莫比烏斯函數的早期和奇特歷史

作者：鄧南（William Dunham） 譯者：王夏聲

作者簡介

鄧南是布林馬爾學院（Bryn Mawr College）的數學研究員，於 2014 ～ 2016 年間，他是美國數學協會的波利亞講座（MAA's George Pólya Lecture）的演講人。他著有《歐拉：我們的大師》（*Euler: The Master of Us All*, MAA, 1999）及《微積分館》（*Calculus Gallery*, Princeton, 2005）等 4 本關於數學史的書。

摘要

莫比烏斯函數（Möbius function）是現代數論課程的固定講題。它通常可以追溯到 1832 年莫比烏斯（August Möbius，1790 ～ 1868）的一篇論文，意外的是在這篇論文中，這函數是在回答一個分析問題中出現的，而非數論的問題。但也許更出乎意料的是，該函數可以在歐拉（Leonhard Euler，1707~1783）1748 年的經典著作《無窮的分析導論》（*Introductio in analysis infinitorum*）中找到。這篇文章除了介紹可能被稱為「歐拉／莫比烏斯」函數的起源之外，還提醒我們，數學史也有很多令人的驚喜的地方。

序幕

我們以來自於分析的這個挑戰問題開始：當 $-1<x<1$，確認無窮級數

$$\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^3}{1-x^3}-\frac{x^5}{1-x^5}+\frac{x^6}{1-x^6}-\frac{x^7}{1-x^7}+\frac{x^{10}}{1-x^{10}}-\frac{x^{11}}{1-x^{11}}-\frac{x^{13}}{1-x^{13}}+\frac{x^{14}}{1-x^{14}}+\frac{x^{15}}{1-x^{15}}-\frac{x^{17}}{1-x^{17}}-\cdots$$

的精確值。這裡的正、負號以奇特的方式變換，某些項莫名的疏漏，模式一點也不明確。正如我們之後將會看到，原來發現求和是很簡單的，但要找到它，需要熟悉一個叫做「莫比烏斯函數」的東西。

什麼是莫比烏斯函數

這個函數出現在任何數論的綜述教科書中。這本書在講完關於質數、同餘（congruence）、輾轉相除法（Euclidean algorithm，也稱為歐幾里得算法或歐式算法）和丟番圖方程（Diophantine equation）的章節之後，遲早會介紹莫比烏斯函數。它往往和它的數論上的族親：sigma 函數、tau 函數與 phi 函數一起出現。對任何正整數 k，sigma 函數 $\sigma(k)$ 是對 k 的所有正因數的求和；tau 函數 $\tau(k)$ 計算 k 的所有正因數的數目；以及 phi 函數 $\phi(k)$ 計算所有小於 k 並與它互質的正整數的數目。這三個函數在數論中都有明確的用處。

相對而言，莫比烏斯函數似乎既無用也不明顯。對任何正整數 k，它以 $\mu(k)$ 表示，定義如下：

a $\mu(1)=1$。

b 如果 k 可以被某個質數的平方整除，則 $\mu(k)=0$。

c 如果 k 是 r 個不同質數的乘積，則 $\mu(k)=(-1)^r$。

因此，就前 10 個數字而言，$\mu(1)=1$；$\mu(2)=\mu(3)=\mu(5)=\mu(7)=-1$，因為這些數是質數；