

早期台灣偏微分方程的一些研究活動(1980-1992)

交通大學 林松山

第 25 屆微分方程研討會於今年(2017)一月七日及八日在新竹交大舉行，系主任林文偉教授邀我做個十分鐘的開幕歡迎致辭。我就以” Some PDE’s Activities in Taiwan(1980-1992)”為題，分享我親身經歷的五個活動，當時因為有外國學者在場，所以 Power Point 及祝辭皆使用英文。講完後，一些年輕朋友覺得蠻有趣的，要我多說一些。因此，就把一些記憶尚鮮明的事再回憶一下，寫成此文。文章以活動為主，少提專業，並穿插朋友間的一些故事。我要談的是以下五個活動：

(I)Hyperbolic PDE in Academia Sinica(Tai-Ping Liu, 80→)

(II) Sino-American Joint Conference on PDE(Chiao-Tung University, 85)

(III) Elliptic PDE in Tsing-Hua, (Wei-Ming Ni, 87)

(IV) RIMS Conference on PDE(88&89)&Sino-Japanese Joint Seminar on PDE’s(Academia Sinica 90)

(V) Geometric Analysis in Tsing-Hua(Shing-Tung Yau 91-92)

(I)劉太平在中研院數學所主持的雙曲型偏微分方程(1980-)

我早已聽聞太平之名。我在台大碩士班的指導老師張秋俊教授是桃園大溪人，當時他曾跟我提到他有個大溪同鄉及台大學弟叫劉太平，做偏微分方程做得很好。

後來，我到英國愛丁堡 Heriot-Watt 大學(1975-1978)念博士，當時剛好有個 Dr. John Ball 及 Prof. Knops 所主持的三年 nonlinear elasticity 計畫，經常邀請歐美該領域的學者來訪問或開短期課程。其中講到 conservation laws 時，因解有非唯一性，要挑出適當(合乎物理)的解時，就要求滿足某些 entropy conditions。有天，來自 Brown 大學的 Dafermos 教授在講到各種 entropy conditions 時：由 Lax 的 conditions 開始列出七、八個類似或等價的條件，其中出現 Liu’s entropy condition。休息時，我跑去問他 Liu 是誰，他說是 Maryland 的 Liu，我想大概就是太平吧。

很巧，那年年底我與太太到倫敦玩，住在倫敦大學的研究生宿舍時，碰到來自彰化基督教醫院來倫大進修的林醫生夫婦，他們說剛好也有對來自台灣在美國工作的數學家朋友來倫敦玩，要介紹給我們認識，在林醫生家一見面，竟然是太平夫婦，大家相談甚歡，那時太平說他會找個時間回台灣。

80 年的暑假，太平終於回台灣在南港的中研院數學所訪問，主講

conservation laws。每周一次我與當時尚在交大服務的鄭國順及許世壁，一早從新竹搭公路局巴士到台北圓環再轉 305 公車到南港。一趟路下來要二個鐘頭，中午一起吃便當，下午在聽完演講後，再搭 305 公車到圓環轉公路局回新竹，當年國順 35 歲，阿壁與我 32 歲，青春正茂，能操耐勞。課堂上，太平經常提出 open problems，讓大家做。若是有要緊的問題，就會說「這裡有個斗大的問題，尚未解決」。

國順在這個暑假解決了一些問題，發了論文。其中有個問題當我正做到三分之一時，他就宣告完全解決了。輸給他，一點都不冤枉。他從小就是讓數學老師害怕的學生，我們老家都在屏東，分住在鄰鄉。他的一個親戚也是我的親戚告訴我國順的小學數學老師經常被他抓包，是個可怕的學生。此外，他還是個圍棋高手，很會心算，他不用紙筆就可以在腦中把一個很長的方程式，左邊算算，右邊算算，移項再整理。有次，我問他，怎麼這麼厲害。他說是練出來的。他說，他經常早早就醒來，而枕在他手臂的太太尚未醒，因為怕吵醒太太，他不敢抽手或起床，就躺在床上在腦中算數學。我相信他太太一定有給他加持，要不然怎麼會贏我們那麼多！

