法國待了一年。那是 1938 到 1939 年，正是第二次世界大戰即將爆發的前夕。

勒 ▶ 所以你們經歷了墨索里尼的種族法這些恐怖的事情？

卡 ▶ 是的。1938 年時它才剛啟動。我父親在那些年已經逐漸有警覺，大約 1936 年就開始計劃離開義大利，當時義大利和衣索匹亞的戰爭剛結束，又爆發了西班牙內戰，義大利和希特勒是盟友。當種族法公布後，我父親在一夜之間決定必須以保護家人的安全爲先，因此最後我們在 1939 年春來到美國。

勒 ▶ 真是辛苦。你剛到美國時是幾歲？

卡 ▶ 16 歲。我馬上就被麻省理工學院錄取。我求學的時程有點「波動」，我剛到法國時跳了一

級，離開法國時又跳了一年。我在麻省理工主修化工，但畢業時就決定改讀數學。1947 年，我同時申請哈佛和普林斯頓的研究所，也都錄取了。不過因爲普林斯頓提供研究生臨時住宿，所以我就去了普林斯頓。

勒 ▶（笑）重要決定的原因往往很簡單。

卡 ▶ 是啊。

勒 ▶ 但你確實需要有地方住。

卡 ▶ 1947 年，我先在伊利諾大學待了兩學期，那是我真正開始在純數學下功夫的地方。那年夏天我就搬到普林斯頓。

勒 ▶ 你是否立即跟波克納（Salomon Bochner）一起做研究？

卡 ▶ 大約是一年後，1948 年的時候。

勒 ▶ 波克納是當時對微分幾何略有理解的數學家。尤其他研究過黎奇曲率，證明了調和形式（harmonic form）的重要定理。他在那篇論文裡，對於赫吉／狄拉姆（Hodge-de Rham）定理似乎頗爲存疑。他討論了調和形式，卻隻字不提調和形式與拓樸的關係。

① 譯注：高一。

卡 ▶ 那是我後來才學到的。我當時的研究僅限於微分幾何與如何從所有度量構成的流形中選擇度量的問題，另外也檢視度量函數空間上的問題。非線性分析當時才剛剛萌芽。不過吸引我的是幾何觀點的問題，而凱勒流形（Kähler manifold）似乎是很值得探討的領域。

勒 ▶ 我猜波克納也是在發表一維調和形式論文後不久才開始研究凱勒幾何的。他提到時總是說「所謂的凱勒度量」，顯然是因為波克納知道凱勒曾經是納粹，對他很不滿。

卡 ▶ 我並沒有注意到這一點。我見到凱勒是在 1950 年完成博士學位時，當時我們都參加戰後第一次的世界數學家大會。我和他簡短交談。我的論文是關於凱勒度量的嵌入問題。我在論文中發明「diastasis」這個詞，也就是距離函數。

勒 ▶ 1954 年，你在阿姆斯特丹的下一屆世界數學家大會上發表演講。那是你首次宣佈在緊緻凱勒流形上表現凱勒類的研究計劃嗎？

卡 ▶ 是的。我還寫了第一篇關於實數赫塞方陣（Hessian matrix）的所謂複數推廣的論文。我在路易斯安那州立大學的第一份工作時，買了一本布拉施克關於仿射微分幾何的著作，我就被迷住了。

勒 ▶ 那麼，關於實蒙日／安培方程的研究，是在你開始思考複蒙日／安培方程和黎奇平坦凱勒度

量的之前還是之後？

卡 ▶ 同時進行的。這是那個目標的其中一個步驟。不過雖然動機來自另一個問題，我確實對仿射微分幾何本身產生興趣。事實上，我目前的研究興趣，或者至少是假裝的興趣，仍然是仿射幾何。畢竟我這個年紀能做的不多了。

勒 ▶ 這還是很令人驚訝，沒想到你還在做數學。幾年前，我聽你給過一個非常好的演講。你現在到底多大年紀了？

卡 ▶ 96 歲。

勒 ▶ 96 歲還在做數學，這真是太好了。

卡 ▶ 怎麼說，現在只能做我們所謂的模擬研究。

勒 ▶（笑）好吧，做數學實在太有意思，怎麼可能有人想放棄？

卡 ▶ 數學的確是我最喜歡的嗜好。

勒 ▶ 我們很幸運，居然有人願意付錢讓我們追求自己的愛好。

卡 ▶ 能夠以愛好作為職業是我這一生最好的運道。

勒 ▶ 我們聊到 1954 年發生的事情。也是那一年，你在《列夫謝茲紀念文集》（Lefschetz Festschrift

Volume) 發表了你闡述卡拉比猜想的論文。你一開始認為自己應該可以證明它，但到論文最後，你卻對連續法 (continuity method) 的某個面向表示嚴重的懷疑。

