

國立交通大學

應用數學系

碩士論文

廣義的 Petersen 圖的 (a, d) -反魔術標號之探討

On (a, d) -Antimagic Labeling of Generalized
Petersen Graphs

The logo of National Tsing Hua University is a circular emblem with a gear-like outer border. Inside the circle, there is a stylized representation of a building or a shield with the letters 'ES' and 'A' visible. The year '1911' is also present at the bottom of the emblem.

研究生：蔡奕正

指導教授：翁志文 教授

中華民國九十九年六月

廣義的 Petersen 圖的 (a, d) -反魔術標號之探討

On (a, d) -Antimagic Labeling of Generalized Petersen Graphs

研究生：蔡奕正

Student : Yi-Cheng Choi

指導教授：翁志文

Advisor : Chih-Wen Weng

國立交通大學

應用數學系



Submitted to Department of Applied Mathematics
College of Science

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Applied Mathematics

June 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年六月

廣義的 Petersen 圖的 (a, d) -反魔術標號之探討

研究生：蔡奕正 指導教授：翁志文

國立交通大學

應用數學系

摘要

令 $G=(V, E)$ 是一個有 p 個頂點及 q 個邊的無向圖。令 f 為將邊集合 E 對應到集合 $\{1, 2, \dots, q\}$ 的一對一且映成的函數。如果存在兩個正整數 a 和 d ，使得頂點和函數 $w(u) = \sum_{u,v \in E} f(u, v)$ 為一對一，且 $w(V) = \{a, a+d, \dots, a+(p-1)d\}$ ，則稱 f 為 G 的 (a, d) -反魔術標號。如果圖 G 具有一個 (a, d) -反魔術標號，則稱 G 為 (a, d) -反魔術圖。

令 n, k 為兩整數， $n \geq 3$ 且 $1 \leq k < \frac{n}{2}$ ，則廣義的 Petersen 圖 $P(n, k)$ 定義如下：

$V(P(n, k)) = \{u_i, v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ， $E(P(n, k)) = \{u_i u_{1+(i \bmod n)}, u_i v_i, v_i v_{1+((i+k-1) \bmod n)} \mid 1 \leq i \leq n\}$ 。

在本篇論文中，我們討論廣義的 Petersen 圖的 (a, d) -反魔術標號，首先我們給出一個必要條件，並用另一種方式呈現已知的定理與猜測，特別地，我們給出 $P(6, 2)$ 為 $(12, 3)$ -反魔術圖及 $P(7, 3)$ 為 $(20, 2)$ -反魔術圖的實際例子並且證明出 $P(7, 2)$ 及 $P(7, 3)$ 皆不為 $(7, 4)$ -反魔術圖，最後我們給出一個表格，列出 $n=3 \sim 8$ 時所有 $P(n, k)$ 之 (a, d) -反魔術圖情形，藉以猜測更大的 n 的反魔術標號情形。

On (a, d) -Antimagic Labeling of Generalized Petersen Graphs

Student : Yi-Cheng Choi

Advisor : Chih-Wen Weng

Department of Applied Mathematics

National Chiao Tung University

Abstract

Let $G=(V, E)$ be an undirected graph with p vertices and q edges. Let f be a bijection function from E to $\{1, 2, \dots, q\}$. If there are positive integers a, d such that the induced vertices sum $w(u) = \sum_{u v \in E} f(u, v)$ is injective and $w(V) = \{a, a + d, \dots, a + (p - 1)d\}$, then f is an (a, d) -antimagic labeling of G . If G has an (a, d) -antimagic labeling then we said G is (a, d) -antimagic.

Let n, k be integers such that $n \geq 3$ and $1 \leq k < \frac{n}{2}$. The generalized Petersen graph $P(n, k)$ is defined by $V(P(n, k)) = \{u_i, v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, and $E(P(n, k)) = \{u_i u_{1+(i \bmod n)}, u_i v_i, v_i v_{1+((i+k-1) \bmod n)} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

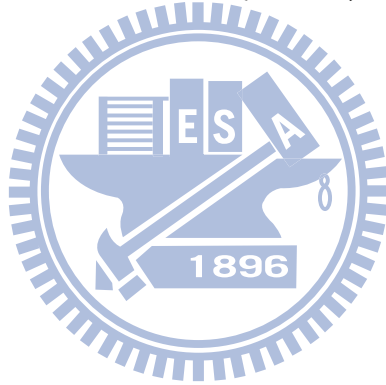
In this thesis, we discuss (a, d) -antimagic labeling of generalized Petersen graph $P(n, k)$. First, we give a necessary condition for the existence of $P(n, k)$, and represent some previously known theorems in our setting. Then we show that $P(6, 2)$ has $(12, 3)$ -antimagic property and $P(7, 3)$ has $(20, 2)$ -antimagic by direct construction. Moreover, we show that neither $P(7, 2)$ nor $P(7, 3)$ is $(7, 4)$ -antimagic. Finally, we give a table showing (a, d) -antimagic property for $P(n, k)$, when $n=3-8$; and conjecture that the same property holds for larger n .

誌謝

首先，感謝我的指導教授翁志文教授，如果沒有老師細心的指導，這篇論文是沒辦法完成的。也感謝應數所的所有老師們，陳秋媛老師，傅恆霖老師，黃大原老師，在研究所期間，所修習的關於組合數學方面的學分，都很感謝以上老師的教導，讓我學到許多知識。

另外也感謝組合組的同學們，在課業上給我幫助，以及學長們，在論文上給我許多寶貴的意見，真的謝謝大家。

最後要感謝我的家人，一直鼓勵我、支持我，讓我在求學道路上能順利完成學業。



研究生：蔡奕正

謹誌於交通大學應用數學研究所

中華民國九十九年六月

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
1 介紹	1
2 預備知識	3
3 已知定理與猜測	5
4 主要結果	11
5 參考文獻	16



