五、高中生為什麼要學微積分—張海潮教授

高中生為什麼要學微積分？這個問題至少有兩個答案：第一是微積分的發明在數學及相關問題上的突破，值得高中生學習。第二是微積分的方法對高中階段能夠解決的問題有所幫助。

我們將從這兩個角度論述，當然，任何一個學科都有值得學習的理由，以現階段高中生的程度學習微積分是否有困難？關於這個問題，我們會在本文的末段討論。

(一) 微積分的起源

微積分的發明源自四大問題：

(1) 嘗試了解非等速運動。

(2) 研究曲線的切（法）線。

(3) 求函數的極值。

(4) 求曲線（面）圍出的面（體）積，和曲線的弧長。

本節將以 (1) 所言運動學的部分略加說明微積分的起源與成就。研究運動者早先對速度的理解，簡單的說，是平均速度，即以行經的距離除以經過的時間。當時間從 t_1 到 t_2，且質點在直線上的位置從 s_1 改變到 s_2 時，平均速度就是 $\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$。但是由於在這段時間內，質點的位置可能既前進又後退（最極端的情形是 $s_2=s_1$，平均速度 $=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=0$），因此嘗試儘量縮小 t_2-t_1 來計算平均速度應該是比較精準的做法。但是一再縮小 t_2-t_1，不免得考慮 $t_2-t_1=0$ 的情形，此時 s_2-s_1 當然也等於 0，於是平均速度的公式就變成了 $\frac{0}{0}$，這是一個無意義的表示。

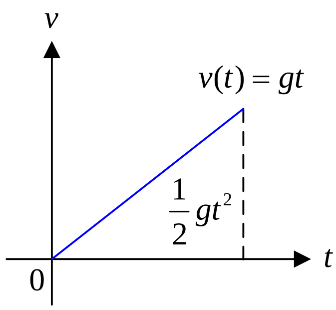
現在，我們知道速度的正確表示應該是 $\lim_{t_2\to t_1}\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$，但是由於在極限的語言尚未精確發展，並且也還沒有 lim 這類記號的時候，速度的概念是用一種近似的說法，就是 Δs 和 Δt 之比，但是 Δt 可以儘量的小，越小就越精確。

牛頓是第一個理解並能精準使用這種極限概念的數學/物理學家，他在鉅作〝自然哲學的數學原理〞中的命題 6 定理 5（中文版 64 頁）已經使用了 $x(t)=x(0)+v(0)t+\frac{1}{2}A(0)t^2+(t^3\text{項})$，式中 $x(t)-x(0)$ 是位移向量， v 是速度向量， A 是加速度向量。事實上，他使用的是

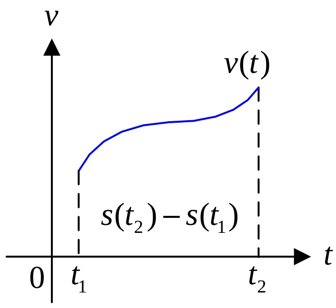
$A(0)=2(x(t)-x(0))-2v(0)t/t^2$ —當 t 甚小時 $A(0)$ 的近似表示，並且成功的從刻卜勒的行星律導出 A 是平方反比，亦即萬有引力定律。

雖然牛頓在從刻卜勒的行星律得出萬有引力定律的過程中只用了微分的方法 —位置對時間的微分是速度，速度對時間的微分是加速度— 但是牛頓充分的理解積分和微分的可逆關係，此即微積分基本定理。

早先，伽利略得到自由落體的位置 — 時間關係：$s\propto t^2$，即位置與經歷時間的平方成正比，用現在的式子表達就是 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$。如果將 $s(t)$ 對 t 微分，得到 $v(t)=gt$，或者反過來說，當 $v(t)$ 與經歷的時間 t 成正比的時候，$v(t) = gt$ 的函數圖形下所覆蓋的面積剛好就是 $\frac{1}{2}gt^2$（三角形面積公式）。



從基本的物理知道無論 v 對 t 的關係如何，從時刻 t_1 到 t_2，$v(t)$ 函數圖形所覆蓋的面積都是 $s(t_2)-s(t_1)$，即 t_1 到 t_2 的位移。



