用模型來解決問題—
組合數學與代數

為解決複雜的問題，數學家常常會運用符號，將問題轉換成簡單的數學式。本文以點燈問題為例，介紹如何運用圖形與線性代數建模，來幫助解題。

翁志文

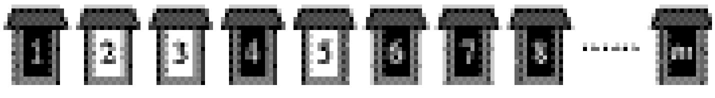
中學生最先碰到的代數問題，可能是利用未知數x、y等符號，將「雞兔同籠」此類生活上的問題寫成數學式（此過程稱為「代數建模」），然後求解。好的代數建模不但容易理解，也有助於解題。在工程應用上，一個代數建模可能出現一萬個未知數，因此盲目利用電腦去求解是不可行的。通常我們必須為這些未知數安排某種組合結構，然後利用此結構去解釋代數建模的正確性及一般性，同時也看出如何簡化求解步驟。

本文試著以一個「點燈問題」為例，來看它的「組合模型」如何給人數學的直觀，以利推廣，並且探討「代數模型」如何幫助求解。文中將出現一些線性代數及組合數學的名詞，我們將試著以口語解釋或舉例，讓未學過這些名詞的讀者能明瞭；另一方面也希望僅從教科書學過這些名詞的讀者，在讀完文章後，能感受它們對解題的幫助，而有更深刻的印象。最後我們將介紹點燈問題與代數中「群論」研究的關聯，及將來可能的研究方向。

點燈問題

假設有 m 個房間排成一直線，其中有些房間燈亮，有些房間燈暗。每一個房間都有一個控制燈的開關，這個開關能同時改變所有相鄰房間的明暗，但無法改變不相鄰及這個開關本身所在房間的明暗。現在有一個人，他每走進燈暗的房間，就會動一下開關，去改變相鄰房間燈的明暗，而且他只在走入燈暗的房間時會去改變開關。試問他能把所有暗的房間的燈都點亮嗎？這個答案很明顯是不可能的，因為每次他動開關的時候，他所在房間的燈還是保持暗的。

另一個問題是：能夠只留下一個房間燈暗，而點亮其他所有房間的燈嗎？以下稱此問題為「點燈問題」。換句話說，點燈問題是問：如果剛開始 m 個房間中至少有一房間是暗的，最後能剛好點亮 $m-1$ 盞燈嗎？看點燈問題的解答之前，讀者可以試解底下圖一的情形。

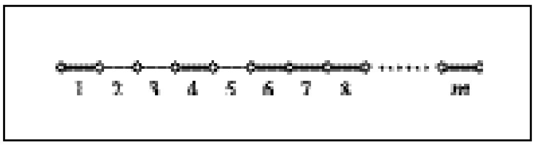


圖一：m 個房間排成一列，其中只有 2、3、5 號房是亮的。

圖型建模

對以上的點燈問題，我們可以用 $m+1$ 個點和 m 條邊所構成的直線圖型，來描述這些房間的相鄰關係。此時邊代表的是房間，而每條邊的兩端都各有一個點，且不同

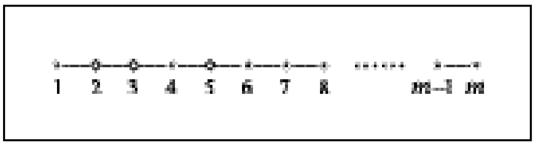
邊可共用點；當兩邊共用一個點，表示它們所代表的房間相鄰。我們還可以用邊的粗細分別表示房間的暗明（粗是暗、細是明），如圖二。



圖二：以邊為房間的圖型建模。

這種以「邊」代表房間的圖型，能推廣到許多種房間相鄰的狀態，但無法描述所有的情形——像是一個房間連接到其他三個獨立房間的情形便無法作圖。讀者試試看能否畫出一個有四條邊的圖型，其中三條邊兩兩不能有共用點，但每一邊又必須與第四條邊有共用點。