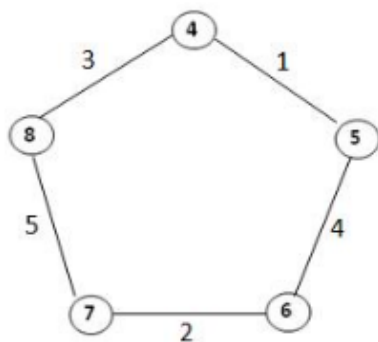
1 介紹

在1990年時，N. Hartsfield 和 G. Ringel [7]介紹了反魔術圖的概念。令 $G=(V, E)$ 是一個有 p 個頂點及 q 個邊的無向圖。令 f 為將邊集合 E 對應到集合 $\{1, 2, \dots, q\}$ 的一對一且映成的函數。如果頂點和函數 $w(u) = \sum_{uv \in E} f(u, v)$ 為一對一函數，則稱 f 為 G 的反魔術標號。如果圖 G 具有一個反魔術標號，則稱 G 為反魔術圖。Hartsfield 和 Ringel 證明出 paths $P_n (n \geq 3)$ ，cycles $C_n (n \geq 3)$ ，wheels $W_n = C_n \times K_1 (n \geq 3)$ ，還有 complete 圖 $K_n (n \geq 3)$ 皆是反魔術圖形。他們猜測所有的連通圖除了 K_2 之外，都是反魔術圖形。

在1993年時，R. Bodendiek 和 G. Walther [8]定義了 (a, d) -反魔術圖的概念。若 G 為一個反魔術圖形，且存在兩個正整數 a 和 d ，使得頂點和為一個以 a 為首項， d 為公差的等差數列，則稱 G 為 (a, d) -反魔術圖。

Bodendiek 和 G. Walther 證明出許多圖不是 (a, d) -反魔術圖。像是：(a) 偶數個點的 Cycle，(b) 偶數個點的 Path，(c) Stars。他們也證明了 P_{2k+1} 是 $(k, 1)$ -反魔術圖及 C_{2k+1} 是 $(k+2, 1)$ -反魔術圖，見例子 1.1。另外他們也證出一些關於樹圖的 (a, d) -反魔術標號的資訊。

例子 1.1. C_5 為 $(4, 1)$ -反魔術圖的例子



廣義的 Petersen 圖 $P(n, k)$ 由 Watkins [9] 在 1969 年首先給出定義，令 n, k 為兩整數， $n \geq 3$ 且 $1 \leq k < \frac{n}{2}$ ，則 $P(n, k)$ 之圖形有 $2n$ 個點及 $3n$ 個邊，外圍為一個 n -cycle $u_1 u_2 u_3 \dots u_n$ ，內部的點依序為 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ ，且內部的邊由兩部分組成，第一部分為 $u_1 v_1, u_2 v_2, u_3 v_3, \dots, u_n v_n$ ，第二部分為 $v_1 v_{1+k}, v_2 v_{2+k}, \dots, v_n v_{((n+k) \bmod n)}$ ，我們給個實際例子 $P(8, 3)$ 如下圖：

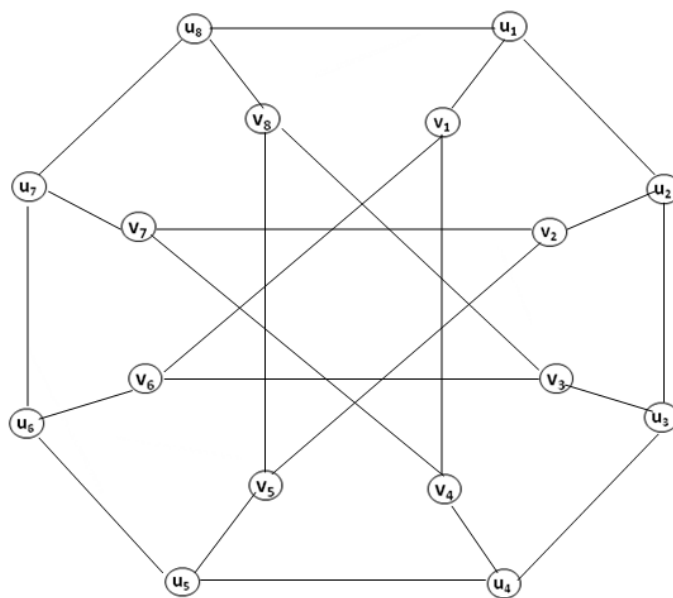


圖 1.1. $P(8, 3)$ 之圖形

所以眾所皆知的 Petersen 圖即為 $P(5, 2)$ ，關於 $P(n, k)$ 的許多標號問題已經被研究出來，可參考 [1]。

在本篇文章中，我們討論廣義的 Petersen 圖的 (a, d) -反魔術標號，我們首先給出一個必要條件，接著敘述一些已知定理與猜測，並且證明了一些猜測，最後我們整理了一個表格，列出 $n=3 \sim 8$ 時，所有 $P(n, k)$ 之 (a, d) -反魔術情形，藉以推測更大的 n 的 $P(n, k)$ 之 (a, d) -反魔術情形。

2 預備知識

在上節我們都用比較白話的方式說明本篇文章所需要的內容，本節我們給出比較嚴謹的的數學定義，接著給出一個必要條件，來討論 $P(n, k)$ 為 (a, d) -反魔術圖的可能公差 d 與 n 的關係。

定義 2.1. 令 $G=(V, E)$ 是一個有 p 個頂點及 q 個邊的無向圖。令 f 為將邊集合 E 對應到集合 $\{1, 2, \dots, q\}$ 的一對一且映成的函數。如果存在兩個正整數 a 和 d ，使得頂點和函數 $w(u) = \sum_{u \sim v \in E} f(u, v)$ 為一對一，且 $w(V) = \{a, a+d, \dots, a+(p-1)d\}$ ，則稱 f 為 G 的 (a, d) -反魔術標號。如果圖 G 具有一個 (a, d) -反魔術標號，則稱 G 為 (a, d) -反魔術圖。

定義 2.2. 令 n, k 為兩整數， $n \geq 3$ 且 $1 \leq k < \frac{n}{2}$ ，則廣義的Petersen圖 $P(n, k)$ 定義如下：

$$V(P(n, k)) = \{u_i, v_i \mid 1 \leq i \leq n\},$$

$$E(P(n, k)) = \{u_i u_{1+(i \bmod n)}, u_i v_i, v_i v_{1+((i+k-1) \bmod n)} \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