阿壁後來與太平合作完成了一些工作。這暑假我自己用功打下的基礎，對之後在星球穩定性問題的研究及與許正雄、Makino 合作雙曲型問題時，就勝任愉快了。我們交大三人都各有收穫，太平很開心他這暑假的耕耘，說他會再回來。

再過二年(82 年)，太平又回來訪問一年。在學期中，太平提議 Seminar 就輪流在南港與交大辦。在這段期間，林紹雄也從 Berkeley 回來了。他在太平的會裡講氣體動力學。他是 Chorin 的學生做 Combustion，快速流動的流體在燃燒，多可怕的場景，多難的數學。他的博士論文在那個艱深的領域是很多年間最好的結果。

林紹雄先到清華任教，鄭國順和我常去聽他的 Seminar。後來我們跟他說，很想隨時跟他討論，就把他「騙」來交大，但是最後還是穿幫了。交大校長不同意這麼有學問的人只當副教授，因此國順與我就跟他商量，請他同意讓我們替他代填表格升等為教授，但他就是不答應。最後，受不了我們的騷擾就跑到海闊天空的台大去了。二年前，他以副教授在台大屆齡退休。他在新竹的那幾年，我跟他學 Reaction-Diffusion, KAM Theory 及 Nash-Moser Theory。前幾年，我跟朋友碰到帶引力的星球在邊界出現真空會失掉正則性致使一般迭代法失效時，就想到該讓 Nash-Moser 出場了，經過努力，Makino 與許正雄真的獲得平滑性的結果。

林紹雄也是介紹我們夫妻認識的大媒人。他低我一班，他們班都叫他「頭子」，他很會爬山，很有山感，是台大登山社嚮導組的一員，我大三加入登山社，跟他們去過玉山，秀姑巒山。研二的寒假，我隨他去中橫爬一座山，夜宿環山部落時，天冷，他又吃壞肚子，山爬不成，就臨時起意去武陵農場，傍晚

剛進武陵山莊的大廳，就見兩位漂亮的女孩在吃香噴噴，熱騰騰的泡麵，我們又餓又冷，真羨慕。再上前一聊，發現圍著白圍巾的女孩是同學；台大外文系三年級法文課的同學(我選修他們班的法文)，也就是我未來的太座大人。

有天中午，在中研院聽完太平演講，一起吃便當時，太平突然說，他想找一些美國大數學家來台灣開會，要聽聽我們的意見。我們提出了一些人選，並半開玩笑地說找丘成桐來。除了太平之外，我們都沒看過丘成桐。問太平丘成桐長的怎麼樣？他說，丘長的「方面大耳，虎背熊腰」走起路來「龍行虎步，威風凜凜」望之不怒而威，簡直是個從三國演義走出來的人。談到開會地點時，太平說在交大辦，國順當時是所長，阿壁跟我看著他三人一起苦笑，然後國順就說「好啦」。會議名稱就訂做「中美偏微分方程研討會」，而國順是台灣的召集人。

過了一段時間，太平來信說他獲得美國國會同意資助的計畫，美國代表團有六人，Jame Glimm, Paul Rabinowitz, Daneil Stroock, Luis Nirenberg, 他自己，還有一個不可能的人—丘成桐。時間訂在 85 年 5 月。台灣代表六人就由太平及國順去挑。作為台灣偏微分方程的一員，除了努力在老本行 Bifurcation 問題多加油外，知道 Nirenberg 要來，就趕緊去找他最近的文章，其中一篇是他與 Brezis 合作在有界區域 critical exponent 時的著名文章。二、三年很快就會到。

(II)中美偏微分方程研討會(85)

85 年 5 月，依規劃，在新竹交大舉辦中美偏微分方程研討會，當年新竹沒有好旅館，我們就安排美國代表團住在台北仁愛路四段新開不久五星級的福華飯店，再包遊覽車天天載他們來新竹開會。