點燈問題的另一種圖型建模是以「點」為房間，兩點以邊連接代表房間相鄰，並以點的虛實分別代表房間的明暗，如圖三。



圖三：以點為房間的圖型建模。

不管房間相鄰的狀態如何，都能以點為房間的圖模型來表示。讀者應該可以輕易地畫出上述「四個房間為點，僅以一個房間連接到其他三個獨立房間」的圖模型。此時讀者亦可想想看，自己喜歡哪種模型。稍後讀者會發覺，以邊為房間的圖模型在求解時較直觀，也能領悟「圖模型」是一種很有用的「組合模型」。

線性代數建模

點燈問題的另一種建模，是以一個只填入0、1兩數字的 m 維向量，來代表 m 個房間的明暗狀態，其中 0 代表燈亮，1 代表燈暗。圖一的例子中，所有房間只有 2、3、5 號三間房間燈亮，因此向量建模如下：

$(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1,..., 1)$

如果房間不是剛好排成一直線，這一種建模沒辦法看出房間的連接關係，所以必須有圖模型輔助。

向量在數學運算上扮演很重要的角色。我們用符號 F_2 表示 0 和 1 的集合（$F_2=\{0, 1\}$，表示燈亮與燈暗的集合），並賦予自然的加與乘兩種運算，但為保持加法的封閉性，所得結果必須「模2」(除以2取餘數)，即 $1+1=0$。然後以 F_2^m 代表收集係數布於 F_2 的 m 維向量所形成的集合（即前述的向量建模，可表示各房間的明暗狀態），並賦予 F_2^m 上有一般向量的加法。值得一提的是，對所有向量 $u\in F_2^m$，都有 $u+u=0$。

點燈問題中的點燈動作是有條件性的——只操作黑暗房間中的開關。現在我們把點燈問題換個方式詮釋：不管房間明暗，都能改變房間的開關，只是當操作到亮的房間時，開關不會有任何改變，而操作到暗的房間時，就如同原本的設定。這種詮釋並未改變原來的問題，但讓底下的論述較清楚：改變第 i 個房間的開關是一函數

$f_i: F_2^m \to F_2^m$ (表示經由 f_i 作用後，各房間的明暗狀態會產生改變，即 $F_2^m \to F_2^m$)

換句話說，f_i 將每一 F_2^m 中的向量 u，唯一映射到 F_2^m 中的向量 $f_i(u)$。試驗證底下 f_1 作用下的三個例子：

$f_1(1, 1, 0,..., 0) = (1, 0, 0,..., 0)$

$f_1(1, 0, 0,..., 0) = (1, 1, 0,..., 0)$

$f_1(0, 1, 0,..., 0) = (0, 1, 0,..., 0)$

最後一個例子中 f_1 所作用之向量 $(0, 1, 0,..., 0)$ 的第一位置是0，所以作用後不會改變。

上述函數 f_i 還是一個「線性變換」。也

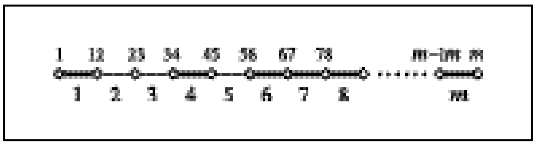
就是說，對任意 $u, v \in F_2^m$ 都滿足 $f_i(u+v)=f_i(u)+f_i(v)$。如前面三個等式告訴我們

$$f_1(1, 1, 0,..., 0) = f_1(1, 0, 0,..., 0) + f_1(0, 1, 0,..., 0)$$

線性變換的性質告訴我們，只要知道 f_i 如何作用在 m 個「線性獨立」的向量，就能夠知道它如何作用在 F_2^m 中所有 2^m 個向量。讀者若了解線性變換與「矩陣」的關係，可以試著寫下 f_i 的矩陣表示法。利用矩陣、向量及矩陣作用向量的方式來詮釋問題，稱為「線性代數建模」。線性代數建模是代數建模的特例。讀者若認為代數建模一定要出現未知數，可以把上面的向量集 F_2^m 視為 m 個未知數的向量 $(x_1, x_2,..., x_m)$。

向量與排列

以邊為房間的圖型建模是我們底下討論的基準。為加深印象，讀者最好放慢閱讀的速度，並準備一張白紙來驗證這一節的每一敘述。為了描述方便，我們依序用符號 1, 12, 23,..., $m-1m$, m 來標示圖二的各點，而得到圖四。