因為本篇文章在討論 $P(n, k)$ 的反魔術標號情形，所以我們接著給出一個重要的必要條件，告訴我們如果 $P(n, k)$ 為反魔術標號圖，則公差 d 只有可能為 $1 \sim 4$ ，並且對每一個公差，我們可推出首項。

定理 2.3. 令 $P(n, k)$ 為 (a, d) -反魔術圖。

若 n 為偶數，則 $d=1$ 且 $a = \frac{7n}{2} + 2$ ，或 $d=3$ 且 $a = \frac{3n}{2} + 3$ 。

若 n 為奇數，則 $d=2$ 且 $a = \frac{5n+5}{2}$ ，或 $d=4$ 且 $a = \frac{n+7}{2}$ 。

證明：若 $P(n, k)$ 為 (a, d) -反魔術圖，因為 $P(n, k)$ 有 $2n$ 個點且有 $3n$ 個邊，所以邊的和為

$$1 + 2 + \dots + 3n = \frac{3n(3n+1)}{2},$$

點的和為

$$a + (a+d) + \dots + [a + (2n-1)d] = \frac{[a + a + (2n-1)d] \times 2n}{2} = 2na + nd(2n-1)。$$

因為每個邊被相鄰兩點各算一次，所以

$$3n(3n+1) = 2na + nd(2n-1),$$

而得到

$$d = \frac{3(3n+1) - 2a}{2n-1}。 \quad (1)$$

又 $P(n, k)$ 每個點皆有 3 個邊與其相鄰，所以 a 之最小值 $= 1+2+3=6$ ，帶入(1)式可得 d

之最大值 $= \frac{9n-9}{2n-1} < \frac{10n-5}{2n-1} = 5$ ，也就是 $1 \leq d \leq 4$ ，所以若 n 為偶數，代入(1)式得 d

為奇數($d=1$ 或 $d=3$)，反之亦同；若 n 為奇數，代入(1)式得 d 為偶數($d=2$ 或 $d=4$)，

反之亦同。並且我們可以由公差代入(1)式求出首項，所以我們可得以下兩個結論：

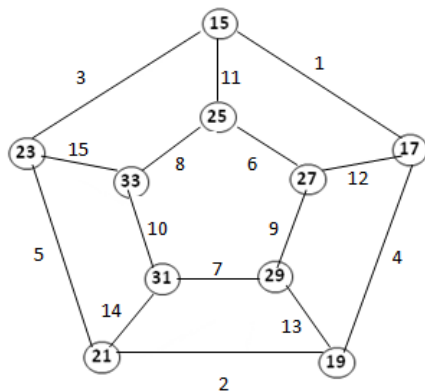
1. 若 $P(n, k)$ 為 (a, d) -反魔術圖，且 n 為偶數，則 (a, d) 必為

$$\left(\frac{7n}{2} + 2, 1\right) \quad \text{或} \quad \left(\frac{3n}{2} + 3, 3\right)。$$

2. 若 $P(n, k)$ 為 (a, d) -反魔術圖，且 n 為奇數，則 (a, d) 必為

$$\left(\frac{5n+5}{2}, 2\right) \quad \text{或} \quad \left(\frac{n+7}{2}, 4\right)。$$

例子 2.4. $P(5, 1)$ 為 $(15, 2)$ -反魔術圖的例子如下圖。



3 已知定理與猜測

本節我們為了完整性，給出該有的證明，並且對已知證明裡的標號方式用另一種方式呈現。

定理 3.1. [3] 對所有 $n \geq 4$ 之偶數， $P(n, k)$ 為 $\left(\frac{7n}{2} + 2, 1\right)$ -反魔術圖。

證明：給個標號如下：

$1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ 依序標在 $e(u_n u_1), e(u_{n-2} u_{n-1}), \dots, e(u_2 u_3)$ ，

$\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ 依序標在 $e(u_2 v_2), e(u_4 v_4), \dots, e(u_n v_n)$ ，

$n + 1, n + 2, \dots, \frac{3n}{2}$ 依序標在 $e(u_{n-1} v_{n-1}), e(u_{n-3} v_{n-3}), \dots, e(u_1 v_1)$ ，

$\frac{3n}{2} + 1, \frac{3n}{2} + 2, \dots, 2n$ 依序標在 $e(v_1 v_{1+k}), e(v_3 v_{3+k}), \dots, e(v_{n-1} v_{1+(n-1+k-1) \bmod n})$ ，

$2n + 1, 2n + 2, \dots, \frac{5n}{2}$ 依序標在 $e(v_n v_{1+(n+k-1) \bmod n}), e(v_{n-2} v_{1+(n-2+k-1) \bmod n}), \dots, e(v_2 v_4)$ ，

$\frac{5n}{2} + 1, \frac{5n}{2} + 2, \dots, 3n$ 依序標在 $e(u_1 u_2), e(u_3 u_4), \dots, e(u_{n-1} u_n)$ 。

觀察可知點的總和如下：

(1) 當 i 為偶數時， $e(u_i u_{1+(i \bmod n)}) + e(u_{i-1} u_i) = 3n + 1$ ，且 $e(u_i v_i)$ 依序出現

$\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ ，所以 $w(u_i)$ 依序為 $\frac{7n}{2} + 2, \frac{7n}{2} + 3, \dots, 4n + 1$ 。

(2) 當 $i=1$ 時， $w(u_1) = 1 + (\frac{5n}{2} + 1) + (\frac{3n}{2}) = 4n + 2$ 。

(3) 當 i 為奇數且 $i \geq 3$ 時， $e(u_i u_{i+1}) + e(u_{i-1} u_i) = 3n + 2$ ，且 $e(u_i v_i)$ 依序出現

$n + 1, n + 2, \dots, \frac{3n}{2} - 1$ ，所以 $w(u_i)$ 依序為 $4n + 3, 4n + 4, \dots, \frac{9n}{2} + 1$ 。

(4) 當 $1 \leq i \leq n$ 時， $e(v_i v_{1+(i+k-1) \bmod n}) + e(u_i v_i) = 3n + 1$ ，且

