

費爾茲獎得主曼弗德訪談

從三橋小鎮走到全世界

訪談者：拉馬南（Kavita Ramanan）、拉歐（Sudhir Rao）譯者：翁秉仁

訪談者簡介

拉馬南是布朗大學應用數學系的講座教授與副系主任，也是 Bhāvanā 的通訊編輯。

拉歐現居於邦加羅爾，教授和研究數學和物理的某些領域，他是 Bhāvanā 的創始成員與特約編輯。

受訪者簡介

曼弗德（David Mumford）是世界知名數學家，以代數幾何的研究獲頒 1974 年費爾茲獎。1961 年在查里斯基（Oscar Zariski）指導下取得哈佛博士學位，並加入哈佛教席，1995 年轉往布朗大學研究電腦視覺和神經科學。他的研究涵蓋廣泛的數學領域，從最初符合布巴基（Bourbaki）嚴格的形式傳統，到後來探索高度直觀和電腦輔助的探討模式和形式，後者體現在合著的前衛著作《因陀羅的珍珠》（*Indra's Pearls*）。在本篇訪談，他重溫年輕時光，與印度的緊密聯繫，以及這些年來他所關注的想法。

問 請先談談你的出生地和父母。

答 我出生於英格蘭蘇塞克斯（Sussex）一個叫「三橋」（Three Bridges）的小鎮。我母親婚前的名字叫葛麗絲·席奧特（Grace Schiott），她有一半的挪威血統，另一半是美國人。我父親叫威廉·布萊恩特·曼弗德（William Bryant Mumford），他是純英國人。



小男孩曼弗德。（David Mumford）

問 你父母對科學感興趣嗎？請談談他們的出身。

答 他們對科學都沒什麼興趣。我的外祖父是挪威人，很喜歡航海和天文，他家家

面有一台望遠鏡，我覺得很好玩，引發我日後對天文學的興趣。我祖母是劍橋大學最早學數學的女性之一，她雅好數學，後來繼續學習心理學。

問 在你自己或家族的圈子裡，有沒有人對你日後最終的學者生涯有早期且正面的主要影響？

答 在某些方面，我認為讓我印象最深刻的是我們家的藝術家朋友像是吉涅西（Edna Ginesi）和科克松（Raymond Coxon），他們經常來訪，甚至在我家門廊上作畫。我記得我問過科克松：「誰付你錢？你是做什麼的？」他說：「我只為自己工作，我畫畫，賣我的畫。」我心裡想「老天，人為什麼要為別人工作？如果選擇自己想做的事，豈不更好，也許還有人為此付錢給你。」所以我從小就有一個深刻的印象：我可以做真正喜歡的事情來維生。

作者感謝印度皮拉尼博拉理工學院（BITS Pilani）果雅校區貢德哈里（Shilpa Gondhali）和來自加州聖荷西林溪高中 16 歲的巴拉達吉（Aditya Bharadwaj），謝謝他們協助謄寫訪談初稿。作者也感謝康乃狄克州恩可瓦學校現任校長勞厄（Sharon Lauer）幫我們挖出曼弗德在 40 年代就讀時的學校檔案。

遷往美國

問 二次世界大戰在你快兩歲時爆發，在你準備入學時宣告結束，但戰爭把世界改頭換面，而且轉變的方式不一。你在英國出生，具有歐美血統，為什麼你的家庭要從歐洲遷往美國？

答 我父親一直在英國殖民服務局（British Colonial Service）和倫敦大學工作，這所大學設有殖民教育系。當戰爭開始時，我父親甚至有艘小船。他曾經參加敦克爾克撤離英國士兵的行動，駕駛小船穿越海峽，顯然他想在戰爭期間做點事情來協助英國。基於他在美國的人脈，他甚至曾在耶魯大學教過書，在加拿大和美國都有朋友。眾所周知，珍珠港事件發生之前，美國人一直抗拒捲入歐洲戰爭。我父親加入一個基本上從事宣傳的組織，努力向美國人說明歐洲發生的事情，以及英國人如何為了保衛國家而殊死奮鬥。最終他來到美國管理這個組織，當時它被稱為聯合國訊息組織（United Nations Information Organization），與日後的聯合國有顯然的連結。所以當時我父親在紐約工作，我們則住在康乃狄克州。

問 你在哪裡受教育？你的求學歲月是否有什麼「特別事件」，讓你明確考慮在學術界全職工作的可能性？

答 我在康乃狄克州讀一所當地的私立學校，名字叫做恩可瓦（Unquowa），這是美洲原住民部落的名稱。我記得當時對科學很著迷，尤其是先前

提過的天文學，另外還有電子學。我清楚記得在屋簷綁了一條電線，從房子的一側繞到另一側。還有當時我將一根小電線連到一組水晶上，全部就只有一個水晶和一根戳在上頭的小電線。電路中可能有線圈，也有耳機，把這些全部組裝起來，就出現了聲波包，聽！出現了一個聲音訊號！這有點瘋狂，因為全部組件就只有一根小電線和一組基本電路，然後幾乎無中生有的就出現這個小聲音，一個微弱的電子音訊，當下讓我毛骨悚然。

我澈底變成美國人，著實失去我 3 歲到美國還保有的英國口音，而且消失得很快。我記得那段日子一件有趣的事，惹得我父親十分生氣。1948 年舉行了戰後第一次奧運，有天我父親從辦公室回家時，我跟他說：「棒不棒？美國已經贏了這些這些、那些那些獎牌！」他的眼神凜如暴風，看著我說：「英國人還沒拿到獎牌。」在那一刻，我意識到自己已經是不折不扣的美國人。事實上在高中的後期，我多少清楚美國正蓬勃發展，許多歐洲學者來到美國，美國顯然是未來的王道。

恩可瓦之後，我到新罕布什爾的一所私立學校菲利普斯埃克塞特學院（Phillips Exeter Academy）就讀，那真是一個好地方。在所有私立學校裡，埃克塞特最棒的是十分優秀的科學課程，我非常喜歡。在布林克霍夫（Brinkerhoff）先生的指導下，我為一部三吋反射望遠鏡打磨自己的鏡頭。我對電子學也很著迷，我在家裡製作許多我們所謂的「奇想工具」（heathkits），那是一大堆電阻器、電容器等等東西組合的套件，我有自己的焊槍，可以把它們全部焊接起來。我首先做了一

個門鈴，然後我在金屬表面纏繞一組線圈製作一個小馬達等等，這一切都讓我很激動。

問 你還記得大概 13 到 18 歲那些年，除了你家人以外，是否有任何老師或導師很正面的影響你？

答 在埃克塞特當然有很優秀的老師，不過當時數學不是我興趣的焦點，那時絕對是科學，當然也包括電子學。

「西屋科學獎」競賽得獎的奇妙體驗

問 你是否參加過任何主要的州級或國家級科學競賽，如果有，你所展示的是什麼？

答 確實有，我曾經參加當時還稱為「西屋科學獎」的科學競賽^①，那是高中生可以參加的全國性比賽。

問 我在一本名為《無線電子》（*Radio Electronics*）的雜誌上讀到有關電腦的文章，那時我認識的一個人告訴我可以利用繼電器建造一台小型電腦。我在埃克塞特發現他們有一整批二戰時期繼電器的剩餘庫存，我就問說：「我可以使用嗎？」他們還給我一塊 4 × 8 大小的膠合板。我把繼電器鎖到板上，把線路接起來，很快我就擁有自己的小家用電腦。我另外有一些商店結帳用的紙帶，還自製了一個小紙帶閱讀器，可以輸入指令。那台機器後來毀了，因為紙帶閱讀器卡住產生火花，木頭著火，最後把機器燒壞

