國立交通大學
National Chiao Tung University

Computations for Dynamical Systems

張書銘

交通大學應用數學系

smchang@math.nctu.edu.tw

2010年7月20日

Outline

- Dynamical System
- Computational Dynamical System
- Chaos
- Examine Chaos

What's a Dynamical System?

動態系統，也稱 動力系統。

廣義來說，是關心所描述的對象之變化情形。

具體來說，所描述的對象自成一個系統， 系統變化情形是我們關心的課題。

What's a Dynamical System?

在數學上的概念是動態系統中存在一個固定規則，描述了幾何空間中的一個點隨著時間變化情況。

例如：描述鐘擺晃動、管道中水的流動，或者湖中每年春季魚類的數量，凡此等等的數學模型都是動態系統。

What's a Dynamical System?

確切來說, 動態系統就是要研究運動方程的解，對象包括自然界各種物理系統（行星軌道）、生態系統、工程系統（電路問題）及經濟股市等等。

當前混沌系統是動態系統研究熱點之一。

Dynamical System

形式上來說，動態系統可分為：

（1）離散動態系統 (discrete D.S.)

遞迴關係式

（2）連續動態系統 (continuous D.S.)

常微分方程, 偏微分方程

延遲微分方程 (delay D.E.)

（3）隨機動態系統 (stochastic D.S.)

解的存在性和唯一性

離散動態系統：遞迴關係式

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & f(x_n) \\ x_0 \ \text{given} \end{cases}$$

解的存在性和唯一性

連續動態系統：常微分方程

如果$f(t,y)$ 在 (t_0,y_0) 上連續，則一階微分方程

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

解的存在性和唯一性

連續動態系統：偏微分方程

Cauchy-Lipschitz Theorem 的擴展形式：

Cauchy-Kowalevski Theorem，保證偏微分方程的解的存在性和唯一性。

解的存在性和唯一性

連續動態系統：延遲微分方程

隨機動態系統：隨機微分方程
隨機延遲微分方程

Computational Dynamical System

（1）離散動態系統: $x_{n+1} = f(x_n)$

（2）連續動態系統:

常微分方程 $y'(t) = f(t, x)$

偏微分方程

延遲微分方程

（3）隨機動態系統

Computational Dynamical System

$$y'(t) = f(t, x)$$

求解常微分方程的數值計算方法中，最簡單的是Euler method。由於廿世紀中期之後，電子計算機的發達且蓬勃發展，使得運用數值方法來求微分方程的解已經是一門相當專門的學科。

Computational Dynamical System

$$y'(t) = f(t,x)$$

MatLab高階常微分方程數值計算方法:
one-step solver: Runge-Kutta method (ode23, ode45)

multistep solver: Adams-Bashforth-Moulton method (ode113)

離散動態系統: 3n +1

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n/2 & \text{if } x_n \text{ is even,} \\ 3x_n + 1 & \text{if } x_n \text{ is odd.} \end{cases}$$

離散動態系統: tent map

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n) = \begin{cases} \mu x_n & \text{for} \quad x_n < \frac{1}{2} \\ \\ \mu(1 - x_n) & \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq x_n \end{cases}$$

離散動態系統: logistic map

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

離散動態系統: Hénon map

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= y_n + 1 - a x_n^2, \\
y_{n+1} &= b x_n.
\end{aligned}
$$

離散動態系統: predator-prey map

$$\begin{cases} \bar{x} &= ax(1-x) - xy \\ \bar{y} &= \frac{1}{b}xy \end{cases}$$

離散動態系統: complex quadratic map

$$
\begin{aligned}
z_{n+1} &= f_c(z_n), \\
f_c(z) &= z^2 + c.
\end{aligned}
$$

連續動態系統: Duffing equation

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \gamma\cos(\omega t + \phi)$$

or, as a system of equations,

$$\dot{u} = v$$
$$\dot{v} = -\omega_0^2 u - \beta u^3 - \delta v + \gamma\cos(\omega t + \phi)$$