$\{ e(v_i v_{1+(i+k-1) \bmod n}) \mid 1 \leq i \leq n \} = \{ \frac{3n}{2} + 1, \frac{3n}{2} + 2, \dots, \frac{5n}{2} \}$ ，

所以 $\{ w(v_i) \mid 1 \leq i \leq n \} = \{ \frac{9n}{2} + 2, \frac{9n}{2} + 3, \dots, \frac{11n}{2} + 1 \}$ 。

由(1)~(4)知，對所有 $n \geq 4$ 之偶數， $P(n, k)$ 為 $\left(\frac{7n}{2} + 2, 1\right)$ -反魔術圖。

下面我們給出 $P(8, 2)$ 之標號方式的例子。

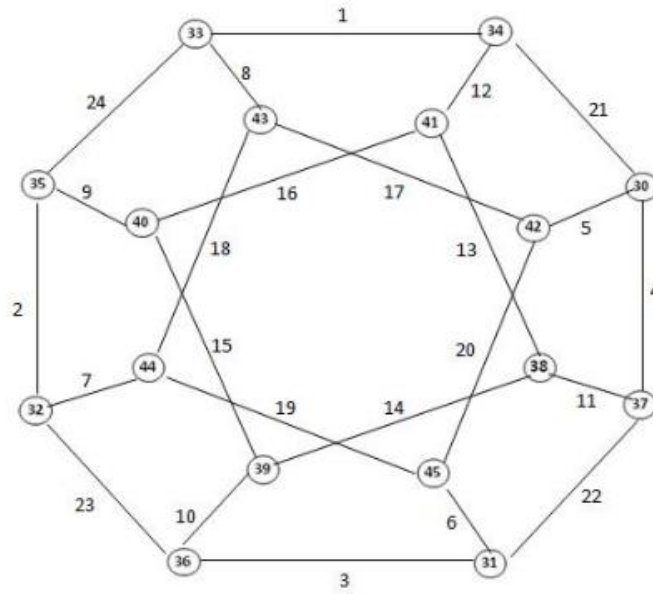


圖 3.1. $P(8, 2)$ 為 $(30, 1)$ -反魔術圖的例子

定理 3.2. [2] 對所有 $n \geq 3$ 之奇數, $P(n, 1)$ 為 $\left(\frac{5n+5}{2}, 2\right)$ -反魔術圖。

證明：給個標號如下：

$1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ 依序標在 $e(u_1u_2), e(u_3u_4), \dots, e(u_nu_1)$,

$\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \dots, n$ 依序標在 $e(u_2u_3), e(u_4u_5), \dots, e(u_{n-1}u_n)$,

$n+1, n+2, \dots, \frac{3n+1}{2}$ 依序標在 $e(v_1v_2), e(v_3v_4), \dots, e(v_nv_1)$,

$\frac{3n+3}{2}, \frac{3n+5}{2}, \dots, 2n$ 依序標在 $e(v_2v_3), e(v_4v_5), \dots, e(v_{n-1}v_n)$,

$2n+1, 2n+2, \dots, 3n$ 依序標在 $e(u_1v_1), e(u_2v_2), \dots, e(u_nv_n)$ 。

易驗證此標號為 $\left(\frac{5n+5}{2}, 2\right)$ -反魔術標號。

公差為 2 的例子可參考例子 1.2. 。

定理 3.3. [2] 對所有 $n \geq 4$ 之偶數, $P(n, 1)$ 為 $\left(\frac{3n}{2}+3, 3\right)$ -反魔術圖。

證明：此證明較繁雜，在此省略。

定理 3.4. [4] 對所有 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 且 $n \geq 8$ 之偶數， $P(n, 2)$ 為 $\left(\frac{3n}{2} + 3, 3\right)$ -

反魔術圖。

證明：給個標號如下：

1 標在 $e(u_1 u_2)$ ，

$2, 3, \dots, \frac{n}{2}$ 標在 $e(u_n u_1), e(u_{n-2} u_{n-1}), \dots, e(u_4 u_5)$ ，

$\frac{n}{2} + 1$ 標在 $e(u_2 v_2)$ ，

$\frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 3, \dots, n$ 依序標在 $e(u_{n-1} u_n), e(u_{n-3} u_{n-2}), \dots, e(u_3 u_4)$ ，

$n + 1$ 標在 $e(u_2 u_3)$ ，

$n + 2, n + 3, \dots, \frac{3n}{2}$ 標在 $e(u_n v_n), e(u_{n-2} v_{n-2}), \dots, e(u_4 v_4)$ ，

$\frac{3n}{2} + 1, \frac{3n}{2} + 3, \dots, 2n - 1$ 依序標在 $e(v_{n-1} v_1), e(v_{n-5} v_{n-3}), \dots, e(v_3 v_5)$ ，

$2n + 1, 2n + 3, \dots, \frac{5n}{2} - 3$ 依序標在 $e(v_{n-3} v_{n-1}), e(v_{n-7} v_{n-5}), \dots, e(v_5 v_7)$ ，

$\frac{3n}{2} + 2, \frac{3n}{2} + 4, \dots, \frac{5n}{2}$ 依序標在 $e(v_2 v_4), e(v_4 v_6), \dots, e(v_n v_2)$ ，

$\frac{5n}{2} - 1$ 標在 $e(u_3 v_3)$ ，

$\frac{5n}{2} + 1, \frac{5n}{2} + 2, \dots, 3n - 2$ 依序標在 $e(u_{n-1} v_{n-1}), e(u_{n-3} v_{n-3}), \dots, e(u_5 v_5)$ ，

$3n - 1$ 標在 $e(v_1 v_3)$ ，

$3n$ 標在 $e(u_1 v_1)$ ，

觀察可知點的總和如下：

(1) $w(u_2), w(u_n), w(u_{n-2}), \dots, w(u_4)$ 依序為 $\frac{3n}{2} + 3, \frac{3n}{2} + 6, \frac{3n}{2} + 9, \dots, 3n$ 。

(2) $w(u_1), w(u_{n-1}), w(u_{n-3}), \dots, w(u_3)$ 依序為 $3n + 3, 3n + 6, 3n + 9, \dots, \frac{9n}{2}$ 。

