Homework 1

2009.3.2

5.

(a) (i) 用矩陣表示動作

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \alpha_3 = \alpha_1$$

$M = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha^2 = I,\ \alpha_1\alpha_2\}$

M 是一個群。

(ii) 考慮 $(\mathbb{Z}_2 = \{0,\ 1\},\ +)$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

狀態就是 $\alpha\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \alpha + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$M = \{x\alpha + y\beta \mid x, y \in \mathbb{Z}_2\}$

(b) (i) 令其 moves 爲三個 functions $f_1,\ f_2,\ f_3$.

$\{\ a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3} \ldots a_k^{n_k} \mid a_i \in \{f_1, f_2, f_3\}, n_i \in \mathbb{Z}\ \} = \{\ f_1^{n_1} f_2^{n_2} f_3^{n_3} \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$

$f_i^2 = e \Rightarrow \mid M^+ \mid = 2^3 = 8$

(ii)A set S of configurations, $G = \{f \mid f : S \to S$ is one-to-one and onto $\}$

$f_1, f_2, f_3 \in G$ 可生成一個子群。Let $S = \{[\text{ a b c }]^t \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2\}$

Let $f_1 = [\,1\;1\;0\,]^t$, $f_2 = [\,1\;1\;1\,]^t$, $f_1 = [\,1\,1\,0\,]^t$, and $f_i{*}([\,a\,b\,c\,]^t) = f_i + ([\,a\,b\,c\,]^t) \Rightarrow f_i \in G$.

$H =< f_1, f_2, f_3 >= \{xf_1 + yf_2 + zf_3 \mid x, y, z \in \mathbb{Z}_2\} \Rightarrow \mid H \mid = 8$.

(c) $S = \{[\,x\;y\;z\,]^t \mid x, y, z \in \{1, -1\}\}$, 1表示黑色, -1表示白色。

定義運算:

$$L_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z \end{pmatrix}, L_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y \\ yz \end{pmatrix}, L_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ yz \\ z \end{pmatrix},$$

$\{\ a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3} \ldots a_k^{n_k} \mid a_i \in \{L_1, L_2, L_3\}, n_i \in \mathbb{Z}\ \}$ and $L_1^2 = L_2^2 = L_3^2 = I$, 接著驗證群的特性即可。

(d) 直接驗證 (c) 可得出 (c) 非 abelian。

(e) 定義:

$$L_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ z \end{pmatrix}, L_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \\ yz \end{pmatrix}, L_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix},$$

要驗證結合律, 需要驗證二十四種可能性, 這是符合的, 故爲 semigroup。

這不是一個 group, 因爲:

$$WBW \xrightarrow{L_1} BWW$$

$$BWW \xrightarrow{L_1} BWW$$

其中 B 代表黑色,W 代表白色。

(f) 定義:

$$L_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y \\ z \end{pmatrix}, L_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ xyz \\ z \end{pmatrix}, L_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ yz \end{pmatrix}。$$

Let $L^* = \{a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3} \ldots a_k^{n_k} \mid a_i \in \{L_1, L_2, L_3\}, n_i \in \mathbb{Z}$。

(g) 驗證 (f) 中,$f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$ 即可。