The q-analogue problems in different aspects

翁志文

交通大學應用數學系

正整數 n 的 q-模擬 $[n]_q$ 的定義

佈於 q 元素有限體 F_q 的 n 維向量空間 V 有

$$[n] := [n]_q := \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

個一維子空間(過原點直線)， 此處 $q \neq 1$ 是某一個質數的次方。

上式在 $q = 1$ 可詮釋為一個 n 元素集合有

$$[n]_1 = n$$

個 1-元素子集。 此外 $[-n]_q = -q^{-n}[n]_q$。

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ 的定義

令 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ 表向量空間 V 中 k 維子空間的個數。

計算 $k-1$ 維子空間與 k 維子空間有包含關係的「序對數」得到：

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q [n-(k-1)]_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q [k]_q \text{。}$$

所以

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!} \text{，}$$

此處 $[k]_q! := [k]_q[k-1]_q \cdots [1]_q$。

等差數列的 q-模擬

$$
\begin{aligned}
a_n &= A + B[n]_q \\
&= \begin{cases} (A - \frac{B}{q-1}) + \frac{B}{q-1} q^n, & \text{if } q \neq 1; \\ A + Bn, & \text{if } q = 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

上式 a_n 滿足 $a_n - (q+1)a_{n-1} + q a_{n-2} = 0$。

要不要 q-模擬

$$a_n = A + B[n]_q$$

與

$$a_n = \begin{cases} A + Bn, & q = 1; \\ C + Dq^n, & q \neq 1. \end{cases}$$

那一個比較簡潔？(見仁見智)

函數的 q-模擬

$$
\begin{aligned}
f(x) &= Ae^x(1+B[x]_{e^{q-1}}) \\
&= \begin{cases} A((1-\frac{B}{e^{q-1}-1})e^x + \frac{B}{e^{q-1}-1}e^{qx}), & \text{if } q \neq 1; \\ A(e^x + Bxe^x), & \text{if } q = 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

上式 $f(x)$ 滿足 $f''(x)-(q+1)f'(x)+qf(x)=0$。

與 q-模擬有關的數學

組合(Combinatorics)、 代數(Algebra)、 特殊函數論(Special Functions)、 數學物理(Mathematical Physics)........等。

有些情形 q-模擬被稱為量化 (quantization)。

代數

代數(algebra) 是一個向量空間， 其中向量間有自然的乘法運算。 如果這個乘法滿足結合律就稱為結合代數(associative algebra)。

自由代數

由 x, y 所生成的自由代數(free algebra)是一代數有下列基底：

$$1, x, y, x^2, xy, yx, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, \ldots$$

如果規定 $yx = xy$ 則變成可交換代數， 它的 q-模擬就是限制條件 $yx = qxy$，其中 規定 $yx = -xy$ 是一特例。

二項式定理

假設 $yx = qxy$ 則

$$(x+y)^2 = x^2 + (q+1)xy + y^2 = x^2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q xy + y^2 \text{。}$$

一般情形是

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k} \text{。}$$

$U(sl_2)$

$U(sl_2)$ 是一結合代數有三個生成元素 X、 Y、 H， 滿足下列關係：

$$XY - YX = H,$$

$$HX - XH = 2X,$$

$$HY - YH = -2Y.$$

$U_q(sl_2)$

$U_q(sl_2)$ 是一結合代數有四個生成元素 E、 F、 K、 K^{-1}， 滿足下列關係：

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1,$$

$$KEK^{-1} = q^2E, \qquad KFK^{-1} = q^{-2}F,$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

$U_q(sl_2)$ 是 $U(sl_2)$ 的 q-模擬 (不易看出)。

$U_q(sl_2)$ 的另一種 presentation

令 $L = EF - FE$ 則改寫成： $U_q(sl_2)$ 是一結合代數有五個生成元素 E、 F、 K、 K^{-1}， L 滿足下列關係：

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1,$$

$$KEK^{-1} = q^2E, \qquad KFK^{-1} = q^{-2}F,$$

$$EF - FE = L, \qquad (q - q^{-1})L = K - K^{-1},$$

$$LE-EL = q(EK+K^{-1}E), LF-FL = -q^{-1}(FK+K^{-1}F).$$

(令 $K = 1$, $q = 1$, $L = H$, $E = X$, $F = Y$，可得到原先 $U(sl_2)$。)