圖四：加上點標號的圖二。

接著對每一點 a，以 e_a 代表點 a 連出去的那些邊的向量表示。如圖二的例子有 $m+1$ 個點，便能得到底下 $m+1$ 個向量：

$e_1 = (1, 0, 0, 0,..., 0, 0, 0)$（僅 1 號房為暗）

$e_{12} = (1, 1, 0, 0,..., 0, 0, 0)$（僅 1、2 號房為暗）

$e_{23} = (0, 1, 1, 0,..., 0, 0, 0)$（僅 2、3 號房為暗）

$\vdots$

$e_{m-1m} = (0, 0, 0, 0,..., 0, 1, 1)$（僅 $m-1$、m 號房為暗）

$e_m = (0, 0, 0, 0,..., 0, 0, 1)$（僅 m 號房為暗）

接著考慮收集這 $m+1$ 個向量的集合 $S=\{e_1, e_{12}, e_{23},..., e_{m-1m}, e_m\}$，為方便描述，稱 S 為「純集」。我們先研究 f_i 如何作用在 S 中的向量。如果 a、b 是 i 這條邊兩端的點，則改變 i 號房開關的函數 f_i，會是 S 上的一個「置換」——f_i 會對調 e_a 與 e_b，且保持 S 中其他向量不變。例如考慮 f_2 作用於 S 上，即 $i=2, a=12, b=23$，所以得到置換

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_{12} & e_{23} & e_{34} & \cdots & e_m \\ e_1 & e_{23} & e_{12} & e_{34} & \cdots & e_m \end{pmatrix}$$

式中上排表示置換前，下排則表示置換後的結果。

將 f_i 視為某集合上的置換，是採用邊為房間的圖模型之獨特優點。接下來觀察：所有 S 上的「排列」都能經由一連串不同邊 i 的置換 f_i 而得到。如 e_1、e_{12}、e_{23} 三者依序的「循環排列」

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_{12} & e_{23} & e_{34} & \cdots & e_m \\ e_{12} & e_{23} & e_1 & e_{34} & \cdots & e_m \end{pmatrix}$$

能由 f_2 及 f_1 兩次動作得到，可以下列數學式來表示：

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_{12} & e_{23} & e_{34} & \cdots & e_m \\ e_{12} & e_{23} & e_1 & e_{34} & \cdots & e_m \end{pmatrix}$$

$= f_1 f_2$（由右到左，先經過 f_2 置換，再經過 f_1 置換）

$$= \begin{pmatrix} e_1 & e_{12} & e_{23} & e_{34} & \cdots & e_m \\ e_{12} & e_1 & e_{23} & e_{34} & \cdots & e_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_{12} & e_{23} & e_{34} & \cdots & e_m \\ e_1 & e_{23} & e_{12} & e_{34} & \cdots & e_m \end{pmatrix}$$

因為 S 上的排列就是從 S 映至 S 的一對一映成的函數，讀者只要將上式等號兩邊的函數分別作用 S 中每一向量，看兩邊所得的結果是否一樣，便能驗證此等式。此外，我們定義的純集 S 能生成 F_2^m 中所有的向量，如 $(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1,..., 1)$

$$=\begin{cases} e_1+e_{45}+e_{56}+e_{78}+e_{910}+\cdots+e_{m-1m}, & \text{當 } m \text{ 是偶數時；} \\ e_1+e_{45}+e_{56}+e_{78}+e_{910}+\cdots+e_{m-2m-1}+e_m, & \text{當 } m \text{ 是奇數時。} \end{cases}$$

讀者可試著以 $m=9$ 及 $m=10$ 代入計算，就會發現確實如此。

以這個例子而言，向量(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1,⋯,1)能寫成$[\frac{m+1}{2}]$個S中元素的和，而排列的特性告訴我們，此向量被一連串的開關函數 f_i 作用後，還是能寫成$[\frac{m+1}{2}]$個S中元素之和。在這裡要注意的是S不是F_2^m的「基底」，因為F_2^m中的向量不是由S唯一生成的。事實上，

$$e_1+e_{12}+e_{23}+\cdots+e_{m-1m}+e_m=0$$

所以在將F_2^m中向量寫成S的線性組合時，任何一個出現的向量都能換成此向量以外的其他向量之和。

求 解

由以上的討論我們知道，如果$u, v\in F_2^m$代表房間明暗狀態，則u能經由一連串開關動作得到v，若且唯若u、v能寫成S中相同個數的向量之和。因此點燈問題變成，是否對每個$1\leqq k\leqq m$，都有k個S中向量，而其和只有唯一坐標是1。由底下式子知道這答案是肯定的：

$$e_1+e_{12}+e_{23}+\cdots+e_{k-1k}$$
$$=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0),$$