了。但無論如何，這台電腦確實運作了一段時間，它最偉大的成就是可以將任意兩個四位數相乘，這應該也是它的極限，我甚至為此寫了一個相當複雜的程式。



曼弗德的求學歲月。（David Mumford）

答 我因此取得最後 40 名的決賽資格，到華盛頓比賽，還遇到天文學家夏普利（Harlow Shapley），他是競賽委員會的召集人。我對這一切感到無比興奮。不過最後關頭，我有點緊張，竟然忘記氧的原子序，這項失誤使我失去獲得首獎的資格。

我想我還是贏得 100 美元之類的，對當時的我這已經是天文數字。西屋科學獎競賽後，我真

^① 註：Westinghouse Science Talent Search（西屋科學獎）在 1998 年改成 Intel Science Talent Search（英特爾科學獎），2016 年又改名為 Regeneron Science Talent Search（再生元科學獎）。

的很幸運，西屋原子能部門有位名叫希夫（Ray Schiff）的人想邀請獲獎者到匹茲堡做暑期工作，他們在那裡設計潛艇的核反應爐。我 1953 年夏天在那裡工作，1954 年又去了一次。那是一次使用類比電腦的奇妙體驗，主要的問題是預測各種形狀反應爐的中子通量。我們有一台類比電腦，用來建模以二維網格模擬反應爐的配置，這次經歷對我影響深遠，我在那裡認識一些非常要好的朋友，也學了很多偏微分方程的知識。這段寶貴的經驗與我的高中和大學早期重疊。

選擇主修數學

問 你進入哈佛讀大學部，鑒於你當時的成績紀錄已經頗有潛力，這不足為奇。你有沒有想過到別的學校就讀？

答 我去哈佛的主因是因為芬利（John Finley）這個人²，他是哈佛的文學教授，到處鼓吹最好的學生申請哈佛（儘管在哈佛和雷德克利夫〔Radcliffe〕女子學院合併之前，這指的都是男生）。在一次這樣的活動中，芬利談起古希臘，我被他在演講裡所體現的神奇和文化氛圍所催眠，然後我想「天哪，哈佛的教授都是這樣的嗎？我得到那裡去。」我還真去了。

問 請談談 50 年代中期的哈佛大學部以及大學整體的氛圍，包括它神聖的樓館和知名的宿舍，是否一如傳聞所言，空氣中充滿了想法，還有你在那時沒有結交到終生的好友？

答 我比同學小了好幾歲，這造成一些麻煩，畢竟我也想試試喝啤酒諸如此類的。麻州劍橋的警察很酷，在酒鋪裡，他們甚至幫忙抬高身材矮小的學生，讓他們看得到櫃檯後面，可以選擇想喝的酒。總之，在哈佛我突然感受到無以倫比的自由，那種感覺才是最奇妙的。聆聽精彩的課程也很令人激賞。起初我以為自己會主修物理，因為我真的很想學量子力學。那時我已經學過一些狹義相對論，覺得頗有道理。然後我開始讀馮諾曼的量子力學著作，內容簡單、直接又精彩。但是後來我去聽量子場論，卻完全抓不著頭腦。我覺得物理學家的思想方式與我看待事物的理路完全不同。與此同時，我一直在上數學課，感覺教授非常棒。

問 誰是當時校園裡的主導思想家？尤其那時哈佛數學系的明星是誰？

答 我記得阿爾弗斯（Lars Ahlfors）教複分析，內容是如此美麗，令人振奮。但比起其他人，是麥基（George Mackey）引領我學習，當時他是柯克蘭宿舍所謂的導師，當時大學生的宿舍大概有八棟，是我們吃飯和睡覺的地方。他帶我學習，閱讀他前幾年的講義，向他問問題。麥基帶我認識布巴基的數學願景。應該這麼說，我本來對數理邏輯十分入迷，讀了好幾本關於述詞演算、集合論等等的書，所以我掌握了一些基礎知識，但

² 譯註：約翰芬利其實是曼弗德的菲利普斯埃克塞特學院校友。

是布巴基風格那種從無到有發展數學的想法真是奇特。你先有集合，在兩個這樣的集合之間擺一個映射，合成律是從集合和集合的乘積映到集合本身，然後引入公設，看看所有布巴基風格的數學主題層級的整體抽象推展將會如何演變，這真是太令人興奮了，這些我真的都是從麥基那裡學來的。還有葛里遜（Andy Gleason），他經常在圍棋裡扁我，讓我九子還是打得我落花流水。很遺憾，我不是很擅長西洋棋或圍棋。

諄諄善誘的良師

問 俄裔美國數學家查里斯基是在義大利受教育的，他是如何成為你的論文指導教授？什麼樣的考慮讓你選他當老師？

答 我在柯克蘭宿舍有個朋友叫法布（Peter Falb），他原來是學代數幾何的，後來轉向控制論。有天他對我說：「來吧，我們去聽聽查里斯基要講什麼。」我說：「可是我應該一個字也聽不懂，因為我還沒有讀完代數幾何的先備課程。」他只說：「哦，我們就走吧。」所以我就去了，結果我被查里斯基的人格折服。他對數學的熱愛，甚至他描述物事的聲音，他真的聽起來好像擁有秘密花園的鑰匙。一旦你進入，就能見到園中所有東西在這個美麗的地方綻放。他讓你覺得自己是進入仙境的愛麗絲，居息在這個優美的宇宙中。

從查里斯基上課的方式，我很清楚這個觀念的世界不僅真實，而且是超級真實。這段經驗讓我十分著迷，當然後來我上了更多查里斯基的課，



查里斯基。（Archives of MFO, Oberwolfach, George Bergman 攝）

最後與他變得非常親近。我也可以談談那段時間的熱門課題。在某個時間點，葛里遜打算開設一門談上同調（cohomology）的課程，我那時想說「這是什麼鬼？」我甚至無法往後退遠一點理解這個概念大致上的要旨，上同調似乎是最怪異也最無意義的東西。直到格羅騰迪克（Alexander Grothendieck）和塞爾（Jean-Pierre Serre）到哈佛訪問之後，我才明白其中的妙處。塞爾比格羅騰迪克到得早一點。我閱讀塞爾著作的《代數連貫層》（Faisceaux Algébriques Cohérents），知道上同調的架構足以整合古典義大利幾何學派的數百種想法之後，這時我才意識到這種新工具的威力。當然格羅騰迪克更早意識到這一點，並且理解得更深刻。

問 仔細檢視查里斯基的數學家譜，可以發現卡斯特努沃（Guido Castelnuovo）、恩里克斯（Federigo Enriques）和塞維里（Francesco Severi）的影響，查里斯基在羅馬攻讀博士學位時，這些傳奇義大利數學家在這期間都教導過他。查里斯基有沒有和你談過他在義大利的學生時期？他對義大利學派的研究理路有什麼自己的看法？義大利學派一向以直覺著稱，但也因此常被認為不像非義大利數學家偏好的方法那麼嚴謹。