(3) $w(v_2), w(v_4), w(v_6), \dots, w(v_n)$ 依序為 $\frac{9n}{2} + 3, \frac{9n}{2} + 6, \frac{9n}{2} + 9, \dots, 6n$ 。

(4) $w(v_{n-1}), w(v_{n-3}), w(v_{n-5}), \dots, w(v_1)$ 依序為 $6n + 3, 6n + 6, 6n + 9, \dots, \frac{15n}{2}$ 。

由(1)~(4)知，對所有 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 且 $n \geq 8$ 之偶數， $P(n, 2)$ 為 $\left(\frac{3n}{2} + 3, 3\right)$ -反魔術圖。

定理 3.5. [5] 對所有 $n \geq 8$ 之偶數， $P(n, 3)$ 為 $\left(\frac{3n}{2} + 3, 3\right)$ -反魔術圖。

證明：給個標號如下

1 標在 $e(u_n u_1)$ ，

$2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1$ 依序標在 $e(u_2 u_3), e(u_4 u_5), \dots, e(u_{n-4} u_{n-3})$ ，

$\frac{n}{2}$ 標在 $e(u_{n-1} v_{n-1})$ ，

$\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$ 依序標在 $e(u_1 u_2), e(u_3 u_4), \dots, e(u_{n-1} u_n)$ ，

$n+1, n+2, \dots, \frac{3n}{2} - 1$ 依序標在 $e(u_1 v_1), e(u_3 v_3), \dots, e(u_{n-3} v_{n-3})$ ，

$\frac{3n}{2}$ 標在 $e(u_{n-2} u_{n-1})$ ，

$\frac{3n}{2} + 1, \frac{3n}{2} + 2, \dots, 2n$ 依序標在 $e(v_{n-2} v_1), e(v_n v_3), e(v_2 v_5), \dots, e(v_{n-4} v_{n-1})$ ，

$2n+1, 2n+2$ 依序標在 $e(u_{n-2} v_{n-2}), e(u_n v_n)$ ，

$2n+3, 2n+4, \dots, \frac{5n}{2} + 2$ 依序標在 $e(v_{n-1} v_2), e(v_1 v_4), \dots, e(v_{n-3} v_n)$ ，

$\frac{5n}{2} + 3, \frac{5n}{2} + 4, \dots, 3n$ 依序標在 $e(u_2 v_2), e(u_4 v_4), \dots, e(u_{n-4} v_{n-4})$ ，

觀察可知點的總和如下：

(1) $w(u_1), w(u_3), w(u_5), \dots, w(u_{n-1})$ 依序為 $\frac{3n}{2} + 3, \frac{3n}{2} + 6, \frac{3n}{2} + 9, \dots, 3n$ 。

(2) $w(u_n), w(u_2), w(u_4), \dots, w(u_{n-2})$ 依序為 $3n + 3, 3n + 6, 3n + 9, \dots, \frac{9n}{2}$ 。

(3) $w(v_{n-1}), w(v_1), w(v_3), \dots, w(v_{n-3})$ 依序為 $\frac{9n}{2} + 3, \frac{9n}{2} + 6, \frac{9n}{2} + 9, \dots, 6n$ 。

(4) $w(v_{n-2}), w(v_n), w(v_2), \dots, w(v_{n-4})$ 依序為 $6n + 3, 6n + 6, 6n + 9, \dots, \frac{15n}{2}$ 。

由(1)~(4)知，對所有 $n \geq 8$ 之偶數 $P(n, 3)$ 為 $\left(\frac{3n}{2} + 3, 3\right)$ -反魔術圖。

以上 5 個定理為已知的重要結果，其中由定理 3.1，我們知道所有公差為 1 的反魔術 $P(n, k)$ 圖都已經解決；公差為 2 的反魔術 $P(n, k)$ 圖只解決了 $k=1$ 時的情形；公差為 3 的反魔術 $P(n, k)$ 圖，解決了 $k=1$ 及 $k=3$ 的情況， $k=2$ 的情形只解決一半。另外，下面我們給出一些猜測與已知不是反魔術 $P(n, k)$ 圖的證明。

猜測 3.6. [4] 對所有 $n \geq 5$ 之奇數, $P(n, k)$ 為 $\left(\frac{5n+5}{2}, 2\right)$ -反魔術圖。

下面我們將在引理 3.9. 敘述吳宗翰[6]給出證明在 $P(5, 2)$ 時, 此猜測是錯的; 且在圖 3.2. 給出 $P(7, 2)$ 是對的之例子[6]; 在下節我們將給出 $P(7, 3)$ 是對的之例子。

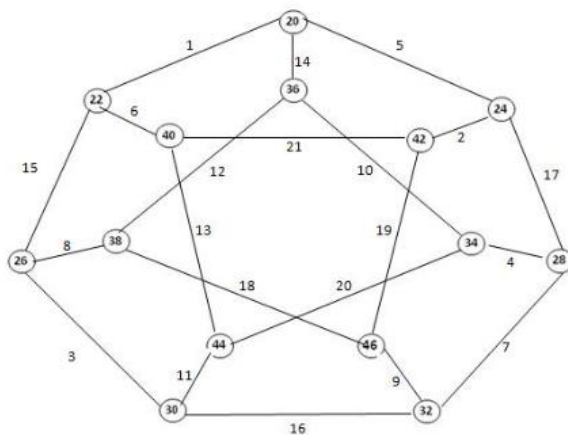


圖 3.2. $P(7, 2)$ 為 $(20, 2)$ -反魔術圖的例子

猜測 3.7. [4] 對所有 $n \geq 6$ 之偶數, $P(n, k)$ 為 $\left(\frac{3n}{2} + 3, 3\right)$ -反魔術圖。

此猜測在 $k=1$ 時, 即為定理 3.3., 在 $k=2$ 且 n 為 4 的倍數時, 即為定理 3.4., 在 $k=3$ 時, 即為定理 3.5., 在下節我們將給出例子, 證明此猜測在 $P(6, 2)$ 時是對的。