此處 1 是在第 k 個位置。

點燈問題的推廣

對於 m 個房間以其他方式連接的情形，只要能以邊為房間來畫一個圖型，我們都能模仿上面的作法來解這個點燈問題。同樣地，對每一點a，以e_a代表點a連出去的那些邊的向量，並令純集$S=\{e_a \mid a\text{為點}\}$。

如此一來，和前例一樣，對每一兩端為點a、b的邊i，改變房間i的開關會是一個函數$f_i: F_2^m\to F_2^m$，而f_i侷限到S上考慮，如前述一樣是一個只對調e_a與e_b的置換函數。我們要假設這些置換函數能生成S上所有的排列，而一個「連通圖」能滿足此假設。事實上若圖不連通，我們仍可就每一連通部分單獨討論，再合併結果即可。我們還要假設純集S上有夠多向量能生成F_2^m中所有向量（如假設點比邊多），如果圖型中沒有「迴圈」便能滿足此假設。

一個無迴圈的連通圖稱為「樹狀圖」。假設以房間為邊能組成一樹狀圖，我們一樣可得到：如果$u, v\in F_2^m$代表房間明暗狀態，則u能經由一連串開關動作得到v，若且唯若u、v能寫成S中相同個數的向量之和。再應用此結果對個別圖型討論：是否對每個$1\leqq k\leqq m$，都有k個S中向量，其和只有唯一坐標是1。如果再多一點細膩的技巧，甚至連樹狀圖的假設也不需要。

如果房間無法以邊的方式排成一圖，那就只好以點的方式排成圖型。此情形目前還沒完全解決，但上述的部分想法仍適用。我們雖然不知如何找純集S，好讓開關動作在S上能單純些的一般方法，但對特殊圖型仍有辦法。在前述的例子，那些開關能生成S上的所有排列（以群論語言，即生成S上的「對稱群」），但在其他的情形，只能說這些開關生成某種「正交群」的子群，因此正交群的知識有助於求點燈問題的解。此外，我們雖已證明了點燈問題，但若再問有幾種方式能以固定的步驟數完成此要求，那就是「計數組合」的問題了。

最後要跟讀者分享點燈問題的一個特性

與其應用：每給一種房間明暗的起始狀態，最後能剛好點亮 $m-1$ 盞燈的步驟不易求得，但一旦求得，卻很容易驗證解答是正確的。因此可利用此特性設計一密碼系統，其解碼步驟就是從某一起始狀態，輸入一連串點燈的步驟，以達到點亮m—1盞燈的要求。

結 語

代數能萃取問題的數學本質，以利運算，而組合數學能提供這些運算一種直觀的解釋。所以組合數學不僅如大家所熟知的，是可以解決生活問題的數學模型，也是思考方式的模型。另一方面，組合數學能產生很多有趣但不易求解的數學問題，而有較深厚歷史淵源的代數知識則能幫助求解。代數與組合，相輔相成，是解題的利刃，也提供數學觀念反芻的樂趣。

參考資料

1. Chuah, M.K. and Hu, C.C., Extended vogan diagrams, *Journal of Algebra*, vol. 301:112-147, 2006.
2. Huang, H.W. and Weng, C.W., The edge-flipping group of a graph, doi:10.1016/j.ejc. 2009.06.004
3. Huang, H.W. and Weng, C.W., The flipping puzzle on a graph, doi:10.1016/j.ejc. 2009.08.001
4. Reeder, M., Level-two structure of simply-laced Coxeter groups, *Journal of Algebra*, 285:29-57, 2005.
5. Wu, Y., Lit-only sigma game on a line graph, *European Journal of Combinatorics*, vol. 30:84-95 2009.

翁志文：任教
交通大學數學建模與科學計算所