答 查里斯基與恩里克斯和塞維里相對比較疏遠，卡斯特努沃才是確實教他代數幾何的人。卡斯特努沃是一位講究嚴格的數學家，與相信靈感直覺的恩里克斯和塞維里相反，他們時不時就想甩脫嚴格性的束縛。有趣的是在這個時間點，查里斯

基將廣中平祐（Heisuke Hironaka）從日本帶到哈佛。雖然廣中在日本已經有學位，但他在哈佛再攻讀另一個學位。亞丁（Michael Artin）則比我早一年，和廣中、我一起跟查里斯基學習，有一次查里斯基說：「恩里克斯寫了一本書叫《代數曲面》（*Le Superficie Algebriche*），我們一起來讀一讀，看看他在說什麼。」所以我們就一起讀了。後來，我繼續寫了很多篇論文，只是檢查恩里克斯所談的一切在特徵數 p 時是否仍為真，就這樣我們認識了一些義大利學派的方法。但是也有其他問題義大利方法就是無法奏效的，像是曲面完全代數系統（complete algebraic systems）特徵線性系列（characteristic linear series）的完全性，這個問題幾乎被恩里克斯解決，他的研究在某種意義上是由格羅騰迪克完成的，我很高興告訴格羅騰迪克，他並不知道他的研究有這些關聯！

問 在實際意義上，查里斯基可能甚至象徵著那個年代越來越多數學家對義大利學派的不滿。正如朗（Serge Lang）詩意般的指出，查里斯基正是切斷現代代數幾何與其古典版本聯繫臍帶的人。很明顯查里斯基感覺到這一點，他本人在數學上做了什麼，在追求數學真理的方法上修正其不足？

答 有很長一段時間，大家常說理解義大利代數幾何的只有威伊（André Weil）和查里斯基兩人，這話可能是對的。當然，查里斯基有學生，但威伊沒有，因為他真的比較難共事，這是肯定的。查里斯基撰寫了他對義大利數學的概述，基本上就在撰寫的過程中，讓查里斯基意識到確實必須

再從頭開始。其中諾特（Emmy Noether）對他啟發甚大，隨著交換代數作為一門獨立而重要的領域的整個發現，查里斯基認識到交換代數的當代研究正是將代數幾何轉化成嚴格領域所需的基礎。他寫了兩冊《交換代數》（Commutative Algebra）介紹這個領域，事實上這就是查里斯基哈佛 Math 250 課程的基礎，這是一門眾所周知的困難課程。我自己上過這門課，他的習題集非常有挑戰性，絕對很具挑戰性。

心目中的數學英雄

問 你在哈佛的期間大致是從 50 年代中期到 1961 年獲得博士學位為止，那是數學界很特殊的年代。事實上，它與布巴基學派的突現和最終崛起的時間完全吻合。你第一次遭遇布巴基風格的數學大概是什麼時候？

答 在那些年，基於各種不同函數空間與能讓你控制古典偏微分方程的先驗不等式的發現，分析的世界正在澈底轉型。同時交換代數和上同調代數正全面顛覆數論和代數幾何。所以那的確是充滿無窮熱情的時代，感覺好像所有的大問題紛紛降臨。湯普生（John Thompson）和斐特（Walter Feit）正繼續證明除了循環群之外的所有有限單群都是偶數階。那確實是一段純數學思維爆炸式增長的時間。我其實從來都不喜歡布巴基叢書本身，我總覺得讀美國版本更容易，像是哈莫斯（Paul Halmos）版本的測度論，還有麥基的講義。布巴基的東西太乾了。

問 你在某些地方說過，你發現格羅騰迪克的工作不僅充滿啟發，而且近乎超現實。你與格羅騰迪克第一次的個人互動是在什麼時候，怎麼發生的？此外，為什麼格羅騰迪克的研究讓你不得不承認，他甚至是你真正的數學英雄？

答 格羅騰迪克造訪過哈佛兩次，這基本上是查里斯基的主意，他舉辦暑期班，計畫研讀塞爾的論文，然後查里斯基看出上同調將會是日後的主流。但隨後格羅騰迪克將它推廣得更深遠，他透過形式代數幾何，用上同調理論重新為雙有理映射的查里斯基連通性定理給出一個完全不同的證明，儘管如此，這項證明仍然是基於查里斯基所引介的完備局部環（complete local ring），但是格羅騰迪克顯然在這個方向上走得更遠，所以查里斯基覺得他必須把格羅騰迪克請到哈佛，讓他的學生接觸這項新研究。

於是格羅騰迪克來了，那真是驚人的體驗，他就像旋風一樣，每週七天、每天 24 小時都在呼吸和思考數學。你若問他：「你能解釋一下你的這般這般的想法嗎？」，那他就會說：「當然可以，看看我們什麼時候有空？」我們會查覽一個禮拜裡的每一天，但總會和某個討論班的時間衝突，所以格羅騰迪克說：「星期天 11 點可以嗎？」問題是，週日 11 點是所有基督徒去教堂的時間，新英格蘭那時仍是世上相當敬事上帝的地區，我覺得格羅騰迪克建議在這樣的時間討論數學實在很有趣。順便說一下這個想法後來沒有完成，但是我們仍然想方設法跟他榨取更多的演講討論時間。你會在下午茶時間或派對上問他

問題，然後，老天！所有的數學就從他嘴裡滔滔不絕的吼出來，你根本沒法跟得上。聽格羅騰迪克講課時，大概要花一周左右的時間適應他的筆跡，因為他寫的非常非常流暢。他的板書很快，我有次甚至把它跟日本人說的某種書法風格做比較，他們說那就像風吹過麥田，下面的麥浪如漣漪擺盪的樣子。這種風格稱為「草書」，日本人甚至為它起了一個名字 Sousho。

格羅騰迪克當真很了不起。我當時是個非常害羞的人，因此我不敢說自己和格羅騰迪克有多少私人互動，畢竟他這個人至少讓人望而生畏。倒是亞丁和他真的很親近，並且決定要著手研究當時稱為格羅騰迪克上同調，如今普遍稱為「平展上同調」（*étale cohomology*）的理論。而且我認為直到今天，大家都還沒有完全認識到這個領域是亞丁和格羅騰迪克的聯手作品，雖然最原初的想法無疑屬於格羅騰迪克，但是亞丁做了一些非常有意義的改變，例如以局部非分歧映射（*unramified map*）取代大域非分歧映射的想法就十分關鍵，這完全是出自亞丁的主意。

問 布巴基的長期成員丟東涅（Jean Dieudonné）曾評述說，抽象的真正目的不僅是為推廣，實際上是要尋求更簡潔和更澈底的清晰性。從你自己的經驗，請提供我們一個簡單又有說服力的具體範例來說明這一點。

答 問題是我並不真正同意這句話。就我而言，具體範例對於理解任何事情都是絕對必要的。我絕對無法只聽了抽象定義就能理解理論所欲的要

旨。例如我以前的學生尼曼（Amnon Neeman）試著解釋他最近參與的範疇論研究給我聽，他說了一堆定義，但我需要的是能激發動機的示例。如果不知道如何將 3 維球映到 2 維球並具有 1 維球纖維（*fiber*），怎麼可能理解球具有高維同倫群？我們需要具體的例子，如果沒有，一切就只剩下無意義的文字。