$U_q(sl_2)$ 的 equitable presentation

$U_q(sl_2)$ 是一結合代數有四個生成元素 x、 x^{-1}、 y、 z，滿足下列關係：

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1,$$

$$\frac{qxy - q^{-1}yx}{q - q^{-1}} = 1, \frac{qyz - q^{-1}zy}{q - q^{-1}} = 1, \frac{qzx - q^{-1}xz}{q - q^{-1}} = 1.$$

(Ito, Terwilliger, ___)

(能不能寫成 $U(sl_2)$ 的 q-模擬？)

$U_q(sl_2)$ 可看出 q-模擬的 equitable presentation

$U_q(sl_2)$ 是一結合代數有四個生成元素
x、$(x(q-1)+1)^{-1}$、y、z，
滿足下列關係：

$$(x(q-1)+1)(x(q-1)+1)^{-1} = (x(q-1)+1)^{-1}(x(q-1)+1) = 1,$$

$$xy - qyx = x + y, yz - qzy = y + z, zx - qxz = z + x.$$

($q = 1$ 就是 $U(sl_2)$ (但不是原先的 presentation)。)

歷史

$U_q(sl_2)$ 是 1981 年由 Kulish 和 Reshetikhin 提出。

推廣此建構方式，對其它李代數 g， Drinfeld 及 Jimbo 獨立的構造出 $U(g)$ 的 q-模擬 $U_q(g)$。

Drinfeld 及 Jimbo 及另外兩人 Mori, Witten 共同得到 1990 年的費爾茲獎。

論文

1. P. P. Kulish 和 N. Yu. Reshetikhin. Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. 101 (1981), 101-110

2. V. G. Drinfeld. Hopf algebra and the quantum Yang-Baxter equation, Dokl. Akad. Nauk SSSR 283:5 (1985), 1060-1064

3. M. Jimbo. A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation, 1985. Lett. Math. Phys. 10 (1985), 63-69

上雙對角、 對角 Matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & [-3] & 0 & 0 \\ 0 & [-1] & [-3]-[-1] & 0 \\ 0 & 0 & [-2] & [-3]-[-2] \\ 0 & 0 & 0 & [-3] \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [3] \end{pmatrix},$$

下雙對角 Matrix

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -[-1] & [-1] & 0 & 0 \\ 0 & -[-2] & [-2] & 0 \\ 0 & 0 & -[-3] & [-3] \end{pmatrix}$$

X, Y, Z 滿足

$XY - qYX = X + Y, YZ - qZY = Y + Z, ZX - qXZ = Z + X.$

表示理論

找 Matrices 的例子就是表示理論(representation theory)。

X, Y, Z 是 $U_q(sl_2)$ q-模擬的一組 representation ；

$X - \frac{2}{q-1}I, Y - \frac{2}{q-1}I, Z - \frac{2}{q-1}I$ 是另一組。

這兩組是所有四維的representations (不算由低維拼起來的)。

Bidiagonal Triple

如對 (A, B, C); (B, C, A); (C, A, B) 三組同大小的 matrices 中的每一組都可有一共同基底讓其變成『上雙對角』,『對角』,『下雙對角』Matrices,我們稱 (A, B, C) 是一 Bidiagonal Triple。

我們證明 $(aX + bI, cY + dI, eZ + fI)$ 是四維的所有 bidiagonal triples 的例子。也可以推廣到任意有限維。

Combinatorial Matrix Theory

指定一個 matrix 的非 0 元素所在位置來研究 matrix。一般這些非 0 位置可用一個圖來表示。

研究兩個以上的 matrices 時讓一個 matrix 可對角化就能固定一組 特徵向量當點集，再看看其它 matrices 如何作用這些點。

另一種 q-模擬

我們之前看到的 q-模擬是把 $q = 1$ 推廣為一般複數 q。

另一種 q-模擬是把 q 為質數次方情形推廣為所有可能的正整數(甚至所有數)。

有限幾何

在歐氏平面上有限條直線合起來的點也無法包含另一條直線所有的點。

在佈於有限體 F_q 的平面 F_q^2 中，任意 $q-1$ 條直線合起來的點也無法包含另一條直線的點。

群試設計問題

每給一個自然數 q，試著去找一個有限集合 P_q 稱為「點集合」，及 P_q 的某些子集合形成「直線集合」L_q，滿足 $|P_q| < |L_q|$ 及任意 $q-1$ 條直線合起來的點也無法包含另一條直線所有的點 (稱此為 (q-1)-disjunct 性質)。此問題與群試設計有關。

這個問題當 $q=1$ 是顯然的。當 q 是質數次方時已解決，因為 F_q^2 中有 q^2 個點及 $(q+1)q$ 直線。

吳欣融同學大三時解決群試設計問題 $q=6$ 情形而得到黃光明老師一萬元獎賞。

吳欣融的解答

連結

http://jupiter.math.nctu.edu.tw/
~ weng/group/references/pooling_design/wu_2001.jpg