猜測 3.8. [4] 對所有 $n \geq 7$ 之奇數, $P(n, k)$ 為 $\left(\frac{n+7}{2}, 4\right)$ -反魔術圖。

Bacá 和 Holländer 給出 $P(7, 1)$ 、 $P(9, 1)$ 、 $P(11, 1)$ 皆是對的之例子[2], 其中 $P(7, 1)$ 之圖如下; 另外下節我們將證明在 $P(7, 2)$ 與 $P(7, 3)$ 時, 此猜測是錯的。

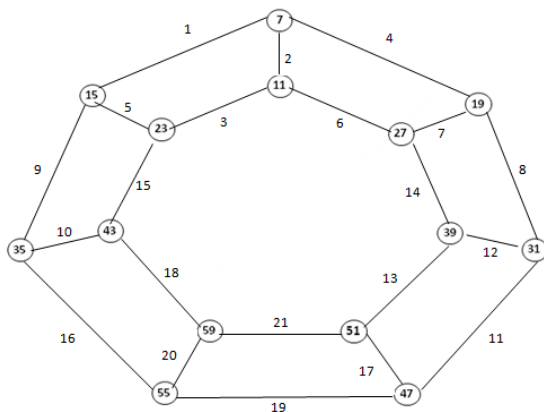


圖 3.3. $P(7, 1)$ 為 $(7, 4)$ -反魔術圖的例子

引理 3.9. [6] $P(5, 2)$ 不為 $(15, 2)$ -反魔術圖。

證明：若 $P(5, 2)$ 為 $(15, 2)$ -反魔術圖，則點和皆為奇數，又因為 $P(5, 2)$ 為 3-regular，所以和每一點相鄰的三個邊必為三個奇數或兩個偶數與一個奇數。另外， $P(15, 2)$ 邊上的標號為 1~15，共八個奇數與七個偶數。所以我們可依據與外圍五個點相鄰的五個邊的標號方式作討論。若外圍五個點的點和皆由三個奇數所累加，則得到 $P(15, 2)$ 的邊標上十個奇數與五個偶數，與已知矛盾；同理我們可推得所有情形皆與已知矛盾，所以 $P(5, 2)$ 不為 $(15, 2)$ -反魔術圖。

引理 3.10. [2] $P(5, 1)$ 和 $P(5, 2)$ 皆不為 $(6, 4)$ -反魔術圖。

證明：若 $P(5, 1)$ 為 $(6, 4)$ -反魔術圖，則點和依序為 6, 10, 14, ..., 62，點和為 6 之標號必為 $(1, 2, 3)$ ，點和為 10 之標號可能為 $(1, 2, 7)$, $(1, 3, 6)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 5)$ ，但是因為任兩點只有一邊相鄰，所以點和為 10 之標號必為 $(1, 4, 5)$ ；又點和為 14 之標號可能為 $(1, 2, 11)$, $(1, 3, 10)$, $(1, 4, 9)$, $(1, 5, 8)$, $(1, 6, 7)$, $(2, 3, 9)$, $(2, 4, 8)$, $(2, 5, 7)$, $(3, 4, 7)$, $(3, 5, 6)$ ，但是不可能再用到 1，所以只剩後面五組數字可能，但是實際去畫圖會發現後面五組皆會產生 3-cycle，與 $P(5, 1)$ 的結構矛盾，所以 $P(5, 1)$ 不為 $(6, 4)$ -反魔術圖。同理可推出 $P(5, 2)$ 亦不為 $(6, 4)$ 反魔術圖。

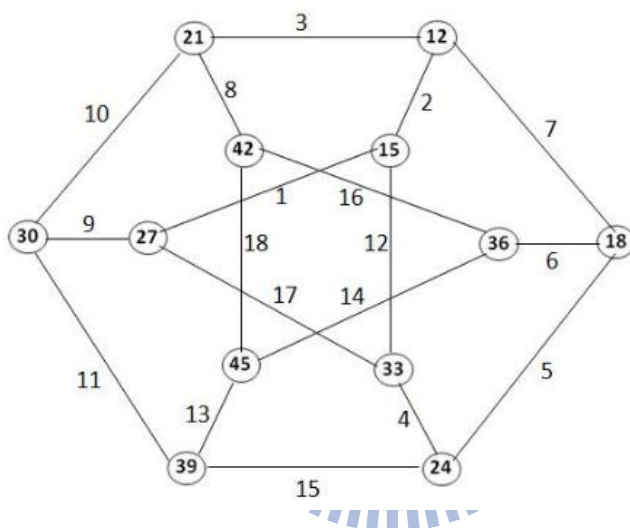
引理 3.11. $P(3, 1)$ 不為 $(5, 4)$ -反魔術圖。

證明：若 $P(3, 1)$ 為 $(5, 4)$ -反魔術圖，則點和依序為 5, 9, 13, 17, 21, 25，但是因為廣義的 Petersen 圖上的每個點皆有 3 個邊與其相鄰，所以點和至少為 $1+2+3=6$ 與上述矛盾。所以 $P(3, 1)$ 不為 $(5, 4)$ -反魔術圖。