畫出上帝空間的地圖

問 你的博士論文處理的是什麼問題？它的架構如何影響你之後幾年的思考？你的博士後研究（直到獲得費爾茲獎為止）是否源自你的論文，還是你也考慮全新的問題，如果是的話，你如何著手解決這些問題？

答 我從小就一直很喜歡製作地圖，將地球視為一張大地圖。我一直覺得地圖是非常美妙的物事。我們生活在幅員極為廣闊的世界，突然間你有一種抽象的方式來鳥瞰所有東西的幾何形態，就這樣一眨眼世界改變了，只因為有了地圖的概念。所以模空間（*moduli*）的想法總是吸引我，因為它基本上就是地圖，它是同虧格曲線的集合，還有什麼更自然的事情可以研究呢？在這條道路上我真正開始做的第一件事是，閱讀小平邦彥（Kunihiko Kodaira）和史賓塞（Donald Spencer）關於複流形的形式形變（*formal deformation*）的論文。然後美妙的當然還有格羅騰迪克藉由冪零概形（*nilpotent scheme*）的引入將這個課題純粹代數化。大家怎麼竟然從沒由

幕零的角度去思考這件事情，甚至去做計算，畢竟想理解無窮小，這個方法多明顯！無論如何，小平和斯賓塞有個直紋面（ruled surface）的例子。這真的很有趣，你有一系列的曲面，都是相同的直紋面，直到某個特殊值，突然出現一個新直紋面。換句話說，這並不是豪斯多夫拓撲（Hausdorff topology），顯然曲面的分類其實要更微妙一點。我自己也想了解更多分類問題的代數取徑，譬如說，我一直透過小平維度（Kodaira dimension）的角度在閱讀恩里克斯關於通過代數曲面定性分類的著作。

完成論文後，我就一頭栽進「 ϑ 函數」的概念，我曾在印度講課，還出版了三卷書^③。不過對我來說，這一切都是從我訪問約翰霍普金斯大學，聆聽井草準一（Jun-Ichi Igusa）講演模數開始的，井草相當理解 ϑ 函數。突然之間，我開始領略到 ϑ 函數的內涵具有難以置信的威力，這也很自然的配合我總是希望眼前能有具體事物的想法。事實上運用 ϑ 函數，我們可以完備而且明確的描述阿貝爾解形的模空間。例如想將所有主極化（principally polarized）阿貝爾解形的集合描述成一個射影解形並寫出明確的坐標，都可以靠 ϑ 函數來完成。這個想法在特徵數的情況也非常完美，尤其在特徵數非 2 的情況，你甚至可以在模空間與 2 進數的測度之間建立明確的關聯。

問 爲了本文年輕而熱情的讀者，你能否闡明爲何需要表述諸如「模空間」這樣的數學對象？想理解這個代數幾何的基本概念有什麼最簡單且最直觀的方法？

答 模空間就是一張地圖，對我來說，這就是動機。我從 2000 年到 2010 年的這十年間所做的許多工作都和微分幾何範疇的模空間有關。尤其是實平面中所有簡單封閉曲線所成的集合。簡單封閉曲線就是簡單迴圈，可以是大象的輪廓，也可以是圓或橢圓。這個集合是一個無窮維流形，明顯的問題是它長什麼樣子？這個流形本身的幾何形狀爲何？你也可以在上面引入諸如黎曼度量之類的東西，其中可考慮的漂亮度量很多，所賦予的幾何差異很大，有時曲率爲正，有時爲負。我想推薦我的好友密可（Peter Michor），他是維也納的微分幾何學家，也是我的合作者。

類似的，如果考慮所有代數曲線的集合，我們希望該集合本身也是代數解形，這實在很自然。就是這類奇怪的東西，我想還沒有人完全理解。但是當你對某類物體進行分類時，該分類空間往往在某種程度上反映出被分類的對象本身。這就是我和哈里斯（Joe Harris）的定理：20 好幾或更高虧格曲線的模空間本身就是一般型（general type）的解形，完全符合上述觀點。就我個人而言，這是來自上帝的空間。每個虧格的曲線各有一個模空間，它就在宇宙裡，它就像太陽系裡繞著太陽旋轉的行星一樣真實。

模空間研究的印度友人

問 接著我們來談 1962 年在斯德哥爾摩舉行的世

^③ 譯註：即三冊的 *Tata Lectures on Theta*（Modern Birkhäuser Classics）。

界數學家大會（ICM），那時你還不到 25 歲，大會中你提出一個與向量叢「穩定性」概念有關的想法。能否引導我們了解你對「穩定性」概念表述所包含的基本想法，以及這個想法最後如何意外的強烈影響來自孟買塔塔基礎研究院（Tata Institute of Fundamental Research, TIFR）兩位印度數學家的研究，他們是拿拉辛罕（Mudumbai Seshachalu Narasimhan）和塞沙德里（Conjeevaram Srirangachari Seshadri）？



曼弗德和馬林（Yuri Manin）在 TIFR 代數幾何會議。（David Mumford）

答 當我開始研究模空間時，模空間很明顯的一種自然表述方式是做為高維空間的商，例如考慮某種典型的半單純射影廣義線性群（semisimple projective general linear group）在這些空間上的作用，由此得到的商空間就是你想要的模空間。

當然，你可以雙有理的條件做到這一點，只要考慮函數體中的不動點即可，但這不表示逐點來說得到的真是良好的模空間。研究這些問題時，我正好到挪威和英國度蜜月。我在英國劍橋時，花了一些時間在知名的赫弗斯書店（Heffers Bookshop）閒逛，他們的地下室有各種奇特的老書，其中就有 19 世紀關於不變量理論的書籍，我十分訝異的發現書中蒐集了大量怪異的代數恆等式，以及在典型一般線性群下構造不變量的方法。高登（Paul Gordan）和克雷比許（Alfred Clebsch）在書裡發展了各種理論⁴，還有希爾伯特。我開始研究特殊情況，真正起頭的是投影線上 n 點的模空間。假設你取 n 點的集合，並以射影等價來分類，亦即考慮 $PGL(2, -)$ 在投影線上的作用。很明顯在取極限時這無法得到豪斯多夫拓撲。問題是在其中能否找到一個表現良好的大子集？在克雷比許和高登的書中真的有許多顯式不變量的東西，結果我偶然發現了如果沒有重數大於或等於 $n/2$ 的點，那麼以群作用時，商空間就確實是一個具豪斯多夫拓撲的模空間。

「穩定」一詞源自蹺蹺板如果超過一半偏向某一邊，蹺蹺板就會往那個方向傾斜，因此就不穩定，這就是這個簡白詞彙的來源。就這樣幾年後，我坐在哈佛的辦公室收到塞沙德里的信，信封上貼著印度的異國風郵票，信中說他們讀了我在斯德哥爾摩的演講，告訴我他們也偶然發現了

⁴ 譯註：“Theorie der Abelschen Functionen”, B. G. Teubner, 1866。

同一個空間，儘管他們是從複分析的角度切入。對我而言，這顯然是世上最令人興奮的事情，這讓我想起哈第（Godfrey Hardy）收到拉曼努真（Srinivasa Ramanujan）來信的故事，在地球另一端有人在思考自己做的事情，而且想法與自己的一致，這是而且一直都會是極端鼓舞人心的事情。在這個世界上每個國家都有數學家的事實非比尋常，但如今我們可悲的再度生活在民族主義脫穎而出的時代。我有一位挪威祖父，一位英國父親，加上這件事，就我而言，是世界一家最明白的訊息。