開幕時，在交大郭校長祝歡迎詞後，由太平依序介紹美方代表，他說「This is Prof. Glimm, research area, Hyperbolic PDE」，接著「Prof. Rabinowitz, Bifurcation Theory」，再接著「Prof. Stroock, Probability Theory」，輪到介紹 Nirenberg 時，太平說「Prof. Nirenberg, Mathematics」，最後介紹丘成桐時，太平用中文說「這是丘成桐」。

美國大師們的演講都很精采，台灣代表既緊張又興奮，但就像過河卒子，只能向前。最後總算順順利利完成會議。會後國順及清華的王懷權教授決定要做橢圓偏微分方程。

當時恰好是我當應數系的系主任(82-85)，美國學者有問題就會先來找我。以下就記一些還記得的事，

(1) 與 Nirenberg ,

- (a) 開幕當天下午，Nirenberg 與我在聊天時，突然問我：“Tai-Ping said mathematics to me in the opening. I don't know Chinese, but he didn't say anything to Yau.”，我說“Everybody knows Yau. He is a hero. He broke the psychological barrier of Chinese people. People know they can do good mathematics now.”，聽後他點點頭。
- (b) 我很好奇這些大數學家怎麼會來這鳥不生蛋的數學荒漠，就問他“Why are you here? You are in desert.”，他說“ We like mathematics develops.”。
- (c) 再有一次談到世界各地的數學發展時，他說「 Beijing will be a center of mathematics in the 21 centry 」。那時是 1985 年，他已經看到未來。
- (d) 他很體貼。例如，有天中午用過午餐，他說想去散步，因此我陪他與日本的 Yamaguti 教授(他應林紹雄之邀在台大訪問)走過交清小徑，到清華湖邊走走。Yamaguti 很客氣，經常走在他後面，Nirenberg 一發現就馬上等他，與他並行，並把話題轉到與 Yamaguti 有關的方面。

(2) 與 Rabinowitz ,

Rabinowitz 是 bifurcation theory 這一行公認的大師。之前，我已申請到國科會出國進修的資助，預定暑假之後到 Madison 訪問他一年。有天，二個人在聊天時，我想把在大會報告中所提到的問題拿來請教他，“I have some difficulty in bifurcation problem when the parameter is large.”，他說，“That is your problem.”，我有些錯愕，交談立即中止。

他的回答有如禪宗大師，一語雙關，我當下立即明白：「自己的問題，就要自己解決」。從此，我拋棄依賴心，不再寄望朋友，學生或合作者去解決自己想解的問題。

(3) 與丘成桐，

初見丘先生，果然如太平所述，龍行虎步，不怒而威。但與他接觸後，發現他相當親切。丘先生一直是媒體記者與學者的焦點。替他安排的幾場記者訪談，主題皆在數學和台灣數學現況及未來發展。那二天，報紙對他的成就有大篇幅的報導。現在，台灣學界都知道丘成桐正在台灣。數學變成新聞談論的一個主題。

丘先生不參加會後的遊覽，他臨走前跟我說，“什麼時候來美國走走，到 San Diego 來看我”。我回答他，暑假過後全家要到 Wisconsin 的 Madison 住一年。他說，Wisconsin 太冷，San Diego 溫暖舒適，對家庭較

好，並邀我轉到他那邊去。在經過國科會同意後，我於(86-87)轉到 U.C. San Diego。正如丘先生所說的，San Diego 很適合居家，我們一家在那很愉快的住了一年。

會後，我們安排了一個三天二夜的旅遊行程，由台北出發，經蘇花公路，太魯閣，天祥，中部橫貫公路，梨山再回台北。沿途風景秀麗，賓主盡歡。臨別前 Nirenberg 跟我說，”I should ask Wei-Ming come back and see your people.”。