可看到吳欣融當初的解答。

Edros, Frankl, Furedi 的猜測

Edros, Frankl, Furedi 猜測群試問題中點的個數
$|P_q| \geq q^2$。

這個猜測當 $q = 1, 2, 3, 4$ 時已被解決， 是黃曉慧 的碩士論文 (黃光明老師指導)， 當 $q = 5$ 情形是陳鵬安與黃光明未發表的論文。

可糾錯的群試設計

給 $k < n$ 兩正數。 佈於有限體 F_q 的 n 維空間中 任意 k 維仿射子空間 (affine subspaces) 都不會包含於其它 $(q-1)$ 個 k 維仿射子空間的聯集。 k 維仿射子空間有 $q^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ 比點數 q^n 多。一個額外的性質，至少會有 q^{k-1} 個點不被包含， 這可應用於可糾錯的群試設計。

(2006, Huang, Hunag, ___)

距離正則圖

直徑 d 的圖 G， 當 任取 $0 \leq i \leq d$ 及任取兩點 x, y， 滿足 $\partial(x, i) = i$，

$$
\begin{aligned}
c_i &:= |G_1(x) \cap G_{i-1}(y)|, \\
a_i &:= |G_1(x) \cap G_i(y)|, \\
b_i &:= |G_1(x) \cap G_{i+1}(y)|
\end{aligned}
$$

是三個常數時， 我們稱 G 是距離正則圖。c_i, a_i, b_i 稱為此圖的相交參數 (intersection numbers)。

Johnson Graphs

固定兩正數 $d < n$，令 G 為 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的 d-子集所形成的集合，兩個 d 子集交集有 $d-1$ 元素時，我們稱其相鄰，此時 G 會是一直徑為 d 的距離正則圖，叫 Johnson Graph $J(n, d)$。

Grassmann Graphs

固定兩正數 $d < n$ 及一質數次方 q， 令 G 為向量空間 F_q^n 的 d 維子空間所形成的集合， 兩個 d 維子空間交集是 $d-1$ 維時， 我們稱其相鄰， 此時 G 會是一直徑為 d 的距離正則圖， 叫 Grassmann Graph。 此圖為 Johnson graph 的 q-模擬。

具古典參數的距離正則圖

如果 G 的相交參數滿足

$$
\begin{aligned}
c_i &= \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\left(1+\alpha\begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) & 0 \le i \le d, \\
b_i &= \left(\begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right)\left(\beta-\alpha\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\right) & 0 \le i \le d,
\end{aligned}
$$

此處

$$
\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} := 1+q+q^2+\cdots+q^{i-1},
$$

則我們稱 G 有古典參數 (d, q, α, β)。

刻畫古典參數的距離正則圖

Theorem 0.1. *(Terwilliger 1995)* 對距離正則圖 G， 下列兩者等價*:*

(i) G 有古典參數 (d, q, α, β)；

(ii) G 的 *"dual eigenvalues"* 滿足
$\theta_i^* - (q+1)\theta_{i-1}^* + q\theta_{i-2}^* = 0$。

$q = 1$ 的古典參數距離正則圖

$q = 1$ 的古典參數距離正則圖的分類問題， 由 Y. Egawa, A. Neumaier, P. Terwilliger 在 1987 年前後分別完成。 它們是 Hamming graphs $H(d, n)$ $(n \neq 4)$, Johnson graphs $J(n, d)$ $((n, d) \neq (8, 2))$, 及 Half cubes $D_{n,n}$。 此分類與 root system 有關。

$q < -1$ 的古典參數距離正則圖

在 1999 年我們在一些假設下部分完成 $q < -1$ 的古典參數距離正則圖的分類。我們假設 $a_1 \neq 0$, $c_2 > 1$ 時，證明此類圖為 dual polar graphs, Hermitian forms graphs, 及未知一類其 $\alpha = (q-1)/2$, $\beta = -(1+q^d)/2$, 此處 $-q$ 是質數次方。我們的方法是利用一些子圖去構造 poset 及探討此 poset 的性質。

無三角形的古典參數距離正則圖

$a_1 = 0$ 的情形是博士生潘業忠的研究主題， 因此將來分類的完成也是可期待的。

$[n]_q$ 的另類定義

$$[n]_q := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

在此定義我們有 $[n]_q = -[-n]_q$。

謝謝聆聽！