與塞沙德里接觸所發生的第一件事是我邀他來哈佛訪問，他來了而且回邀我往訪印度。他在 1965 或 66 年到哈佛，我則是在 1967 年秋天和我的妻子艾莉卡（Erika）以及兩個大兒子史蒂芬（Steven）和彼得（Peter）到達孟買，這是一次最美妙的體驗。印度獨立以來 70 多年內，已經徹頭徹尾的轉變，現在已經是一個完全不同的國家。但在 1967 年，印度才獨立不到 20 年，英屬印度的幽靈仍然盤桓在這個國家之上。我們一家人到 Breach Candy 海灘俱樂部時，甚至沒有人質疑我們是不是會員，只因為我們是白人，這才是最重要的。我們享用那裡的設施，在那裡吃印度捲餅（dosa）和喝酒，瀏覽牆上英格蘭許多板球隊的照片。但是在當時的印度，你還是得等一頭牛過來才能安全過馬路：當時的交通和現在一樣糟，但周遭有很多牛亂走，所有車輛會因為牛隻而停車，我們就趁著混亂穿越馬路。訪問一個文化延續停滯數百年、變化依然不大的國家，是一段非凡的經歷。計程車司機紛紛抱怨，英屬



曼弗德和塞沙德里，攝於 2008 年。（David Mumford）

時期的燈泡都會亮，但現在的都壞了。當然在這種境況下，TIFR 本身是一個夢想，誠然宛如海市蜃樓，面對阿拉伯海朦朧的水平線，提供完美的環境。在研究院有很棒的學生，很棒的同事，很棒的研究條件，有一大群人在研究代數幾何。除了麻州劍橋，這裏確實是世上另一個主要的代數幾何研究中心，這是一次很棒的體驗。如你所知，我到目前為止已經重回印度 15 次左右。塞沙德里是我一生中最親密的朋友之一，我永遠追念他。

研究古印度數學史

問 對古印度數學有什麼印象？2006 年，你甚至在布朗大學開設了一門數學史課程，在課裡你比較了自古以來主要文明對數學的貢獻。我們尤其想聽聽你對印度發明數字 0 的看法，這項古老的思維最近在公眾想像中又重新復甦，這要歸功於

對巴克夏利手稿（Bakhshali manuscript）更精準的定年嗎？

答 我真正的啟迪源自相當隨意的對話交流，點點滴滴學習古印度數學。但是當我開始認真研究後，它所顯示的訊息是：這是世界史上極罕見的時刻，平行的事情在不同國家發生，甚至可以直接比較。通常歷史的發展是一次性的，事件某時在某地發生，類似的背景絕無可能重演。但是印度、中國和希臘基本上獨立的發現了數學（或許有些爭論），以完全獨特的方式推展各自的數學。你可以見到在地文化如何對他們發現的數學特性與發展數學的方式產生巨大的影響。你可以看到可觀的平行事件，像是中國剩餘定理是一個真正在希臘、印度和中國獨立發現的定理。但另一方面，例如質數的概念雖然讓古希臘人趨之若鶩，但盡我所知，卻從不會在另外兩個文明真正紮根，在中國從未出現，在印度也只是擦邊而過。絕對令人著迷、也是我個人看法的是，真正在印度構成影響的是梵文本身，它的語言複雜性，尤其是其中的語法和聲韻。

於是人們開始數數，而這三種古文明的共同特色是數學與天文學都是一起發展的。這是很普遍的事，因為天文在字面上就是從計數事物開始的，像是月球一年繞地球幾圈？不幸的是答案不是一個確切的整數，於是你對這個數做連分數展開，檢視其合宜的有理近似值，一旦你觀察到某種週期性，就可以對行星也做類似的處理。

另一件不那麼中國，但卻是印度和希臘特徵的是對絕對大數的迷戀。我認為這明顯和天文學有



1972 年，曼弗德在國際研討會演講。（David Mumford）

莫大的關係，在印度會問出類似一時（yuga，也譯成「宇迦」）有多長，並繼續質問類似的一大時（mahāyuga，「摩訶宇迦」）或一劫（kalpa）有多長的問題。在希臘，阿基米德顯然很著迷於超大數。知名的「阿基米德牛群問題」就是一個很優美的例子。基本上，既有所同，也有所異。你有相似之處，也有不同的地方。我認為試圖爭辯誰比誰優越是完全無意義、也沒有說服力的事，因為它們各不相同。中國人非常務實，儘管他們執著於保留歷史，但很不幸的，他們也摧毀了漢朝之前的大量實際古代史。所以沒有人知道何時何地中國人發現直角三角形的畢氏定理（勾股定理）。

你剛問我數字 0 的問題。但我其實有一個擾人的想法，我覺得對 0 的癡迷其實有些荒謬。我覺得更重要的是能簡單寫出具有適當位值的大數。當然，如果沒有數字需要寫在某個位值上，大可以就空下來，巴比倫人在西元前 2000 年爲了進行適當的會計就是這樣做的，只是他們用的是 60 進位。巴比倫人寫下數字，在寫 0 的地方留下空白。當然留空的做法會造成麻煩，因爲有時不知道該留多大的空位。但在近東地區西元前 600~700 年的天文手稿裡，已經出現用點來表示哪裡有 0 的做法。當然「空無」在印度哲學裡是非常深刻的觀念，你甚至可以上溯到《梨俱吠陀》看到一些提示，但是我並沒有發現特別令人興奮的想法。

巴克夏利手稿真的很重要，但我發現其中更重要的是那些基本公式，代數公式，手稿中其實有一套完整的符號來書寫數與數之間的恆等式。代數是印度的另一個巨大貢獻，印度人使用大量的字甚至不同顏色的字來表示不同的變數。丟番圖只用一個字來表示變量，所以當他不得不將一個算式代入另一個算式時，他只能靠他的腦袋用迂迴複雜的方式描述他的作法。大家都說花刺子米有多大的貢獻。但我認爲花刺子米的所有代數都是從婆羅摩笈多（Brahmagupta）那裡學來的，就我的理解是這

樣。這些想法被複製並通過近東而傳播開來，我認爲這就是伊斯蘭代數的起源，可嘆的是這些事情現在都變得很政治化。

我還要提及印度河流域文明對印度、印度神話與其儀式等等的影響。我的好友迪瓦卡蘭（P. P. Divakaran）投入這些研究甚深。談到畢達哥拉斯的觀念如何在印度背景中出現，它出現在建造祭祀動物的火祭壇手冊中，這必須仰賴明確的幾何法則，我們也可在吠陀儀軌看到類似的說明：如何進行獻祭的整體規則，以及其中需要的數學都清楚羅列出來。

在巴比倫，畢氏定理則應用於稅收目的，他們需要幾何學來丈量農地並合宜的評估稅收。同樣的，爲了規劃城市他們善用畢氏定理，因爲它提供構造直角的方法。當你設計建築的基地或繪製土地的邊界時，這都很重要。

