

關於丘成桐先生自傳中的一個幾何問題

作者：萬喆彥

作者簡介

萬喆彥是北京雁棲湖應用數學研究院助理研究員，研究領域是用拓樸方法（cobordism）研究理論物理（anomaly）。

序

我在我的自傳中提到一件事：在我念培正中學初中二年級的時候，我的中學老師梁君偉教授平面幾何，數學的內容豐富優美，使我著了迷，每天在上課和回家的路上，都會思考，想辦法多了解幾何的內容。當時我們沒有圖書館，找不到參考書，我只能圍繞著與課本有關的問題打轉。

平面幾何的問題有兩類，一類是證明命題，除了課本學習到的問題外，不容易找到新的問題。我很渴望自己尋找新的路線，但是談何容易！我決定去看看另一類問題，就是用圓規直尺去構造圖形的問題。我嘗試一個最簡單的問題，就是建構三角形：

一般來說，研究三角形時，有以下幾點結構內容

- ① 三個邊的長度
- ② 三個角度的大小
- ③ 三條中線的長度
- ④ 三條分角線的長度
- ⑤ 三條垂線的長度

我要問一個反問題，在以上十五種不同的長度和角度中，選三個，如何去構成原來的三角形。

每天在路上推敲，除了一個情形外，都沒有問題。這個情形是一個角，一邊長，一條分角線的長度。我想了很久，都沒有辦法解決這個情形。我問了好幾個數學老師，都沒有想到很好的方法。

那時候，因為沒有圖書館，我和哥哥丘成煜常到舊書攤去找書，確也找到一些有趣的數學書，大部分

都是從中國大陸流到香港的教科書，間中也有參考書。從外國進口的圖書，要到大書店去找。但是太貴，買不起。找到喜歡的書，就站在書店看，有時候，一看就是一兩個鐘頭。在書店裡，買這種書的人畢竟不多，店員都很友善，沒有趕我離開，但是站著看書，也不是容易的事。

竟然有一天看到某個日本數學家寫的書，居然提到這個題目，並且給予證明：在上述的條件下，沒有辦法用圓規直尺來構出三角形。雖然我對這個證明不甚了了。心裡還是很興奮的。畢竟他的證明用了深入的代數理論，不是一般中學生課程會包含的。

這件事對我影響很大，我一個年輕的中學生，居然找到一個不算平凡的數學問題。我在數學界做研究五十多年，始終不斷發掘有意義的數學問題，給我們的學科充滿活力，就是得益於這個經驗。

三年前，我在香港中文大學見到于如岡教授，提起這件事，他也很快就解決了這個問題。我建議他將它寫出來，但他比較忙，至今未果。今年我在清華大學教授求真書院訓練領軍人才，想起這個問題，就請了萬喆彥老師解答並且將答案寫出來，供學生參考。很高興她願意做，對她極為感激。

對於一個數學研究學者，好的問題可以改變數學的方向。二十世紀威伊的著名猜想，改變了二十世紀後葉的算術幾何和代數幾何的發展。希望同學也多問問題。

—— 丘成桐

致謝：作者由北京清華大學水木學者計畫支持。