



國立交通大學

National Chiao Tung University

Computations for Dynamical Systems

張書銘

交通大學應用數學系

smchang@math.nctu.edu.tw

2010 年 7 月 22 日



Outline

- Dynamical System
- Computational Dynamical System
- Chaos
- Examine Chaos



What's a Dynamical System?

動態系統就是要研究運動方程的解，對象包括自然界各種物理系統（行星軌道）、生態系統、工程系統（電路問題）及經濟股市等等。

當前混沌系統是動態系統研究熱點之一。



Dynamical System

形式上來說，動態系統可分為：

(1) 離散動態系統 (discrete D.S.)

遞迴關係式

(2) 連續動態系統 (continuous D.S.)

常微分方程，偏微分方程

延遲微分方程 (delay D.E.)

(3) 隨機動態系統 (stochastic D.S.)



Computational Dynamical System

(1) 離散動態系統:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

(2) 連續動態系統:(ode45,... in MatLab)

$$y'(t) = f(t, x)$$



Discrete Dynamical System

Logistic map

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$



Continuous Dynamical System

Rössler system

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$



References

- List of chaotic maps.
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_chaotic_maps
- 動態系統, 動力系統, 混沌理論.
<http://zh.wikipedia.org/zh-tw/>



Discrete Dynamical System

離散動態系統的解，有哪些種可能性？



Continuous Dynamical System

連續動態系統的解，有哪些種可能性？



混沌動態系統 (Chaos)

在數學和物理學中，研究**非線性系統**在一定條件下表現出的「混沌」現象。



Chaos

混沌理論認為在混沌系統中，**初始條件**十分敏感，其微小的變化，在經過不斷放大，對未來狀態會造成極其巨大的差別。



Chaos

smoke of cigarette



mike in coffee





Chaos

1963年美國氣象學家 Edward N. Lorenz提出混沌理論 (Chaos)，非線性系統具有的多樣性和多尺度性。混沌理論解釋了決定系統可能產生隨機結果。此理論最大貢獻是用簡單的模型獲得明確之非週期結果。在氣象、航空及太空等領域的研究裡有重大的作用。



Chaos: Lorenz strange attractor

$$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$$

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

Lorenz Attractor

<http://www.students.uiuc.edu/~ag-ho/chaos>



Devaney's chaos

- 敏感性(sensitivity)：
對初始條件非常敏感，差之毫釐失之千里。
- 傳遞性(transitivity)：
可到處遍歷。
- 週期解稠密性(density)：
存在任意週期。



Devaney's chaos

- 傳遞性(transitivity)：
可到處遍歷。

$f : I \rightarrow I$, nonempty open sets U and V in I ,
 $\exists n$ s.t. $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