另一方面，帕尼尼（Pāṇini）的文法學在許多方面都預示了整個現代的電腦語言，其中包括電腦科學中的想法，像是使用抽象符號來指稱對象的各種類別以及它們之間的相互關係。賓伽拉（Pingala）的聲韻學則可導出組合數學，也可以一窺印度數學中存在的不同數學起源，所有這些都很緊要。

問 在最近一項研究裡，你研究中國天文學家預測日食的方法。隨後夏赫（Jayant Shah）



夏赫。(Jayant Shah)

也比較了印度人同時期用來預測日食的方法。關於我們的印度祖先運用預測模型的複雜性和穩健性，這些研究有什麼發現嗎？

答 日食不僅在三大古文明中舉足輕重，即使在許多次要文明也扮演重要角色。在中國，如果皇帝不能預測日食，那只說明你失去天命，臣子在情理上可以砍掉你的頭，再換一個新皇帝。我很幸運能與夏赫合作檢閱古代手稿，我們還有一位來自中國的合作者曲安京，他協助我們處理所有中國的材料。就那些對日食不那麼著迷的人來說，這項課題之所以那麼有挑戰性，同時也驅動數學研究的理由是「視差」。日全食只能發生在月球穿越黃白交點的期間，而且只有跨越地球的一小段路徑能見到。為什麼只出現在一小段路徑上呢？這是因為當你位於地球其他地方時，月亮相對於其他所有天體在天空中的位置將有不同，從直接在頭頂上到直接出現在地平線上，它的位置變化相對於星星大約是 1 度，因此相對於太陽也是 1 度，畢竟太陽比月亮遠得多。視差的現象如果缺乏幾何模型和某種程度的數學將會十分難解，視差的想法發展於印度和希臘，但在中國完全沒有出現。奇怪的是，中國人卻存在驚人的演算法，能夠模擬視差的現象，但他們沒有模型來說明其中的緣由。很可能這是唐朝時中國人往訪印度天文學家而學到的。但我們也應該意識到印度人的早期天文學也確實受到希臘的影響。據我所知，古希臘本輪（epicycle）的想法必須等到亞歷山大大帝征服各地的希臘化時期，才出現位於巴基斯坦和西印度的印度／希臘王國。



曼弗德與他收養的女兒蘇綺妤（Suchitra），攝於孟買。（David Mumford）

你對七世紀的印度數學家婆羅摩笈多有何看法，尤其關於他在某類型代數方程裡，合成任意兩已知解去生成第三解的想法。這是否可想成是過去並無先例的思想起源，從而真正萌發並流傳下對稱性運算觀念的種子？這可是現代代數思維的核心想法。若真如此，七世紀比阿貝爾、伽羅瓦和李等人整整早了 1000 年，它是否有資格稱為現代代數思想萌芽最早的例子？你無疑會注意到，這個想法直接關聯到我們這本刊物的名稱：Bhāvanā！⁵

⁵ 譯註：Bhāvanā 有「生成」、「發展」、「孕育」的意思，也用來表示「禪定」。

答 是的，婆羅摩笈多發現的合成方法確實預示了代數的後來發展。但讓我印象也很深刻的是他對代數方程的熟練和熱愛。我有一個個人部落格^⑥，今年冬天我在那裡寫下一個很有趣的觀察。每個發明自己代數方法的文明似乎也同時發明自己的「關鍵問題」（screwball problems，直譯「螺旋球問題」），只有他們可以運用這種新代數來解決。婆羅摩笈多是一個很好的例子，他有這些非常奇怪的（譬如四次方程）挑戰。並且只有他能以一個很天才的代數技巧解決這些問題。我知道除此之外他還有許多知名的事蹟，但讓我印象最深刻的就是是他在代數基礎上的工作。當然，他在四邊形以及佩爾方程的工作也早已眾所周知。

跨越純數學與應用數學的藩籬

問 電腦正迅速變得不可或缺又智慧化。在插圖豐富的《因陀羅的珍珠》一書中，你和合著者擴展了電腦在基礎研究裡經常扮演的角色，超越只會生成一系列難以理解的數字，轉而實際揭露隱藏其中的模式、形式和洞識。如果沒有電腦，所有這一切可能依舊會絕對超脫人類的想像，尤其是視覺性的對象。你如何看待計算和數學的結合，而且首先，這真是我們希望的結合嗎？

答 哦！當然，看在老天的份上，計算和數學的結合當然是值得追求的。看看阿基米德，他同時擅長純數學、應用數學和數值數學。他有一個稱為 STOMACHION^⑦ 的怪異問題，想從一堆



左起曼弗德、傑洛米（Jeremy）、蘇綺妤、艾莉卡，攝於 1979 年。（選自 Femina 的文章照片，David Mumford）

奇怪形狀的碎片，組裝成一個更大的碎片，現在都能用電腦解決了。甚至阿基米德所謂的「牛群問題」，有人已經明確解決這個問題，答案有 140,000 位數，而且是佩爾方程的解。解決這個問題的人在他數學系辦公室的牆上貼滿了寫滿大數的紙張，稱之為「諸神的牛群」。數學和計算從來都密不可分。高斯喜歡趁空閒就做計算，他的娛樂是在一、兩百萬的範圍內取連續 100 個數，計算這些數之中有多少質數。這聽起來或

^⑥ 譯註：<https://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog.html>。

^⑦ 譯註：〈十四巧板〉，阿基米德的再生羊皮書手稿中記載的問題之一，由可拼成正方形的 14 片不同形狀的扁象牙片排出各種造型。因其難度而戲謔為「胃痛」。

許像是身為應用數學家的勢利眼，我們總認為自己可以分辨兩者。例如在非線性微分方程的領域裡，毫無疑問計算模擬絕對是關鍵，我自己就有一篇論文討論流體的歐拉方程，其中我既需要計算又得到理論的結果。。

問 印度數學家拉曼努賈（Chidambaram Padmanabhan Ramanujam）的故事展示了一個卓越人物的心酸案例，他仍然無法克服內心的恐懼和不安全感。你和他合作過，甚至和他合寫一本書。在數學家創造和舒坦居住的內在心靈世界與他們實際生活的外部世界之間保持健康的平衡究竟有多重要？

答 拉曼努賈不是我認識的唯一患有這種疾病的數學家，肯普夫（George Kempf）是另一位不幸患上精神分裂症的人，他為此苦苦掙扎。當他擺脫疾病時完全正常和活躍，然後又再次成為疾病的犧牲品。我想給一個一般性的看法，很高比例的理論數學家位於自閉症光譜的某處。落在自閉症光譜可以協助他們構建理應如實的數學世界，成為一位優秀的數學家。當然這不是成為數學家的必要條件，但遺憾的是在數學家中這似乎是相對普遍的現象。

問 你的研究無縫的跨越數學的更純粹面和應用面，令人信服的確立任何將兩者分開的界線，不僅是侷限的，也是人為的。傳統代數幾何學家和數論學家研究的 ϑ 函數，出人意表的出現在非線性波傳播的動力學中，對於通過光纖電纜的光

信號傳輸訊息至為緊要。公開弭除純數學和應用數學之間的人為障礙時機是否已經成熟了？

答 是的。在我最近與非線性波傳播的接觸中，我讀到如何藉由 ϑ 函數獲得精確解的美麗案例。事實證明這在所謂的「瘋狗浪」研究中十分重要，這是在深海中突然出現 100 英尺高的海浪（平均浪高度約為 20 英尺）。通常天氣狀況和颶風無關，海洋狀況也相當正常，但可能有大浪，然後突然之間冒出一個怪物一般的瘋狗浪。

