

祝賀卡拉比先生百歲生辰

作者：丘成桐

作者簡介

丘成桐為哈佛大學數學與物理榮譽教授，中華人民共和國清華大學的丘成桐數學科學中心主任，費爾茲獎、克拉克得獎、沃爾夫獎、馬賽爾·格羅斯曼獎、邵逸夫獎得主，中央研究院院士。科普著作有《丘成桐談空間的內在形狀》，並為《數理人文》主編。

今年是尤金尼奧·卡拉比 (Eugenio Calabi) 教授的百歲生辰。我的老朋友布吉尼翁 (Jean-Pierre Bourguignon) 特意替他編了文集，裡面有不少朋友和弟子的文章。可惜這半年來，我正忙著籌備在北京舉辦的國際基礎科學大會，實在無法坐下來寫東西。現在布吉尼翁的文集已經完成，我稍微有空，還是想寫一些感想，表達我的心意。

我第一次見到卡拉比是在 1970 年的春天。當時勞森 (Blaine Lawson) 剛在史丹福畢業，來到柏克萊當講師，我修讀他的初等微分幾何，並且和他合作，寫了一篇論文。他告訴我，他的博士論文得到卡拉比的指點，獲益良多。又說卡拉比是個富有創意的幾何學家，我必須抓緊機會，趁他訪問柏克萊時，去見他。

我花了點工夫尋找卡拉比，終於在柏克萊數學系坎貝爾館 (Campbell Hall) 的一個小小的休息室找到他。當時他架著一副深度近視的厚眼鏡，正抽著煙斗，悠然自得地和年輕學生交流。他在一張紙巾上，密密麻麻地寫下一堆公式，我跑過去細看，才知道這些都是描述最小子流形 (minimal submanifold) 的公式。我和卡拉比接觸更多後，才知道這是他的拿手好戲。他往往能從複雜的幾何現象中，找到解析的答案。他的博士論文就是研究黎曼曲面的度量 (metric) 如何等距嵌入 (isometrically embed) 複歐氏空間中的。

卡拉比教授的導師是普林斯頓大學波克納 (Solomon Bochner)。波克納教授在微分幾何上的工作對我影響甚大。他退休後，搬到德州休士頓的萊斯大學。1978 年，波克納很想聘請我，邀請我到休士頓作了一系列的冠名講座。先生和我很談

得來，他告訴我卡拉比是他的博士生，由於表現出色，當時同事史賓塞 (Donald Spencer) 企圖遊說卡拉比轉為跟隨他，他知道後，便讓卡拉比趕快畢業。卡拉比在他的博士論文中引入了許多重要概念。

1970 年 5 月，我對廣義相對論中的一個課題發生興趣，那就是如何構造完備的帶有曲率的真空空間。這課題不容易，在圖書館翻閱書本時，無意中看到一篇卡拉比 1954 年的文章，我覺得美妙極了。他在世界數學家大會中提出了一個猜想：在所有緊緻凱勒空間 (compact Kähler space) 之中，這種空間的存在有個簡單的充要條件，那就是它的第一陳類 (first Chern class) 等於零。這個猜想可以歸結為求解一條非線性偏微分方程式。1973 年夏天，我在史丹福的微分幾何大會再見到他，並告訴他我在考慮他的猜測。他告訴我，當時最偉大的數學家威伊 (André Weil) 看了他的猜想以後，認為以當時對非線性偏微分方程認知之膚淺，並不足以解這條偏微分方程。

其實，1970 年春季，我修了莫瑞 (Charles Morrey) 偏微分方程的課，他是這方面的大師。那時，美國支持越南侵入柬埔寨，柏克萊很多師生都罷課抗議。最後班上只剩下我一個學生，但莫瑞教授還是繼續上課，只不過轉移到他的辦公室而已。因此我學到了不少偏微分方程的知識。縱然如此，面對這方程，還是束手無策！

這是一條在複數上的蒙日/安培方程式 (Monge-Ampère equation)，有關文獻基本空白。不過，實數上具有兩個變數的蒙日/安培方程式卻有著豐富多彩的歷史。古典的閔可夫斯基問題 (Minkowski problem) 及魏爾問題 (Weyl problem) 都由這類