(III)倪維明在清華的橢圓偏微分方程課程(87)：

87 年春天，我從 San Diego 到 Minneapolis 去看維明，想當面邀請他回台灣到交大訪問。維明的大哥維斗是物理學家在清華服務，二哥維誠與交大的吳培元及郭滄海二位教授在台大數學系同班(高我一班)，維誠曾在交大服務多年，後來再返美工作。維誠做計算數學，也是武術高手。之前在交大就多次聽維誠提及他這個 Nirenberg 高足的三弟。當然，維明與 Nirenberg 的對稱定理早就名聞遐邇。維明在台大數學系時小我二屆，我大四微分幾何被當，先去當一年的兵，回來重修微分幾何時與他一班，並同年拿到畢業證書，說來算是同屆畢業的同學。

在維明家時，倪太太也在場。談到回台灣訪問時，倪太太馬上說「回清華」。維明才笑著對我說他太太是清華數學系的畢業系友。原先 Nirenberg 是要他到交大訪問，但那就這樣吧。在他太太離開客廳時，維明說，他接到清華王懷權的邀請函，但他不認識王懷權，所以尚未回信，問我王懷權這個人怎麼樣，我說，王懷權是個好東道主，可以信任。他點點頭說，那就去清華。知道他預定回台灣的時間是我剛好要回母校 Heriot-Watt 訪問，無法參加，因此當面向他致歉。

維明在清華給了一個完整的橢圓偏微分方程課程，在懷權的幫忙下編印成書，名為”Some Aspects of Semilinear Elliptic Equation”，Nirenberg 很滿意這本書，他的學生李岩岩曾寫信跟我索取。我的國外友人來交大訪問時，我都會送他一本(當時沒有版權的觀念)。當然，在台灣要念橢圓 PDE 的研究生都要念這本書。今天，在台灣做橢圓 PDE 的學者應該都曾經在這本書下過苦功。維明真是造福咱們不淺。

維明認識許多(若非所有)日本重要的橢圓 PDE 學者，他很積極地安排我們去認識最鄰近台灣的先進研究社群。他是台灣與日本橢圓 PDE 學者密切交流的主要推手。

(IV)京都大學 RIMS 的偏微分方程研討會(88 及 89)：

透過維明的推薦，鄭國順，王懷權與我三人，應日本 Takashi Suzuki 教授之邀到京都大學的 RIMS 參加日本國內的 Conference on Solutions of Nonlinear Equation(July 12-15, 88)。當然維明也在場，且是主要的演講者。他很熱心，幫我們一一介紹他熟識的學者，89 年(Aug 30-Sep 2)我應邀再度出席會議。跟日本的一軍更熟悉，如以下的同輩學者，

- ① Yoshikazu Giga(Hokkaido)
- ② Hiroshi Matano(Tokyo)
- ③ Masayasu Mimura(Hiroshima)
- ④ Yasumasa Nishiura(Hokkaido)
- ⑤ Mitsuharu Otani(Waseda)
- ⑥ Takashi Suzuki(Osaka)
- ⑦ Izumi Takagi(Tohoku)
- ⑧ Shoji Yotsutani(Ryokoku)

及較年輕的學者 Shuichi Jimbo(Hokkaido)及 Eiji Yanagida(Tokyo Institute of Technology)。

以後，台日經常互訪。每隔一、二年我都會去日本找他們一些人。89 年維明在日本就規劃好要辦中日研討會，因此在 90 年(Dec 3-7)就由維明，長壽，我及日本的 Mimura 在中研院數學所辦第一屆 Sino-Japanese Joint Seminar on Nonlinear PDE's with Emphasis on Reaction-Diffusion Aspects。

第二屆日-中會議分二次，第一次在 94(Jan 10-14)京都，第二次在(July 25-29)京都近郊的龍谷大學，由 Shoji Yotsutani 主辦。

被日本學者邀請與會並不容易。他們制度與我們不同，我們請國外學者來，可向國科會申請補助他們的生活費(甚至機票)。當年日本學者辦的會，是由他們眾人集資補助我們，可見維明在日本學界的影響力。與日本學者來往，除了學問交流外，還可學到很多東西，下面就介紹互動較多的幾個學者：