當然，是時候解除純數學和應用數學之間的人為障礙了。時間已經過了很久，其實也是比較近才出現這種障礙的觀點，我覺得二戰之前並沒有這道藩籬，馮諾曼毫不費力的在兩者之間來回移動，這道障礙是布巴基霸權的不幸結論。

電腦視覺與神經科學的研究

問 為什麼你會從代數幾何轉移到其他數學領域如模式論／電腦視覺？能否詳談這個轉變的過程，以及你在布朗大學的教授生活？你需要重新掌握新的術語嗎？大概是什麼情況？布朗大學和哈佛大學的氛圍有什麼異同之處，無論是同事、部門、大學，還有課程和學生？

答 在哈佛，每個人都是自己特定領域的世界級專家，他們也表現的像這樣。而在布朗，就像大學部課程一樣，那裡有更多更多的合作。當我轉到布朗時，感覺真是太棒了。我參加神經科學、心理學、認知心理學、統計學、工程系的討論班，



1979 年，曼弗德、帕辛（Aleksei Parsin）以及其他人攝於莫斯科的鄉野。（David Mumford）

也偶爾參加純數學的討論班。我發現這是一個更適於合作的地方，因此很令人興奮。我並不認為我真的掌握了統計術語。統計學家對所謂的「充分統計量」或類似的東西有自己的直覺，整個領域整體有自己的架構，就像數學和物理一樣。在物理學裡，整個證明的想法是毫無意義的，因為你是在處理世界的模型，真實脈動的世界已經存在了，世界存在的邏輯一致性無需證明，物理學沒有哥德爾定理。

問 1989 年，學術界很驚喜地注意到一篇發表在《純數學與應用數學通訊》（*Communications on*

Pure and Applied Mathematics）期刊的論文，你以此進入電腦視覺和大腦研究的世界，請分享你開始離開代數幾何的想法。

答 是進入電腦視覺和大腦研究的領域，但我從來不是兩者真正的驅動力，我是一個邊緣人物。如果我在電腦視覺和大腦研究上有任何影響，那都是透過我的學生，尤其是最近離開加州大學洛杉磯分校去北京的朱松村和神經科學系的另一位學生李大成幫助我的一些想法獲得傳播。你所提到的論文，談的是偵測物體尤其是它們的邊緣，那是我和夏赫合寫的論文，刊登在《純數學與應

用數學通訊》上，經常被稱為曼弗德／夏赫模型。當時電腦視覺領域還在起步，引入自由邊界值問題的想法似乎很自然，那正是我們的貢獻。夏赫和我很努力的在電腦視覺與神經科學領域站穩腳跟。

問 廣義來說，將偏微分方程運用於電腦視覺問題的基本哲學是什麼？我指的是現在普遍稱為曼弗德／夏赫泛函的想法，這確立了你們的研究在這個領域的地位。你的合作者夏赫是東北大學的數學家。

答 正確看待它的方式，或者說它的哲學是這樣的：在純數學這個領域的通行硬幣是定理，如果你證明了一個先前猜想的定理，尤其是猜想的時間特別久的話，你就在這個領域裡賺到一枚通行



曼弗德在拉曼努真研究所演講。(David Mumford)

金幣。在應用數學裡，定理多少只是研究的附屬部分，有趣但不是核心關注，真正關鍵的是一個好模型，能捕捉現實世界某些面向的模型，而且還從來沒有用數學術語描述過。這就是為何曼弗德／夏赫這樣的物事相當程度的流行起來。總的來說，工程師想要的是現在能用而且他們也能用的東西。放棄直接解題，走遠一點，說我們首先得用抽象的變分問題來做表述，這才是數學家的貢獻。夏赫非常出色，他在數學和工程的背景都很豐富。那是一次很棒的合作。

問 已故瑞典科學家葛瑞南德（Ulf Grenander）在促成你對模式論領域產生興趣方面扮演了什麼樣的角色？

答 葛瑞南德對尋找模型認知課題的正確研究理路很感興趣，像是我們如何在腦袋中真正處理單一概念，再將它們連接在一起？他設計了一個圖一樣的系統，在我看來，這是最早的語言圖式



曼弗德攝於清奈數學研究所的課後。(David Mumford)

分析之一，有點類似羅傑的同義詞詞典（Roget's Thesaurus）。但是許多不同的電腦科學家在研究人工智慧和思維機制時都引入了圖的工具，但葛瑞南德做了更進一步的探究，提出更重要的想法。我非常喜歡他。他是一個很有魅力的人，在形體分析也啟發了很多想法。他會這樣說（其實是一封電子郵件）：「繫好安全帶，我們現在要提出一個問題。我們需要整個人體形體的數學模型，其中包括所有器官、骨骼、神經、動脈和靜脈。我們不只要找到平均值，還要找到常態變異，以至於我們可以量化的釐清何謂異常變化。」他提出這個問題，現在儼然發展成一番大事業。當然，事實證明這比他原先預期的要困難得多得多。

人工智慧的曙光

問 在世紀之交，你寫過一篇關於「隨機時代的曙光」的文章？請談談你在這篇文章中嘗試表達的基本看法。你自己的研究是否涉及這方面？是什麼促使你寫這篇文章，20年後你對這項主題有何看法？你仍然認為這是重要的前沿領域嗎？還是你看到更新的領域？

答 我意識到貝氏統計可以用來提升人工智慧的理解、思考和推理過程時，我印象非常深刻。我看到在電腦科學中隨機概念的重要性，尤其是基於蒙地卡羅法的演算法，可以用來求解微分方程。在新千禧年的黎明，許多人在2000年被要求寫下新時代各式各樣的大思維再結集起來。在我看

來，隨機時代的曙光似乎是21世紀我們正在朝前邁進的大目標。

當我還是學生時，機率論在某種意義上被理所當然的視為數學家族可憐的表親，場上的確有些有趣的法國球員和人物，但卻遠遠不如分析那麼核心，還有當時所謂的現代代數：群、環、體，甚至也比不上拓樸和幾何。我們知道有機率論，可以回溯到賭博、計數屍體以及其他無趣的活動，絕對不具備其他數學核心領域的智識地位，所以我覺得應該要矯正這股風氣。我有種感覺，有些純數學領域已經變得越來越純，越來越抽象。從我的觀點，任何新抽象的必要性，都應該藉由解決傳統數學領域的傳統問題來證成。這樣才能展示新概念的力量，同時也產生一個可用於古典問題的新工具。為抽象而抽象在某些領域已經帶著流行的成分，但因為我不是這些領域的專家，不好講的更詳細。

問 你如何比較模式論的主題與當前電腦科學、深度學習的風潮？你覺得後者有發展深度數學理論的空間嗎？

答 神經網絡的想法可以追溯到很久以前，但它好像沒有其他演算法優秀，似乎也缺乏進展，只有一些死忠的信徒。然後，令人驚訝的事情發生了，因為社交網絡累積了大量的數據集，與此同時，電腦威力也變得更加強大，尤其是發現能使用圖形處理器（GPU）來計算，而且使用GPU計算神經網路演算法非常有效率。因此一旦能運用這種額外的計算能力和所有這些數據，哇！他