卡 ▶ 我記得那是我這輩子第一次聽到先驗估計 (a priori estimate) 這個概念。

勒 ▶ (笑) 你曾經給我寫過信，說你已經把為《列夫謝茲紀念文集》寫的論文寄給威伊。

卡 ▶ 是。在義大利的迪里耶斯提 (Trieste) 會議上，我遇到尼倫伯格 (Louis Nirenberg) 和貝爾斯 (Lipman Bers)。我和他們討論這個問題，結果他們告訴我，如果沒有先驗估計，就無法解偏微分方程。我說「那是什麼東西？」

勒 ▶ (笑) 我想這對年輕數學家是個很好的故事，因為不管多麼多麼有天分，我們都是從一個相對無知的位置開始做研究的。你得跟專家討論，才能找到答案。

卡 ▶ 重點是我們並不是在上課時學習，而是在課後開始思考課程內容時才能學到東西，至少這是我自己的經驗。

勒 ▶ 你關於卡拉比猜想的論文十分精彩。讓人印象非常非常深刻。顯然，你是把論文直接寄給威伊？你一定認為他是 $K3$ 曲面的專家？

卡 ▶ 我問他這樣的內容是否有趣，畢竟當時我對代數幾何所知甚少。威伊回覆得非常快，他說：「你是怎麼證明的？」

勒 ▶ 威伊非常出色，但不以慷慨著稱。他隨時都要證明自己是房間內最聰明的人。

卡 ▶ 哦，是的。我的確被他嚇到了。

勒 ▶ 你是波克納的學生，卻在列夫謝茲紀念會議上給演講。這讓我有點納悶……我聽過很多波克納和列夫謝茲基本上不講話的八卦。有人還告訴我，波克納特別不想和列夫謝茲共處一室。

卡 ▶ 是的。當我們邀請演講者時，列夫謝茲希望讓學生能認識講者，所以他鼓勵學生為講者在研究生院舉辦招待茶會。通常的慣例是列夫謝茲會很早到，很早離開，然後我們再跟波克納打電話。

勒 ▶ 他們都是非常傑出的數學家，這真是個謎。

卡 ▶ 他們互相尊重。我是說至少我聽過波克納引用列夫謝茲的結果。另一方面，我雖然跟列夫謝茲不太熟，不過我想是一樣的。

勒 ▶ 當然，後來很多數學家證明的結果結合了列夫謝茲和波克納的想法。在這裡，為了讀者，我先回顧一下現在稱為卡拉比／丘定理的敘述。假設有一個緊緻的凱勒流形，如果指定任何有正確積

分的體積形式，那麼在給定的凱勒類中便可找到具有該體積形式的唯一（凱勒）度量。然後，特別來說，如果凱勒流形的第一陳類爲零，我們就能證明在每一凱勒類中都存在唯一的黎奇平坦凱勒度量。你在列夫謝茲文集的論文內證明若此度量存在必然唯一，這是一個很漂亮的幾何證明，這個論證基本上只是最大值原理（maximum principle）的應用。

卡 ▶ 當然，這就是波克納原理。

勒 ▶ 我絕對認爲你的論文依然值得細讀，因爲唯一性在文章裡被解釋得很透徹。當然，在存在性方面，你也掌握了關鍵之一的連續法。但在實際證明擾動方程有解的參數集是閉集的方向上，你還需要其他想法，這只能等到 1970 年代由丘成桐來證明。

卡 ▶ 對的。這裡還有另一個戲劇性的插曲，當丘成桐第一次宣告時，他是認爲他找到反例，但那是錯的。他意識到這一點，不久之後他就宣稱找到證明，大概不到一年的時間。當時大家都非常興奮，我們必須聽到細節，所以我們盡快安排一次會面，那年聖誕節在尼倫伯格紐約的辦公室，我們在他的辦公室見面，我和尼倫伯格聽到了第一個證明。其實我並不很懂。