連續動態系統: Van der Pol oscillator

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x - A\sin(\omega t) = 0$$

連續動態系統: Rössler system

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$
$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c)$$

連續動態系統: Lorenz system

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

動態系統模型: modified logistic map

For $\gamma > 0$, Modified Logistic Map (MLM)

$$f_\gamma(x) : [0,1] \to [0,1],$$

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} \gamma x(1-x) \pmod 1, & \text{if } x \in [0,1] \setminus (\eta_1, \eta_2), \\ \frac{\gamma x(1-x) \pmod 1}{\frac{\gamma}{4} \pmod 1}, & \text{if } x \in (\eta_1, \eta_2), \end{cases}$$

where $\eta_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{[\frac{\gamma}{4}]}{\gamma}}$, $\eta_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{[\frac{\gamma}{4}]}{\gamma}}$,

$[z]$: the greatest integer less than or equal to z.

動態系統模型: 3 2D charged particles

$$
\begin{cases}
\ddot{q}_1 & = n_1 \, n_2 \dfrac{q_1 - q_2}{|q_1 - q_2|^2} + n_1 \, n_3 \dfrac{q_1 - q_3}{|q_1 - q_3|^2} + f_0 \, \dot{q}_1^{\perp} \\
\ddot{q}_2 & = n_2 \, n_1 \dfrac{q_2 - q_1}{|q_2 - q_1|^2} + n_2 \, n_3 \dfrac{q_2 - q_3}{|q_2 - q_3|^2} + f_0 \, \dot{q}_2^{\perp} \\
\ddot{q}_3 & = n_3 \, n_1 \dfrac{q_3 - q_1}{|q_3 - q_1|^2} + n_3 \, n_2 \dfrac{q_3 - q_2}{|q_3 - q_2|^2} + f_0 \, \dot{q}_3^{\perp}
\end{cases}
$$

動態系統模型: 3 vortices system

$$
\begin{cases}
\dot{q}_{jx} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{3} n_k \frac{q_{jy}-q_{ky}}{|q_j-q_k|^2} - \omega_1 q_{jy}, \\
\dot{q}_{jy} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{3} n_k \frac{q_{jx}-q_{kx}}{|q_j-q_k|^2} + \omega_2 q_{jx}
\end{cases}
$$

Q1.

Observe the behavior of the map 3n +1.

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n/2 & \text{if } x_n \text{ is even,} \\ 3x_n + 1 & \text{if } x_n \text{ is odd.} \end{cases}$$

Q2.

Observe the behavior of tent map with $\mu = 2$.

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n) = \begin{cases} \mu x_n & \text{for } x_n < \frac{1}{2} \\ \mu(1 - x_n) & \text{for } \frac{1}{2} \leq x_n \end{cases}$$

Q3.

Observe the behavior of logistic map.

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

Q4.

Observe the behavior of Hénon map.

$$x_{n+1} = y_n + 1 - a x_n^2,$$
$$y_{n+1} = b x_n.$$

Q5.

Observe the behavior of predator–prey map.

$$\begin{cases} \bar{x} &= ax(1-x) - xy \\ \bar{y} &= \frac{1}{b}xy \end{cases}$$

Q6.

Observe the behavior of complex quadratic map.

$$
\begin{aligned}
z_{n+1} &= f_c(z_n), \\
f_c(z) &= z^2 + c.
\end{aligned}
$$

Q7.

Observe the behavior of Duffing equation.

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= v \\
\dot{v} &= -\omega_0^2 u - \beta u^3 - \delta v + \gamma \cos(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

Q8.

Observe the behavior of Van der Pol oscillator.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x - A\sin(\omega t) = 0$$

Q9.

Observe the behavior of Rössler system.

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$
$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c)$$

Q10.

Observe the behavior of Lorenz system.

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$