(1) Yamaguti(京都大學及龍谷大學)，

Yamaguti 教授是日本應用數學界的祖師爺，前述畢業於京都大學的學者幾乎都是他的學生。第一次看到他是他應林紹雄之邀到台大數學系講一系列與混沌有關的函數理論。

之後，又有多次機會與他長談。他告訴我戰後日本偏微分方程的研究有二個主要領導人，他是其中之一。當時他們研究方向走到一個分歧口，另一位領導人選擇發展線性理論，而他選擇走非線性方程並與應用數學(含物理，化學，工程計算，等.....)結合。為此，他收不同科系畢業的學生來念碩，博士。如 Mimura 及 Nishiura 皆來自工科。更重要的，身為領導者，為了儘速擴大到應用數學各個面向的發展，他把自己定位為應用數學各領域

的「先行者」或「領路人」。他考察國際潮流，就定出幾個日本該發展的領域，並以五年為一期逐漸轉行。譬如，他看好 Reaction-Diffusion 的未來，就自己先跳下去做個二、三年，等到弄清楚該領域的重要問題後，再帶二、三個京大的博士生下去做。過二、三年，等這些學生能自己上手後，他再轉去開發另外一個新領域。二十年下來，他開拓了四、五個方向，也培養一群在不同領域的學者。今天日本能在非線性偏微分方程多方發展，是他奠定的。

當一個開拓者，他沒空深入特定領域，也幾乎沒有在某些特定領域留下大定理或大結果。但是，跟日本朋友提到他時，對方都會敬稱「Yamaguti sen sei」或「先生」，許多學者說他做的事都跟大家不一樣。

他家族是京都西本願寺信徒，龍谷大學是西本願寺成立的大學。他從京都大學退休後找 Yotsutani 等人去成立名為 Department of Applied Mathematics and Informatics 的應用數學系。

90 年 ICM 在京都舉行。我去參加大會並到龍谷大學的 Otsu(大津)校區看他，在吃飯時，他突然問我；”這麼多年來，有一個問題我一直想不通，就是日本做為大部分人是佛教徒的國家，怎麼會發動第二次世界大戰”。我很久以前就想過這個問題，就跟他說我的看法：”神道是日本的傳統信仰，已深入人心。當神道高漲到壓制佛教的規範時，侵略戰爭就變成可能”。他想了下，無奈地說，或許是這樣吧。

後來，我們曾邀他在數學會年會(中山大學 94)做過大會報告。接著就到交大講”混沌與時尚流行”，如迷你裙的長短變化是個混沌現象。他有個做複雜動態系統的高足，京大的 Mitsuhiro Shishikura，也曾應邀來台訪問。

Yamaguti 先生曾向我說一個奇特的故事：他年輕時，他們家族的依止和尚告訴他，他在打坐時，曾經看到一些奇異的圖形在做一些怪異的運動。當時 Yamaguti 不知道大和尚說的是什麼，直到多年後，他研究混沌動態系統時，才恍然大悟，大和尚是看到碎形在做混沌運動。幾年前 Yamaguti 先生過世，日本學界給他辦個隆重的追思會。

(2) Takashi Suzuki，

在維明推薦我們去參加 RIMS 的會議時，他跟我說主辦者 Suzuki 跟我一樣也在做環上問題。那幾年我在讀過維明與 Nirenberg 的球上解對稱定理後，就去做環上對稱破壞問題。想法是由 bifurcation 出發，球對稱的解，在環變薄時如何產生非球對稱(即與角度有關)的解。用 bifurcation 方法去做時，就要去算原先球對稱解線性化方程式的固有值及固有函數。其中二維有著名的 Liouville 方程 $\Delta u + \lambda e^u = 0$ 。三維以上稱 Gel'fand 方程，是由 Gel'fand 在做 combustion 問題時考慮的方程。Gel'fand 用 phase plane 方法證明三到九維球對稱解會無窮多次的依某定點繞來繞去，十維以上，卻只有唯一解。Suzuki 當時也考慮該方程。