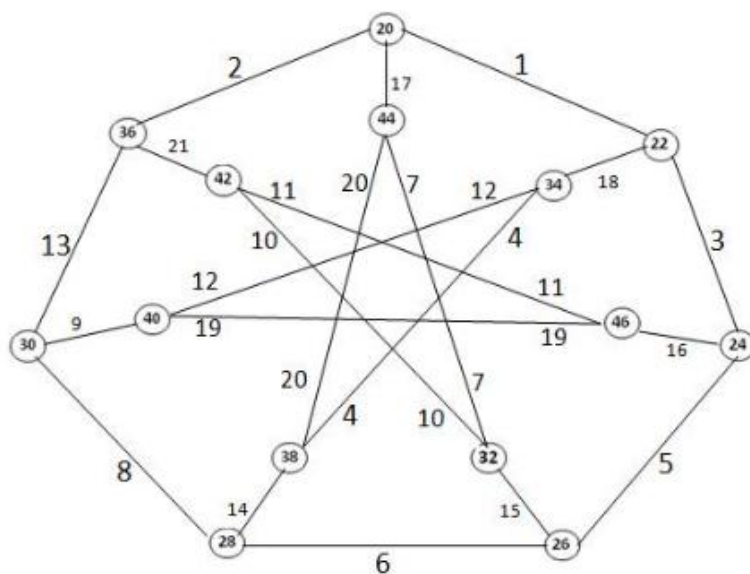
4 主要結果

本節我們希望由較小的 $n(\leq 8)$ 討論 $P(n, k)$ 的反魔術情形。但是只用上節的已知定理是不夠的。所以我們針對上節猜測 3.6. 到猜測 3.8. 的猜測給出幾個例子與證明。首先我們將給出猜測 3.6. 在 $P(6, 2)$ 時是對的以及猜測 3.7. 在 $P(7, 3)$ 是對的之實際例子。並且證明猜測 3.8. 在 $P(7, 2)$ 及 $P(7, 3)$ 時皆是錯的之證明。最後我們會給出一個表格討論 $n=3\sim 8$ 時的所有情形，藉以猜測更大的 n 的反魔術標號情形。

例子 4.1. $P(6, 2)$ 為 $(12, 3)$ - 反魔術圖之實際例子如下圖。



例子 4.2. $P(7, 3)$ 為 $(20, 2)$ - 反魔術圖之實際例子如下圖。



接著我們證明 $P(7, 2)$ 與 $P(7, 3)$ 皆不為 $(7, 4)$ -反魔術圖的證明，一開始的證明步驟與引理 3.10. 類似，但是會用到更多的圖的結構性質，並由點的總和一直推測下去，最後導出所有可能皆會與結構矛盾。