勒 ▶ 首先有一個 C^0 估計，是通過迭代 L^p 空間完成的。但也有一個關鍵的 C^3 估計，是基於你早期在仿射幾何的研究。他在同一個演講中討論過這

個問題嗎？

卡 ▶ 是的，他引用了。

勒 ▶ 你告訴過我，那是你用先驗估計證明的第一篇論文。

卡 ▶ 對。那是我對分析第一次理解的成果。

勒 ▶ 關於你在極端凱勒度量（extremal Kähler metric）方面的研究，實際上有段奇特的歷史轉折，甚至在這個領域做研究的人也不見得知道。現在有很多關於純量曲率非零凱勒／愛因斯坦度量的論文，他們經常在標題中說這是卡拉比（另一）猜想的證明，但你其實從沒有明確這樣說，雖然這的確是你關於常數純量曲率斷言的推論。

卡 ▶ 是的。我後來才意識到，在某些流形中是不存在常數純量曲率的。

勒 ▶ 你什麼時候才第一次意識到的？

卡 ▶ 當二木昭人（Akito Futaki）發表他的論文時。

勒 ▶ 我明白了。所以你很關注全形向量場，在你第一篇關於常數純量曲率凱勒度量的論文中就已經出現。打一開始，你就假設所處理的流形不支持全形向量場，但你沒有說明爲什麼這一點很重要。

卡 ▶ 是，我本來感興趣的是做為變分問題的面相。然後第一個極端度量的例子其黎奇曲率不是常數，我甚至寫了一篇短文宣布這一點。

勒 ▶ 那是一篇相當長的論文，出現在丘成桐召開的微分幾何討論班的會議結集中，這也是一篇漂亮論文。文中你討論一般的變分問題，說明何謂拉格朗日方程，然後產生解消（blow-up，或譯炸開）後的解。例如， CP^2 在一點解消的狀況能在每一凱勒類內找到解，這些解都具有非常數純量曲率。你是在什麼時候找到這些解的？是在寫那篇論文的過程中才發現的嗎？

卡 ▶ 沒錯，那是 1980 年代初期。

勒 ▶ 現在這些解通常稱為極端凱勒度量，儘管有很長一段時間沒人能證明它們是變分問題的最小解。你曾在常數純量曲率的情況漂亮的證明，如果有解一定是泛函的最小解。我想是你的學生陳秀雄，首先證明在一般情況下總是最小解的。

卡 ▶ 是。

勒 ▶ 回顧一下。從 50 年代到 80 年代，你在做為黎曼幾何分支的凱勒幾何裡，的確取得莫大的進展。但若回到 1950 年代，那時的人就算是凱勒度量能有多少理解？

卡 ▶ 我是上波克納的課學到。1948 年我讀研究生

的第二年，我們要求他講授一門微分幾何課。波克納就是在課堂上定義的。

勒 ▶ 特別是，後來發現凱勒幾何是黎曼幾何具備特殊完整群（special holonomy）的一個例子。這個事實似乎被許多人忽視了，尤其是代數幾何學端的數學家。

卡 ▶ 是的，這確實是很了不起的發現，但從凱勒第一次宣告開始，卻需要很多年才重新獲得關注。

勒 ▶ 我的同事陳秀雄和多納森很善意的提供我一些應該問的問題。多納森提出一個有趣的問題：在你早期的論文裡，曾經對非凱勒複流形感興趣，尤其是你和埃克曼（Beno Eckmann）合作的成果。你們在球乘積上發現一組美麗的複結構，由於他們的二維上同調群為零，當然這些流形不容許凱勒度量。你有在關注非凱勒複幾何的發展嗎？

卡 ▶ 沒有，我感興趣的只有那些出現在我腦中的問題，像是否能有更多不平常的例子。例如這個問題，在米爾諾（John Milnor）的驚奇發現之後，我們是否也能在怪球上問類似的問題？

勒 ▶ 六維球上複結構的存在問題就是那種徘徊不去，一直困擾我們的問題。很不幸的，它是那種基本上遠超出我們技術能解決的問題之一，而且可能一直如此。

卡 ▶ 是的，我也曾經被它困擾過。但是複結構的阻礙（obstruction）基本上還是未知的。除非先存在殆複雜（almost complex）結構，這時有對可積性的阻礙。