二維的線性固有值問題，我做了一、二年，突然在某一個晚上「如有神助」般，竟然把它的解 explicit 寫出來。因此，在二維問題就領先 Suzuki 一步發了論文。我以為二維問題做完了就去做三維以上的環上球對稱解。沒想到後來 Suzuki 用複變函數理論得到二維 Liouville 方程有更漂亮的結果。這下子我丟掉了一大片山。

更不幸地是，我在 93 年應他之邀去東京看他時，他臨時有事外出，要他的合作者接待我。我就把三維 Gel'fand 方程環上球對稱解的初步結果告訴他：挖掉一小洞的環，可以對定點繞進繞出很多次，洞越來越小，圈子會繞越多次，直到環變成球時變成繞無窮多次且不再繞出去。等到第二年春天日-台研討會在京都舉行時，Suzuki 的報告一開始就說他們解決了 Song-Sun Lin 的 Conjecture。內容比我告訴他合作者多不了太多。他講完，我在上前致意時，略帶不悅的問他，他合作者沒告訴他，他們前面的結果是我去年訪問他時告訴他合作者的嗎？他很不好意思地說沒有，他說他的合作者說是他自己做的。一時間我們相對無言。我真是「人財兩失」，不僅掉了一篇文章，更糟糕的地又減損了友誼。Suzuki 是個正派的人，我不該急躁的去質疑他的誠信。

許多年後，長壽在研究二維 Liouville 型的 bubbling 現象，有更深刻的發現。做學問真是依個人境界去決定你能看到什麼，下面再說吧。

(3) Mitsuharu Otani ,

第一次到京都開會 Otani 就帶我去看妙心寺，他也向我介紹日本的曹洞宗(禪宗始於達摩東來，興盛於中國隋唐。有五家七宗。目前僅剩二大宗派：臨濟宗及曹洞宗，皆出自六祖慧能大師們下。唐宋時又東傳日本，並在日本在地化)。Otani 在 Waseda 大學，去東京時，我經常會去看他。他告訴我在大東京地區，東京大學之外的私校做 PDE 的學者有二，三十人會在每個禮拜六全天開討論會，晚上再找一家酒店喝個痛快。用這個方式，私校教授們互濟互助，一起成長。

日本當時已經「南進」，他自己前後就幫助幾個菲律賓大學講師來唸博士學位。每年都會花幾個禮拜時間自費到菲律賓去帶老學生及找新學生。

他太太是個醫生，很忙，又賺很多錢。他需要做家事，煮飯做菜。這事經常被他的朋友取笑。我問他，他卻怡然自得，笑得很開心。

(4) Shoji Yotsutani ,

此外，我經常會去看的朋友還有龍谷大學的 Shoji Yotsutani。我們女兒結婚時，他剛好帶太太來中央大學開會，我們請他夫婦來參加婚禮，台式熱鬧開心的婚禮，讓他們大開眼界，入境隨俗，他們也包了一份大紅包。

(5) Yoshikazu Giga ,

目前在東大 Giga 的年紀比我們朋友都小，但出道很早，94 年一月在日-台京都會後，我應他之邀赴札幌看他。為此還添購厚雪衣，到時大雪紛飛，積雪及膝，我這輩子沒有這麼涼快過。後來他也多次來台開會或訪問。

(6) Izumi Takagi，

維明多年合作者，東北大學的 Izumi Takagi，是個典型重友情的人。他知道我 90 年要到 ICM 開會，特別南下京都來看我。長壽曾經邀他去訪問中正大學，順道來交大訪問幾天，他帶了太太小孩來，小孩在新竹剛好感冒發燒，很著急。我太太帶他們去看熟識的醫生後，就穩定下來了。311 海嘯前二年，我與太太去福島玩，再去看他。大海嘯來時，他有幾天失聯，最後接到 Shoji 的 e-mail 說他闔家平安，只是太震驚了，暫時不與外界聯絡。患難見真情，台灣人對日本大災難時的友誼與真情，他們是感受到了。