即使 $v(t)<0$，這樣的解釋也是對的。由於 $\frac{ds}{dt}=v$ 而 v 之下覆蓋的面積是 $s(t_2)-s(t_1)$，加之 s 又是 v 的反導數，上述的結論就是微積分基本定理。

可以這麼說，牛頓所發現的微積分基本定理不僅統合了求切線（微分）和求面積（積分）這兩個看似無關的問題，更進一步，從運動學的角度來看，微分是從位置得到速度的過程，因此反微分當然是從速度得回位置的過程，但是如果我們使用 $v-t$（速度—時間）的函數圖形，v 下所覆蓋的面積就變成了 s（位置），因此反微分就成了求面積的過程。

讀者試想，如果不是先已發明了在坐標平面上畫函數圖形，又將面積的概念聯繫到 v 與 s 的關係，微積分基本定理可能不是那麼明顯，在此不免令人讚嘆以幾何（如面積）來表達物理概念(v 下覆蓋的面積是位移)經常能撥雲見日(另外一個撥雲見日的例子是向量之於物理，此處不再詳論)。

總之，微積分的發明對解決問題確有幫助，微積分的思想 —從微量的變動和微量的加總切入問題— 拓展了我們的視野，使數學方法得以面對新的挑戰。

(二) 微積分與傳統高中數學的關聯

許多高中要解的問題或者本質上屬於微積分的思想，或者因為微積分的方法而有大的突破。以下試舉數例來說明：

1. 拋物線及圓錐曲線的切線問題
   現行求切線的方法，基本上是令一條直線與曲線相交時有重根，列下判別式為 0，然後解未知數（如斜率，或切點）。解的過程繁複而瑣碎。
2. 函數 $f(x, y) = ax + by$ 在圓域上的極值問題和類似的線性規畫問題，都是將 $ax + by = c$ 令 c 變動至脫離可行解區域，本是微積分變動思維下的解法。
3. 對一個多項式在 $[a, b]$ 上的根的個數，完整的處理要靠 Sturm 定理，單用勘根或是實憲法是不夠的。關於 Sturm 定理請參考臺大數學系網站/微積分經典問題。
4. 牛頓法求多項式的根的近似值是解純多項式實根最具體的方法，可以回答例如 $x^3 + x - 1 = 0$ 的根介於 0.68 和 0.69 之間，不必訴諸卡丹解法。
5. 多項式 $f(x)$ 的重根恰是 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的公根，這顯然不是單憑代數方法就能得出的結果。
6. 與物理有關的積分問題，例如脫離地心引力所需的作功。

總的來說，如果沒有微積分，高中能解的方法只是代數（加減乘除開根號），並佐以幾何的思維。能夠處理的函數基本上止於二次多項式和一些三角、指對數的恆等關係，而這些關係基本上仍然是代數的。一旦牽涉到極值或不等式或三次以上函數的問題，代數方法顯然不夠用。不但如此，即使是處理二次的情形，微積分的方法也值得參考，例如對 $y = ax^2 + bx + c$ 的函數圖形的完整分析等等。底下再舉一例說明如何藉由分析函數圖形和微積分的方法來解題。

問題：求證在 $-1 \le x \le 1$ 的區域上，函數 $|x^3 + ax^2 + bx + c|$ 的最大值大於或等於 $\dfrac{1}{4}$。

令 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x^3 + bx) + (ax^2 + c)$，我們先看簡單的情形：$x^3 + bx$。

(1) $b \ge 0$，因為 $x^3 + bx$ 的導函數是 $3x^2 + b$，所以 $x^3 + bx$ 在 $[-1, 1]$ 上遞增，
　因此最小值 m 發生在 $x = -1$，此時 $m = -1 - b$
　　最大值 M 發生在 $x = 1$，此時 $M = 1 + b$

$$\Rightarrow \quad M - m = (1 + b) - (-1 - b) = 2 + 2b \ge \frac{1}{2}$$

(2) $b<0$，令 $b=-l,\ l>0$

$(x^3-lx)'=3x^2-l$，令 $3x^2-l=0$ 得 $x=\pm\sqrt{l/3}$

當 $x=1$ 時 $x^3-lx=1-l$

$x=-1$ 時 $x^3-lx=-1+l$

兩者之差為 $|2-2l|$

如果 $-\frac{1}{2}\le 2-2l\le\frac{1}{2}$，這表示 $\frac{3}{4}\le l\le\frac{5}{4}$，因此 $\sqrt{l/3}<1$