定理 4.3. $P(7, 2)$ 和 $P(7, 3)$ 皆不為 $(7, 4)$ -反魔術圖。

證明：由 $P(7, 2)$ 與 $P(7, 3)$ 之結構，可得以下 5 個規則：

規則一：任兩點頂多一邊相鄰。

例：若 $7=1+2+4$ ，則 $11=1+2+8$ 會產生矛盾。

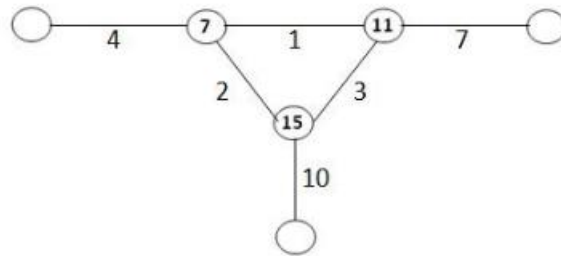
規則二：每個邊的標號最多出現兩次。

例：若 $7=1+2+4$ ， $11=1+3+7$ ，則 $15=1+5+9$ 會產生矛盾。

規則三：圖形無 3-cycle。

例：若 $7=1+2+4$ ， $11=1+3+7$ ， $15=2+3+10$ 。

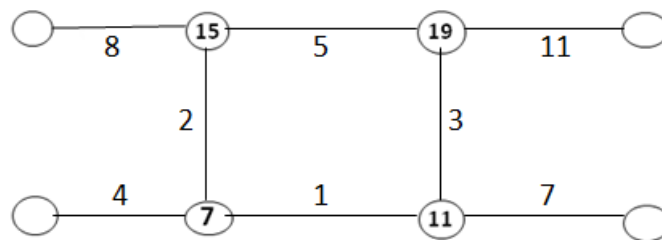
則必出現標號為 $(1, 2, 3)$ 之 3-cycle 產生矛盾，如下圖：



規則四：圖形無 4-cycle。

例：若 $7=1+2+4$ ， $11=1+3+7$ ， $15=2+5+8$ ， $19=3+5+11$ ，

則必出現標號為 $(1, 2, 3, 5)$ 之 4-cycle 產生矛盾，如下圖：



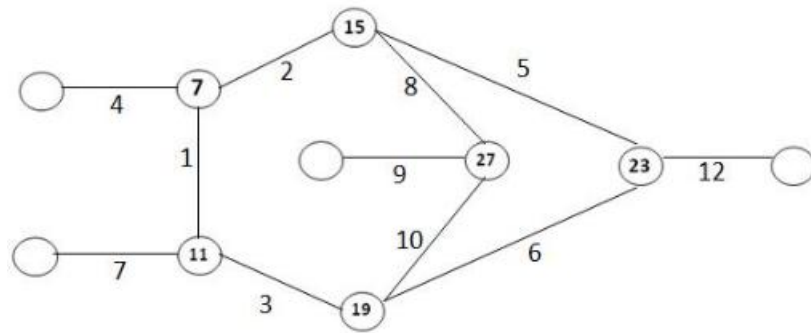
規則五：圖形的 5-cycle 不會有兩個重複邊。

例：若 $7=1+2+4$ ， $11=1+3+7$ ， $15=2+5+8$ ， $19=3+6+10$ ， $23=5+6+12$ ，

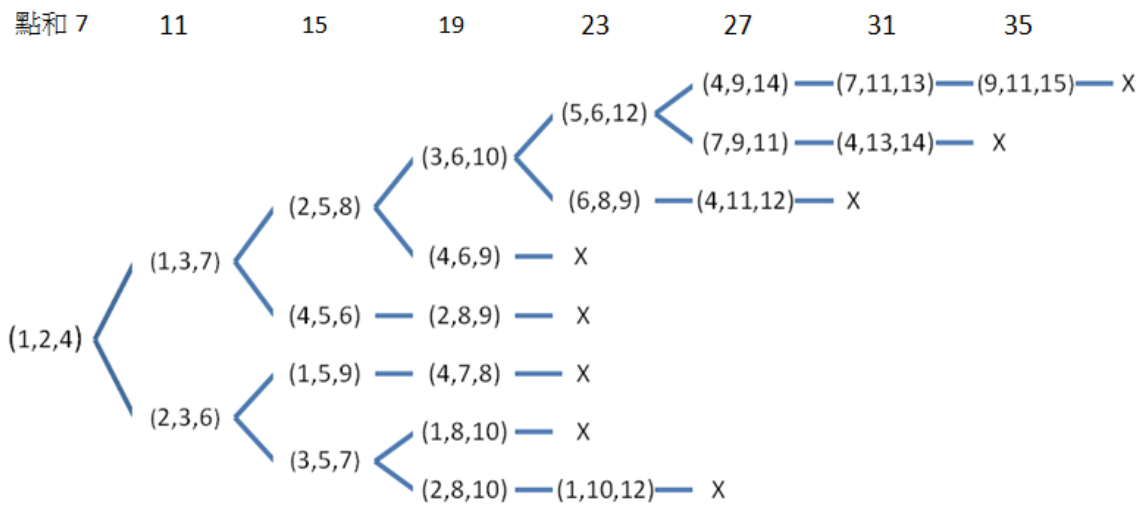
首先出現一個標號為 $(1, 2, 3, 5, 6)$ 之 5-cycle，

接著 $27=8+9+10$ ，再出現一個標號為 $(1, 2, 3, 8, 10)$ 之 5-cycle，

則這兩個 5-cycle 有三個邊重複產生矛盾，如下圖：



滿足規則一到五的所有可能標號如下，最後皆會產生矛盾。



所以 $P(7, 2)$ 與 $P(7, 3)$ 皆不為 $(7, 4)$ -反魔術圖。

接著我們希望由較小的 n 觀察 $P(n, k)$ 的反魔術情形，藉以推測更大的 n 時， $P(n, k)$ 是否為反魔術圖，我們給出一個表格，列出 $n=3\sim 8$ 時所有 $P(n, k)$ 之 (a, d) -反魔術圖情形，我們使用符號 (a, d) -A 來代表此圖有個 (a, d) -反魔術圖標號。

n	圖	標號	註
$n=3$	$P(3, 1)$	$(10, 2)$ -A 不為 $(5, 4)$ -A	定理 3. 2. 引理 3. 11.
$n=4$	$P(4, 1)$	$(16, 1)$ -A $(9, 3)$ -A	定理 3. 1. 定理 3. 3.
$n=5$	$P(5, 1)$	$(15, 2)$ -A 不為 $(6, 4)$ -A	定理 3. 2. 引理 3. 10.
	$P(5, 2)$	不為 $(15, 2)$ -A 不為 $(6, 4)$ -A	引理 3. 9. 引理 3. 10.
$n=6$	$P(6, 1)$	$(23, 1)$ -A $(12, 3)$ -A	定理 3. 1. 定理 3. 3.
	$P(6, 2)$	$(23, 1)$ -A $(12, 3)$ -A	定理 3. 1. 例子 4. 1.
$n=7$	$P(7, 1)$	$(20, 2)$ -A $(7, 4)$ -A	定理 3. 2. 圖 3. 3.
	$P(7, 2)$	$(20, 2)$ -A 不為 $(7, 4)$ -A	圖 3. 2. 定理 4. 3.
	$P(7, 3)$	$(20, 2)$ -A 不為 $(7, 4)$ -A	例子 4. 2. 定理 4. 3.
$n=8$	$P(8, 1)$	$(30, 1)$ -A $(15, 3)$ -A	定理 3. 1. 定理 3. 3.
	$P(8, 2)$	$(30, 1)$ -A $(15, 3)$ -A	定理 3. 1. 定理 3. 4.
	$P(8, 3)$	$(30, 1)$ -A $(15, 3)$ -A	定理 3. 1. 定理 3. 5.

表 5. 1.

由以上表格可看出當 n 為 4、6、8 時， $P(n, k)$ 皆為公差為 1 的 (a, d) -反魔術圖；也為公差為 3 的 (a, d) -反魔術圖。所以我們推測當 n 為偶數時， $P(n, k)$ 皆為公差為 1 的 (a, d) -反魔術圖；也為公差為 3 的 (a, d) -反魔術圖。當 n 為奇數時，我們期望能找到一個奇數，使不管 k 為多少時，皆有公差為 2 的反魔術圖，也有公差為 4 的反魔術圖。若能找到這個奇數，則我們猜測，比這個奇數大的所有奇數 n ， $P(n, k)$ 皆為公差為 2 的反魔術圖，也為公差為 4 的反魔術圖。

另外，由表格可以看出，當 $n=7$ 時，不管 k 為何值，皆有公差為 2 的反魔術圖，所以我們可猜測，當 $n \geq 7$ 且為奇數時，皆有公差為 2 的反魔術圖。所以比較麻煩的問題在公差為 4 的圖，但是有關公差為偶數的反魔術圖的已知定理又很少(只有定理 3.2.)，剩下的已知結果都是只給出幾個圖的例子，所以我們期望以後能得到更多關於這方面的資訊。



5 參考文獻

- [1] J.A Gallian, A Survey: A Dynamic Survey of Graph Labeling, THE ELECTRONIC JOURNAL OF COMBINATORICS, 5(2005), #DS6.
- [2] M. Bacă and I. Holländer, On (a, d) -antimagic prisms, ARS COMBINATORIA, 48(1998), pp. 297-306.
- [3] M. Bacă, Consecutive-magic labeling of generalized Petersen graphs, Utilitas Math., 58(2000), pp. 237-241.
- [4] Mirka Miller and Martin Bacă, Antimagic valuations of generalized Petersen graphs, Australasian Journal of Combinatorics, 22(2000), pp. 135-139.
- [5] X. Xu, Y. Yang, Y. Xi, and H. Li, On (a, d) -antimagic labelings of generalized Petersen graphs $P(n, 3)$, ARS COMBINATORIA, 86(2008), pp. 23-31.
- [6] Tsung-Han Wu, On Antimagic Labeling of Graphs.
- [7] N. Hartsfield and G. Ringel, Pearls in Graph Theory, Academic Press, Boston-San Diego-New York-London, 1990.
- [8] R. Bodendiek and G. Walther, Arithmetisch antimagische graphen, In: K. Wagner and R. Bodendiek, Graphentheorie III, BI-Wiss. Verl., Mannheim, 1993.
- [9] Watkins, M. E., A Theorem on Tait Colorings with an Application to the Generalized Petersen Graphs, J. Combin. Theory 6 (1969), pp. 152-164.