(V) 丘成桐在清華(91-92)：

91 年，清華的劉兆玄校長禮聘已在哈佛的丘先生到清華訪問一年。

在此先說說 86-87 我在 San Diego 訪問他時的見聞。86 年上學期，他到 Austin 去，因此較少見到他。我就去聽 R.Schoen 的 Harmonic maps 及 R.Hamilton 的 Ricci flow。晒得紅紅穿短褲的 Hamilton 常在課堂上提到”若這個可證明，則 Poincare' Conjecture 就出來了”，或”若這個可以排除，則 Poincare' Conjecture 就出來了”。下課後，他就到 La Jolla 海邊去戲浪。

在 San Diego 我見到了林長壽，Nirenberg 曾跟他提過到台灣的事，因此長壽知道有我這個人。他問我正在做什麼問題。我跟他說，在做與 Nirenberg 及與 Brezis 工作有關 critical exponent 時 \mathbb{R}^n 的球對稱解問題。他聽了很感興趣，要我仔細講給他，我把這二、三年的成果跟他說，講了二、三次後，我就知道，他了解的比我多了。接著下來二個禮拜我們天天討論，這時，他就在帶著我跑。有天，他身體看來有點不舒服的跟我說，”我已經很用力的想了兩個禮拜，現在頭都痛了，你要剛快跟上來”，我想我已經很用力啦！他又說：”我常常拼命了一陣子後，就要生病了”，最後，我們得到了一些漂亮的結果。藉這個問題，我看到當他碰到一個深刻問題時，怎麼去想，如何在無路中走出來。那三個月的合作經驗，讓我的數學脫胎換骨，終生受用不盡。

除了無法學的天生創意外，我問他，他的估計能力怎麼那麼強？他說他在台大念碩士時，想學 PDE，就自己把 Gilbarg-Trudinger 的書先讀一遍。仔細去驗證定理證明，過了二、三個月，定理證明的細節都忘了差不多後，就將書合起來把書本定理重新証一遍，看哪裡過不去，再去比較書本的證明方法及技巧。整本書做完後，再等個半年，證明細節淡掉之後，再重做一遍。這樣下來，真正有”眉角”會過不去的地方，就可以清楚地看出來，接著再去看別人怎麼走過去的。這真像金庸小說裡的周伯通在練功。

此外，我發現他經常在做「頭腦體操」，當我講一個論文給他聽時，他常先問「他們做到了什麼？」，我說以後，他想了一下再問「他們是不是用 xxx 方法做的」。通常，他猜的與別人做的經常八、九不離十。若有不同再來做仔細比較。再試試看能不能得到更好的結果。好文章可以拿來參考，也可以拿來自我鍛鍊。

跟長壽熟了後，有一天很好奇的問他，他怎麼做出” Isometric Imbedding Theorem ”來。他說事出偶然，有天他去找 Nirenberg，在 Nirenberg 的研究室看到 Nirenberg 正與其博士後在討論 Isometric Imbedding 問題，他就坐在旁邊等，看著他們的討論，覺得他們的「看法很不自然」。回去後，就想去找一個「自然的看法」做這個問題，幾個禮拜後就真的做出來，這時連 Nirenberg 都嚇一跳。長壽說，”每個數學問題，應該都有個自然的看法。我們做數學就是要找到這個自然看法”。他常說，”不要亂挑問題做，那是在浪費生命”。

之後，我在想，像我這種天分普普的人怎麼去發現一個「自然的看法」呢？有天唸到寂天(佛教大師，入菩薩行的作者)的”未得熟悉親切之前，不曾見有易與之事”後有了體會：就把待解的數學問題當作朋友，不再把它當作攻擊對象，慢慢跟它熟悉、親切之後，看看它能否把真面目露給你瞄一眼。因此 87 年回台灣後，就連教二次 Gilbarg-Trudinger，先蹲馬步練功，再去找要緊又困難的問題來做，讓困難的問題帶我成長。但是境界不同，同一件東西，不同的人看到的也不一樣。就以 Liouville 方程為例，我，Suzuki 及長壽看到的都不一樣，而且我還是最先去看的人。