此時，若 $x=\sqrt{l/3}$ ，$x^3-lx=-\frac{2}{3}l\sqrt{l/3}$

$x=-\sqrt{l/3}$ ，$x^3-lx=\frac{2}{3}l\sqrt{l/3}$

兩者之差為 $\frac{4}{3}l\sqrt{l/3}\ge\frac{1}{2}$

由 (1), (2) 可知，可以找到兩點 $-z$ 與 $z,\ -1\le -z<z\le 1$ 使得 x^3+bx 在此對稱兩點之差 $\ge\frac{1}{2}$。

由此，若各自再加上 az^2+c，在此兩點之差仍然 $\ge\frac{1}{2}$，問題得證。

在找出 $-z$ 與 z 的過程中，對函數圖形的分析是關鍵，此時，最有效的工具是微積分。

讀者可能辯論：本題超過高中程度。這是當然，不過，高中不是經常充斥著超過高中程度的題目嗎？此處呈現的事實是，如果懂點微積分，剛才談到的這個題目反而令人眼睛一亮，變成一個有想法、有方法的經典題目了。

(三) 高中生學微積分的困難

微積分的學習由於涉及極限，所以對初學者而言，思考的過程比過去多了一步〝求極限〞。例如，從

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\quad 到\quad \frac{dy}{dx}\quad (\Delta x\to 0)$$

以及從

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\quad 到\quad \int_a^b f(x)dx\quad (\Delta x\to 0,\ n\to\infty)$$

因此非常明顯，在學習微分的時候，必須先熟悉符號 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，在學習積分的時候，必須先熟悉符號 $\sum f(x_i)\Delta x$ 以及符號所代表的意義。

雖然如此，在多項式的情形，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限遠比 $\sum f(x_i)\Delta x$ 的極限容易計算。前者透過二項式定理得到 x^n 的導函數是 $nx^{n\text{-}1}$，而後者需要處理 $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ 的求和公式，難度大大增加。求和公式的難度可以從利用

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{和} \quad 1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n$$

分別求 x^2 和 x^3 的積分看出。

因此學積分一定要學習微積分基本定理，此一定理的運動學理解已在本文第一段說明。對一般的函數 y 實際上是嘗試理解 $\frac{\Delta z}{\Delta x}$，其中 z 代表函數 $y=f(x)$ 圖形與 $x-$軸之間的面積。同時，在學習微積分基本定理的時候，不要忘了回去驗證 $\int_0^T xdx=\frac{1}{2}T^2$ 、$\int_0^T x^2dx=\frac{1}{3}T^3$ 和 $\int_0^T x^3dx=\frac{1}{4}T^4$ 。

一般而言，利用微分來理解函數的圖形和求函數的極值，過程比學習積分要容易一些。積分由於牽涉到將求面積、體積轉化成黎曼和的形式，以便使用微積分基本定理，技術上比較困難。例如，以 $\int 2\pi rdr$ 求圓面積、以 $\int A\frac{y^2}{h^2}dy$ 求錐體體積......等等。

總之，學習任何一個新的主題，都不免有困難之處。多做一些好的習題，慢慢建立微積分核心的思想和方法，不但可以掌握高中所要求的〝多項式〞部分，正確的思考更可延伸到大學的學習。

(四) 結語

本文主要說明微積分和傳統的高中數學學習是相容的，並且在某些部分是超越的。回顧過去，在七三年版的統編本，微積分的份量太多，因此不免揠苗助長。但是到了八八年版的一綱多本，微積分的份量又太少，令人難窺堂奧。目前上手的九五暫綱，微積分的份量比較適中，而且以多項式函數為主體的設計，大大減少了許多求 $\frac{0}{0}$ 型極限的困難。

希望這樣的設計能夠至少引領自然組的同學在進入大學之前已經建立健全的微積分觀念，而將更複雜的函數（如指對數、三角函數）留到大一再行處理。目標是否達成，還有待教與學的共同努力。