勒 ▶ 多納森還提出另一個很有意思的一般性問題：「你什麼時候意識到分析開始在微分幾何中會產生重大影響？」

卡 ▶ 從我和威伊的通信中。

勒 ▶ 在那時候你意識到這是本質性的問題？

卡 ▶ 應該說眼前這個問題基本上是分析的。我認為數學家比較後來所研究的問題，非常多都是他很早以前就已經在想的問題。

勒 ▶ 這麼說也許是後見之明，但有時你知道你的想法在年輕時會出現但是又十分混淆。

卡 ▶ 這麼說，我知道我學東西時總是困惑的。學習是一個困惑的過程，真正的學習只有在相當程度消化資訊後才會產生。學習就是以一種創造性的方式消化的過程。

勒 ▶ 以你自己為例，我們之前提到那篇 1980 年代發表的極端凱勒度量論文。在某種程度上，你寫的是你多年前就開始思考的問題，但其實你是被迫坐下來寫出所有細節，這時你又發現新的東西。

卡 ▶ 正是如此，這就是消化。

勒 ▶ 在你的職涯中，你看到數學交流方法的劇烈變化。回顧過去，數學家的人數，尤其是和自己領域相關的數學家，其實相對是比較少的，你可能認識幾乎所有人。

卡 ▶ 過去是這樣。

勒 ▶ 我的意思是當時的數學通常是透過通信和電話傳播的。特別是任何尋求合作或依賴於合作的事情，都必須以這樣的方式進行。但是，你也只能和你已經認識的人交換想法。

卡 ▶ 這就是為什麼我們要參加會議的原因。會議很有用，我想現在還是這樣。

勒 ▶ 你早期的一些研究是針對複流形，而你問的問題對代數幾何學家來說是很陌生的。你是否在哪個會議上遇過對這些問題感興趣的人？

卡 ▶ 非常少。我知道的唯一一個人就是波克納，還有他的其他學生。

勒 ▶ 談到你與埃克曼的合作，那你是怎麼認識埃克曼的？

卡 ▶ 霍普夫（Heinz Hopf）來普林斯頓訪問，我告訴他我找到的構造方式。波克納因為我這樣做還罵了我一頓。但霍普夫告訴我埃克曼也剛

剛做了同樣的結果。於是，他幫我們建立聯繫。我不久之後見到埃克曼。我們決定以通信方式合寫文章。

勒 ▶ 回顧過去，你是否有一段時間真的認為自己正在做的事情特別有趣和令人興奮？

卡 ▶ 沒有，我只是在尋找自己的道路。

勒 ▶ 我只是想知道，你現在的職涯已經走到一個點，你的名字非常有名。一般人可能根本沒有意識到卡拉比其實是一個人。卡拉比／丘變成一種現象。你之前告訴過我，在紐約有個叫卡拉比／丘的舞蹈表演。因此，這個名詞已經走入流行文化。你有沒有遇到，有人想過來問你物理或類似弦論的東西？

卡 ▶ 沒有，我當然聽過這些，但是沒有。向外行人解釋數學時，我最喜歡的的說法是「這是典型的科幻小說」。我從來不很理解這些在物理學的含義。就只是運氣，出乎我意料之外。

勒 ▶ 但另一方面，當只是做數學裡自然的事情時，心裡就能獲得回報，對吧？

卡 ▶ 是的。我很幸運。

勒 ▶ 你能接受我們的採訪真是太好了，我很高興做了這段訪談。

卡 ▶ 我之前說過，就我來說，這是一趟探尋自我的旅程。

勒 ▶ 這絕對很值得。我想很多人對這段採訪會很感興趣，我很高興我們完成了，真是感謝。∞

本文出處

本文譯自“Quintessentially Science Fiction. An Interview with Eugenio Calabi, Hosted by Claude LeBrun, on Behalf of the Simons Center.” 文稿。本刊感謝訪談者勒布倫教授與石溪大學西蒙斯數學與物理中心（Simons Center for Geometry and Physics）授權翻譯刊登。

譯者簡介

翁秉仁為臺灣大學數學系副教授。

延伸閱讀

▶ <http://scgp.stonybrook.edu/video/video.php?id=4302>
以上是本訪談的影片網站。