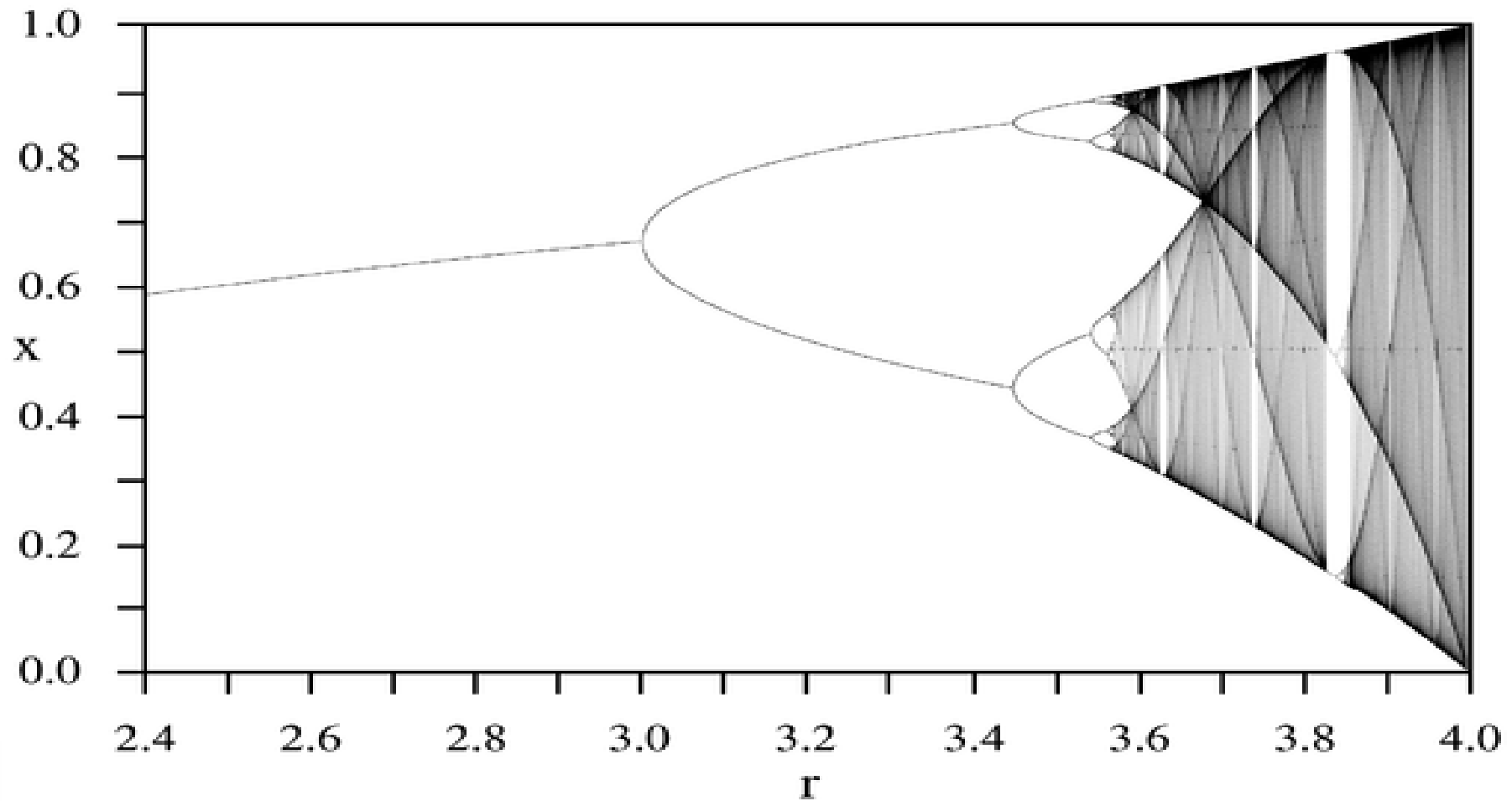


Examine Chaos

- bifurcation diagram
(period doubling bifurcation,
intermittence)
- Feigenbaum constant

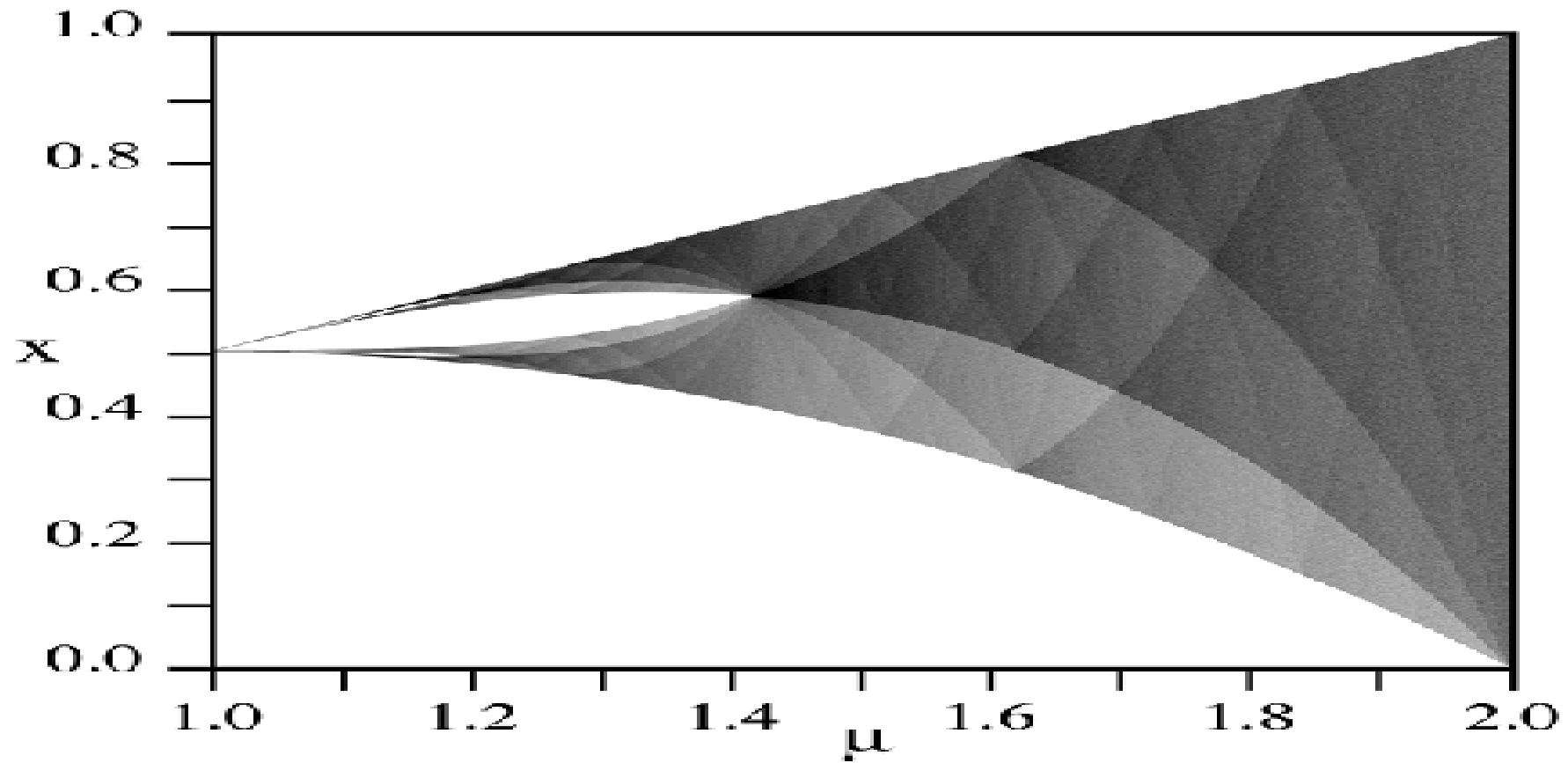


Bifurcation diagram





Bifurcation diagram





Feigenbaum constant

$\delta = 4.66920160910299067185320382\dots$



Examine Chaos

- spectrum analysis (fft)