Yau 在下學期開學前，從 Austin 回來。我去上他的課，也經常接近他，但一直無法明白他怎麼做學問的，這不能只怪我。他的學問浩瀚如大海，不可蠱測。話說 70 年代他年方 20 來歲才出道時，就震撼了國際學界。一些西方學者急著知道像他這樣的中國人有多少？最後發現就只有他一個，這才放下心來。因此，我就談一下他與學生的互動吧。

我參加了 Yau 與學生的第一次 meeting，十來個大陸與台灣來的學生，翁秉仁與高淑蓉也在場。Yau 列了這學期要唸的文章分配給學生做報告。Meeting 時，Yau 都在場，學生也經常講得頭頭是道。對學生，Yau 是超有耐性的。課堂上，從沒有聽過他說過一句重話。他的 meeting 我是真的努力去了幾次，還是有聽沒有懂。有次問翁秉仁，你們怎麼這麼厲害，文章都看得懂，說的出來？秉仁說他們會三三、二二的組成討論班一起把論文先唸懂，再上場，否則憑一個人之力那有辦法啊。後來，Yau 跟我說他決定到哈佛長待的一個重要原因是哈佛的學生都夠優秀，又能自己積極主動組討論班一起前進。

在 San Diego，Yau 常帶學生們去他家，經常一次就來了十幾個，也夠熱鬧

了。大家在他家又吃又喝談得好開心，師母也經常在場。當今有好幾個重量級學者的他的高足，更是把他家當自己家一樣。Yau 家學淵源，看他尊翁的”丘鎮英教授文集”就可看到他尊翁待學生如子女。Yau 也是如此，當他的學生，就是能盡情享受他的關愛與提攜。回台灣以後，面對自己的學生，當我的「豬肚臉」要翻出來時，經常會浮起 Yau 在課堂上的這一幕，自己何德何能可以去生學生的氣？

91 年，Yau 在清華講幾何分析的一些論文。前幾堂聽眾多一些，接下來的主力只剩下做幾何的呂輝雄、張樹城和他們的學生，做方程的只有我和我的學生。課堂上，Yau 經常提問題，甚至指名說「xxx，這個問題你可想想」。張樹城被眷顧最多次，我也被點到三、四次，是純粹偏微分方程問題，但都做不出來。做不出來，頭垂低一點進教室就是，反正他也不會繼續追究。

中間他花了三、四堂課講長壽的 Isometric Imbedding Theorem，他手拿長壽的論文，第一堂講完時，突然問我「林松山，你看 CS 的東西，在歷史上會不會留下來？」，我點點頭，下個禮拜第二堂課講完後，他再問一遍，「林松山，你看 CS 的東西留得下來嗎？」，我更用力的點更多的頭。最後，第三堂課結束時論文也講完了，他下個結論「CS 的東西，會留下來」，這時大家都鬆了一口氣。這一年在清華呂輝雄及系主任賴恆隆竭盡全力讓丘先生一家人生活得很愉快，看起來 Yau 也很滿意。

92 年 9 月我應 Nirenberg 的推薦來到墨西哥的 Xalapa 開會，Nirenberg 知道 Yau 在台灣待了一年，他問我說：「It must be very crowded in Yau's lecture」，

我說：「Not really, only a dozen people showed up」。

面露不可置信的神情，

他說：「It is better sleeping in Yau's lecture than working in your office」。

記得禪宗大師說過：「寧可在大廟睡覺，不要在小廟辦道」就是這個意思。

後來他又問我：「How is CS?」，

我說「He has been working on a difficult problem and in a bottle-neck」，

長壽那時正在阿里山下吹泡泡(bubbling)但未完全成形。

Nirenberg 接著說「Tell him, do what you can do!」。

回台見到長壽後，我有把話傳到。

臨別時向他說「Hi, Luis, every time I see you, I learn a lot from you」，

他笑著說「You exaggerate!」。

僅以此文衷心感謝劉太平，Nirenberg，倪維明及丘成桐四位先生，接續在這十二年中替我們開門。讓我們在還年輕的時候有機會找到新路，因而重塑未來。

(交通大學賴冠宇打字)