們開始解決一個又一個的問題。史丹福大學的曼寧（Christopher Manning）有篇論文，說服我這確實是一個新時代，我真的必須重新思考和審視我之前支持和提出的人工智慧本質。

曼寧和他的學生問說：「這些深度學習演算法要如何分析語句？他們是在『發現』文法嗎？」當我開始人工智慧研究時，行內一直有一個問題：純粹統計方法是否比使用喬姆斯基學派的顯式文法表現更好？你是否能從電腦實驗中證明文法確實有助於理解語言！對此我認為之前並沒有任何明確的答案。第一個突破性的想法是運用高維實向量來表示單詞本身。例如你可以用 500 維的向量表示一個詞，為什麼這種做法的威力那麼強大？因為詞和詞之間在許多不同維度上相互連結。

沒有簡單規則可以連結單詞，它們以文法相似性連結、以語意相似性連結、以其存身的言語行動（speech-act）相似性連結。因此使用極高維向量表示單詞可以非常非常有效率的處理。曼寧



曼弗德、拿拉辛罕和拉馬南。（David Mumford）

所演示的是，這些超高維詞表現（如谷歌搜索引擎的輸入）之中，已經隱含語句的文法。你可以這樣挑戰電腦演算法，要求它分析關於語句的問題。我們談的完全不是直接的文法問題，而是類似「第二句話是第一句話所提出的問題的回答嗎？」的問題。另外像是語句中如果漏了一些詞，最有可能放在這些位置的詞是哪些？

運用這些演算法可以運作出各式各樣的相似性和意義，只是其方式完全不透明。因此有人會納悶這樣的表現所處理得算不算與文法相涉？曼寧有一個非常簡單的想法：將這個 500 維向量投影到例如某個 20 維空間中（一般來說，投影到維度小很多的空間），然後去檢視是否在某些投影裡，被投影的單詞揭示了語句的文法。假設這個句子有 15 個詞。你將這 15 個詞中的每個高維表現投影到某個 20 維空間。曼寧還建議一個很簡單的演算法，藉由度量這些 20 維向量之間的距離去偵測語句的樹狀結構。事實證明，大約 80% 的文法真的隱含在這些高維表現裡。



曼弗德、塞沙德里以及他的妻子桑達麗（Sundari）攝於 2008 年。（David Mumford）

我自己的方法是我們需要明確的建立文法連結。就像語句的文法，圖像中也有文法。由於圖像的某部分其實與另一部分有連結或包含某些部分，因此便會產生關係。像是眼睛、鼻子、嘴巴等都是臉的一部分，或者像車輪是汽車的一部分一樣，這些就是圖像的一些文法結構。過去的六個月，我已經改變我的信仰，當然未來很難說，可能還會增添一些結合的想法。我認為下一個巨大的進展將會是學習同時移動和觀看的機器人，就像嬰兒一樣，這會讓人刮目相看，因為如果機器人可以像動物一樣到處移動一定會令人不安。

享受數學與生活

問 從 1974 年的費爾茲獎開始，邵逸夫獎、史蒂爾獎、沃爾夫獎，再到美國國家科學獎，你已經囊括這些大獎。儘管這些很難相互比較，但是否有一項工作是你真正樂於完成並做出貢獻？如果有，是什麼？為什麼你會選擇這個工作而不是其他？

答 談這個其實有點尷尬。當你贏得一個獎，就會發生一種事，也就是其他獎項的委員看到你的名字，他們會想說：「哦！這個人是這個群體的一份子。」我記得東德人所說的「旅行幹部」（Reisekader），亦即一群可取得簽證在共產主義政權下旅行的東德人，我想也有一種類似的得獎幹部，你是可被接受的，因此得一個獎導致得另一個獎。我認為獲獎是一種內生的，相當近親繁衍的事務。我真正高興的成就是能在數學中到處賞玩，

就我個人而言，模空間的研究很棒，我非常享受，因為真的很有趣。人工智慧也一樣令人驚嘆，神經科學和數學史也是，我還有一整篇關於斯賓諾莎哲學的部落格文。我很享受每一項工作以及這一切。

問 你熱衷航海，擁有一艘遊艇。請談談你如何培養這項興趣，你是否還在追求這個愛好？談談你除了數學之外的其他嗜好或熱愛的東西。

答 我是一名水手，但是我現在並沒有遊艇。年紀大了肯定沒有年輕時那麼敏捷。我喜歡水，當然不後悔我所有在船上度過的長途旅行。我最長曾經環繞加勒比海在船上住了五個月。

問 請談談你的家人或非數學家朋友如何協助你創造一個可以追求最高層次數學的環境？

答 是，每個人都不一樣。但是如果我的家庭生活不像我的數學生活那麼幸福，我的生活就不可能過的如此滿意而且如此幸福。也許有人可以像和尚一樣過活，但我不行。當然每個人都不同，我的家人是我的巨大靠山。

問 你怎麼認識你的第一任妻子艾莉卡？她與印度有何關係？你們如何決定要收養一個印度女孩？

答 我的第一任妻子艾莉卡是雷德克利夫女子學院的學生。我們在大四那年（1956 年秋季）透過一位朋友的介紹而認識，這位朋友有一本拉德克利夫所有新生的相冊，其中艾莉卡的照片馬尾辮

子像皇冠一樣紮起來，穿著是來美國之前的德國風格。她對世界上所有的宗教和神話都很入迷，抓住機會就在孟買度過一年，學習到更多關於《往世書》（*Purāṇas*）等等的知識。至於蘇綺妤，我們生了三個男孩之後實在很想要一個女兒，由於我們在孟買有很多朋友，因此事情似乎是可行的。帕利克（Rohit Parikh）曾經是我在麻州劍橋的室友，他的母親是孟買古吉拉特語（Gujarati）族群的一員，她為我們打開了這扇門。



攝於印度甘吉布勒姆（Kanchipuram，香至）的寺廟。（David Mumford）

問 最後，你對年輕有抱負的數學家有什麼建議嗎？

答 我必須說的是 20,000 小時。這個數字來自古巴雪茄捲煙人。這些捲煙高手嘗試算出他們達到捲雪茄最高專業標準所需的時間，他們估算自己到達專業之前所有花在練習捲雪茄所用的時間。我認為這與數學研究生想成為專業數學家所需的小時數恰好相同。我的意思是你必須愛上它，如果你不喜歡，就永遠不會成為成功的數學家。尤其是在所謂的純數學裡，你必須根本相信數學宇宙的真實性，並且，相信我，它確實是真實的。哲學家有時稱之為柏拉圖宇宙。

問 曼弗德教授，感謝你在參與各種活動之餘，能抽空與我們交談。祝你在未來身體健康，繼續享受數學，而且研究成果豐沛。∞

本文出處

本文刊登於印度 *Bhāvanā* 數學雜誌，2021 年 1 月號。本刊感謝該雜誌授權與翻譯以及曼弗德和夏赫提供授權刊登照片。

譯者簡介

翁秉仁為臺灣大學數學系副教授。

延伸閱讀

► <http://bhavana.org.in/category/january-2021/>

這一期的文章有些有關，尤其是《因陀羅的珍珠》的書評。